Вычислительные технологии **Том 15, № 4, 2010**

Симметрия уравнений термодиффузии при нелинейной зависимости силы плавучести от температуры и концентрации*

В. К. Андреев, И. В. Степанова
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия,
e-mail: andr@icm.krasn.ru, stepiv@icm.krasn.ru

Исследованы свойства симметрии системы уравнений термодиффузии при нелинейной зависимости силы плавучести от температуры и концентрации. Найдена основная алгебра Ли операторов, допускаемых исходной системой уравнений при произвольных значениях функции, определяющей силу плавучести, а также вычислены все специализации этой функции, расширяющие основную алгебру Ли. Построены некоторые инвариантные решения, описывающие движение бинарной смеси под действием силы плавучести с учетом эффекта Соре.

Ключевые слова: групповые свойства, алгебра Ли, уравнения термодиффузии, сила плавучести.

1. Описание системы уравнений

В последние десятилетия развитие вычислительной техники стимулировало поиск регулярных механизмов переноса энергии и вещества в различных смесях. К числу таких процессов относится конвекция. Конвективные течения играют важную роль в задачах теплоэнергетики, металлургии, в метеорологических явлениях и в настоящее время стали важным объектом теоретической, вычислительной и прикладной гидродинамики. Несмотря на интерес к этим течениям не только с точки зрения возможных технологических приложений, но и как к фундаментальной физической проблеме, до сих пор нет общих методов исследования нелинейных уравнений конвекции. При описании конвективных течений необходимо учитывать нелинейность уравнения состояния среды, эффекты Соре и Дюфора, перенос примесей и тепла, зависимости кинетических коэффициентов среды и коэффициентов теплового расширения и солевого сжатия от параметров состояния.

Для изучения основных закономерностей конвекции уравнения движения обычно упрощаются согласно выбранной модели процесса. В случае конвективного течения под действием эффекта Соре и сил плавучести уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\triangle\mathbf{u} + R(p,\theta,c)\mathbf{g}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = \mathbf{0},$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \chi\triangle\theta, \quad \frac{dc}{dt} = D\triangle c + \alpha D\triangle\theta, \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00762), интеграционных проектов СО РАН № 65 и 116, гранта президента РФ № МК-299.2009.1.

где $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ — вектор координат; $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ — вектор скорости; p — давление; θ — малое отклонение температуры от среднего значения; c — малое отклонение концентрации легкого компонента от среднего значения; $\rho_0 = \mathrm{const}$ — плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — вектор массовых сил; ν — кинематическая вязкость; χ — коэффициент температуропроводности; D — коэффициент диффузии; α — коэффициент Соре; $R(p, \theta, c)$ — положительная функция, определяющая силу плавучести; ρ_0, ν, χ, D, g — положительные постоянные; $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ — символ полной производной. Заметим, что при $\alpha < 0$ термодиффузию называют нормальной, в этом случае тяжелые компоненты стремятся перейти в более холодные области, а легкие — в более нагретые; при $\alpha > 0$ наблюдается аномальная термодиффузия, при которой направление движения компонентов меняется на противоположное.

В предположении $\nu \neq 0,\ \chi \neq 0,\ \chi \neq D,\ D \neq 0,\ \alpha \neq 0$ после замены переменных

$$Rg \to R, \quad p = \rho_0 u^4, \quad \theta = \frac{\chi - D}{\alpha D} u^5, \quad c = u^5 + u^6$$

система (1) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla u^4 + \nu \triangle \mathbf{u} + R(u^4, u^5, u^6)\mathbf{k}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ &\frac{du^5}{dt} = \chi \triangle u^5, \quad \frac{du^6}{dt} = D \triangle u^6, \quad \mathbf{k} = (0, 0, -1), \end{aligned} \tag{2}$$

где два последние уравнения имеют одинаковую дифференциальную структуру.

2. Постановка задачи

При анализе систем нелинейных уравнений в частных производных, таких как система (2), необходимо применять достаточно мощные математические методы. Одним из них является теоретико-групповой анализ, позволяющий изучать инвариантные свойства таких уравнений. Созданный в XIX веке Софусом Ли, этот метод получил существенное развитие только во второй половине XX века в работах Л.В. Овсянникова [1] и его учеников и до сих пор является единственным общим методом построения точных решений дифференциальных уравнений в частных производных. Задача групповой классификации системы (2) относительно функции $R(u^4, u^5, u^6)$ поставлена в [2], где была найдена основная алгебра Ли операторов, допускаемых системой (2) при произвольных значениях классифицируемой функции, а также вычислены преобразования эквивалентности, упрощающие вид классифицируемой функции и не меняющие дифференциальной формы исходных уравнений. Основная алгебра Ли характеризуется восьмипараметрической группой симметрии, соответствующей операторам

$$\begin{aligned} &X_0 = \partial_t, \quad X_{12} = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^2} - u^2 \frac{\partial}{\partial u^1}, \\ &H_i(1) = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad H_i(t) = t \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3}$$

Группе временных сдвигов соответствует оператор X_0, группе вращений в плоскости $\{x^1, x^2\}$ ставится во взаимнооднозначное соответствие оператор X_{12}, операторы $H_i(1)$

отражают инвариантность системы (2) по отношению к сдвигам вдоль осей x^1, x^2, x^3, операторы $H_i(t)$ учитывают инвариантность относительно преобразований Галилея.

При дальнейшем исследовании свойств симметрии уравнений (2) было выделено три классифицирующих уравнения, играющих роль ограничений на широту допускаемой алгебры Ли операторов. При решении этих уравнений появляются следующие варианты:

$$R = \text{const}, \tag{4}$$

$$R = R(u^5, u^6), \tag{5}$$

$$R = u^4 + R_1(u^5, u^6), \tag{6}$$

$$R = R(u^4, u^5, u^6). \tag{7}$$

В равенстве (7) R нелинейно зависит от u^4.

С точки зрения преобразований эквивалентности в случае (4) можно считать, что $R = 0$. Это означает, что исходными являются уравнения Навье—Стокса, дополненные уравнениями тепло- и массопереноса. Их групповые свойства были изучены ранее, основные результаты приведены в [3]. Далее этот случай из рассмотрения исключается.

Для каждого из вариантов (5), (6), (7) в [2] были выписаны классифицирующие уравнения, которые являются дифференциальными в частных производных первого порядка. При их интегрировании появляются произвольные функции от первых интегралов. Групповая классификация в случаях (5)–(7) была проведена с точностью до этих произвольных функций без ограничения на их произвольность. Иначе говоря, были получены своего рода “ядра” алгебр Ли операторов, которые могут расширяться в зависимости от вида произвольных функций, входящих в представление классифицируемой функции $R(u^4, u^5, u^6)$. С целью получить полную классификацию уравнений (2) относительно функции R и входящих в нее параметров в [4] был полностью исследован случай (6), когда R линейно зависит от u^4. В настоящей работе предлагается продолжить уточнение функциональной зависимости в случае (5), когда R не зависит от u^4. При этом линейная зависимость (модель Обербека—Буссинеска) не рассматривается. Групповые свойства такой системы изучены в работах [3, 5, 6].

3. Групповая классификация системы (2) при $\boldsymbol{R = R(u^5, u^6)}$

Координаты инфинитезимального оператора $X = \xi^i\partial_{x^i} + \xi^4\partial_t + \eta^\alpha\partial_{u^\alpha}$, $i = \overline{1,3}$, $\alpha = \overline{1,6}$, в случае зависимости (5) запишутся как [2]

$$\begin{aligned}
&\xi^1 = C_4x^1 + C_1x^2 + h^1(t), && \xi^2 = -C_1x^1 + C_4x^2 + h^2(t),\\
&\xi^3 = C_4x^3 + h^3(t), && \xi^4 = 2C_4t + C_0,\\
&\eta^1 = -C_4u^1 + C_1u^2 + \frac{\partial h^1}{\partial t}, && \eta^2 = -C_1u^1 - C_4u^2 + \frac{\partial h^2}{\partial t},\\
&\eta^3 = -C_4u^3 + \frac{\partial h^3}{\partial t}, && \eta^4 = -2C_4u^4 - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 h^i}{\partial t^2}x^i + C_9x^3 + \varphi(t),\\
&\eta^5 = C_5u^5 + C_7, && \eta^6 = C_6u^6 + C_8,
\end{aligned}$$

а классифицирующее уравнение имеет вид

$$C_9 + 3C_4R + \frac{\partial R}{\partial u^5}\Big(C_5u^5 + C_7\Big) + \frac{\partial R}{\partial u^6}\Big(C_6u^6 + C_8\Big) = 0. \tag{8}$$

Здесь $C_0, ..., C_9$ — групповые постоянные, $h^i(t),\ i = 1, 2, 3,\ \varphi(t)$ — произвольные гладкие функции. Анализ уравнения (8) в предположении произвольности функции R дает

$$C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = C_9 = 0.$$

Поэтому базис ядра основной алгебры Ли состоит из операторов

$$X_0, \quad X_{12}, \quad H_i(h^i(t)) = h^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i} + h^i_t(t)\frac{\partial}{\partial u^i} - x^i h^i_{tt}(t)\frac{\partial}{\partial u^4}, \quad i = \overline{1,3},$$

$$H_0(\varphi(t)) = \varphi(t)\frac{\partial}{\partial u^4}. \tag{9}$$

Заметим, что кроме операторов, вошедших в (3), уравнениями (2) в случае, когда R зависит только от u^5, u^6, допускаются также операторы $H_i(h^i(t)),\ i = 1, 2, 3$, отражающие инвариантность системы (2) по отношению к преобразованиям, проявляющимся при переходе к произвольно движущейся системе координат, а также оператор $H_0(\varphi(t))$, учитывающий инвариантность относительно сдвигов давления.

При интегрировании классифицирующего уравнения (8) необходимо прежде всего рассмотреть случаи, когда R зависит только от u^5 или только от u^6. Поскольку уравнения (2) симметричны относительно u^5, u^6 и классифицирующее уравнение также симметрично относительно этих переменных, то приведем подробный анализ лишь для $R = R(u^5)$. Случай $R = R(u^6)$ исследуется аналогично. Для $R = R(u^5)$ уравнение (8) упрощается до вида

$$C_9 + 3C_4R + \frac{\partial R}{\partial u^5}\left(C_5u^5 + C_7\right) = 0. \tag{10}$$

Ядро операторов (9) дополнится операторами $C^1 = u^6\partial_{u^6},\ C^2 = \partial_{u^6}$, поэтому имеем следующий классификационный результат.

I. Если $R = (u^5)^\beta$ (при этом $\beta = 0,\ \beta = 1$ исключаются), то ядро расширяется оператором

$$\beta Z - 3T^1 = \beta\left(2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left(x^i\frac{\partial}{\partial x^i} - u^i\frac{\partial}{\partial u^i}\right) - 2u^4\frac{\partial}{\partial u^4}\right) - 3u^5\frac{\partial}{\partial u^5}.$$

II. Если $R = \ln(u^5)$, то система (2) допускает дополнительный оператор

$$T^1 - Y^1 = \frac{\partial}{\partial u^5} - x^3\frac{\partial}{\partial u^4}.$$

III. Если $R = e^{\delta u^5}$, $\delta = \pm 1$, то расширение группы, допускаемой системой (2), происходит за счет оператора

$$\delta Z - 3T^2 = \delta\left(2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left(x^i\frac{\partial}{\partial x^i} - u^i\frac{\partial}{\partial u^i}\right) - 2u^4\frac{\partial}{\partial u^4}\right) - 3\frac{\partial}{\partial u^5}.$$

Следует обратить внимание на то, что все три специализации классифицируемой функции получены при существенном использовании преобразований эквивалентности, соответствующих оператору эквивалентности, вычисленному в [2]. Приведем здесь только преобразования эквивалентности переменных, входящих в классифицирующее уравнение (8). Они даются формулами

$$\overline{u^5} = a_1 u^5 + a_2, \quad \overline{u^6} = a_3 u^6 + a_4, \quad \overline{R} = a_5 R + a_6 \tag{11}$$

с произвольными постоянными $a_i,\ i = \overline{1,6}$. Эти преобразования эквивалентности будут многократно использоваться и далее.

В общем случае функция R зависит от обеих переменных u^5, u^6 и удовлетворяет уравнению вида

$$\gamma_0 R + \frac{\partial R}{\partial u^5}\left(\gamma_1 u^5 + \gamma_2\right) + \frac{\partial R}{\partial u^6}\left(\gamma_3 u^6 + \gamma_4\right) + \gamma_5 = 0 \tag{12}$$

с некоторыми постоянными $\gamma_0, ..., \gamma_5$. В случае, когда одна из постоянных $\gamma_0,\ \gamma_1$ или γ_3 отлична от нуля, преобразование эквивалентности (11) позволяет полагать нулю соответственно $\gamma_5,\ \gamma_2$ или γ_4. Таким образом, при анализе (12) рассматриваются альтернативные возможности: все $\gamma_i,\ i = \overline{0,5}$, равны нулю или какие-то из них отличны от нуля.

Рассмотрим подробнее случай, когда $\gamma_0 \neq 0,\ \gamma_1 \neq 0,\ \gamma_3 = 0$. Согласно изложенному выше, считаем $\gamma_2 = \gamma_5 = 0$. Тогда равенство (12) перепишется в виде

$$\gamma_0 R + \gamma_1 u^5 \frac{\partial R}{\partial u^5} + \gamma_4 \frac{\partial R}{\partial u^6} = 0. \tag{13}$$

Используя преобразование эквивалентности растяжения по u^6, можно считать $\gamma_4 = 1$. Интегрирование (13) в этом случае дает

$$R = e^{-\gamma_0 u^6} f(u^5 e^{-\gamma_1 u^6})$$

с произвольной функцией f. Подставляя найденное R в (8), получим классифицирующее уравнение на f:

$$C_9 + (3C_4 - \gamma_0(C_6 u^6 + C_8))f +$$

$$+((C_5 - \gamma_1 C_8)u^5 e^{-\gamma_1 u^6} + C_7 e^{-\gamma_1 u^6} - \gamma_1 C_6 u^5 u^6 e^{-\gamma_1 u^6})f' = 0, \tag{14}$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу функции f, причем функция f должна быть отлична от нуля, иначе получим зависимость (4). Далее рассматриваются альтернативные возможности для f.

А. Если f — произвольная, отличная от нуля функция своего аргумента, то из (14) следует, что

$$C_6 = C_7 = C_9 = 0, \quad 3C_4 - \gamma_0 C_8 = 0, \quad C_5 - \gamma_1 C_8 = 0.$$

Основная алгебра (9) расширяется оператором

$$\gamma_0 Z + 3(C^2 + \gamma_1 T^1) = \gamma_0 \left(2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left(x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right) - 2u^4 \frac{\partial}{\partial u^4}\right) + 3\gamma_1 u^5 \frac{\partial}{\partial u^5} + 3\frac{\partial}{\partial u^6}.$$

Обозначим эту расширенную алгебру $L_* = \{L_0, \gamma_0 Z + 3(C^2 + \gamma_1 T^1)\}$.

B. Если $f = \text{const}$, то, используя преобразование эквивалентности растяжения для R, можно считать $f = 1$, тогда из (14) следует, что $C_6 = C_9 = 0$, $3C_4 - \gamma_0 C_8 = 0$, C_5, C_7 — произвольные. Основная алгебра L_* расширится операторами

$$T^1 = u^5\frac{\partial}{\partial u^5}, \quad T^2 = \frac{\partial}{\partial u^5}.$$

Если $f \neq \text{const}$, то из (14) видно, что $C_6 = C_7 = C_9 = 0$. Единственная классифицирующая возможность в таком случае есть следующая — C.

C. $f = (u^5 e^{-\gamma_1 u^6})^\gamma$, $\gamma \neq 0$. Такое представление для функции f дает дополнительный к L_* оператор

$$\gamma C^2 + (\gamma_0 + \gamma\gamma_1)T^1 = \gamma\frac{\partial}{\partial u^6} + (\gamma_0 + \gamma\gamma_1)u^5\frac{\partial}{\partial u^5}.$$

Следует заметить, что здесь функция $R = (u^5)^\gamma e^{(-\gamma_0 - \gamma\gamma_1)u^6}$, тогда с учетом преобразований эквивалентности для u^6 можно считать $-\gamma_0 - \gamma\gamma_1 = \delta = \pm 1$.

Таким образом, классификация относительно функции f в данном случае завершена. Отметим также, что в случае B получилась зависимость R только от u^6, о которой указывалось выше. Такие пересечения при составлении итоговой таблицы классификации были учтены и исключены.

Подобный анализ всех альтернативных возможностей для γ_i, $i = \overline{0,5}$, и последующее интегрирование уравнения (8) при существенном использовании преобразований эквивалентности (11) дает классификационный результат, представленный в таблице.

Групповая классификация относительно функции $R(u^5, u^6)^*$

№ п/п	R	Оператор
1	Произвольная	$L_0 = \{X_0, X_{12}, H_i(h^i(t)), H_0(\varphi(t))\}$
2	$R(u^5)$	$L_0^5 = \{L_0, C^1, C^2\}$
3	$(u^5)^\beta$	$L_0^5, 3T^1 - \beta Z$
4	$\ln(u^5)$	$L_0^5, T^1 - Y^1$
5	$e^{\delta u^5}$	$L_0^5, \delta Z - 3T^2$
6	$R(u^6)$	$L_0^6 = \{L_0, T^1, T^2\}$
7	$(u^6)^\beta$	$L_0^6, 3C^1 - \beta Z$
8	$\ln(u^6)$	$L_0^6, C^1 - Y^1$
9	$e^{\delta u^6}$	$L_0^6, \delta Z - 3C^2$
10	$(u^5)^{\gamma_1}(u^6)^{\gamma_2}$	$L_0, 3T^1 - \gamma_1 Z,\ 3C^1 - \gamma_2 Z$
11	$\ln[(u^5)^{\gamma_1}(u^6)^{\gamma_2}]$	$L_0, T^1 - \gamma_1 Y^1,\ C^1 - \gamma_2 Y^1$
12	$(u^5)^{\gamma_0} e^{\delta u^6}$	$L_0, 3T^1 - \gamma_0 Z,\ 3C^2 - \delta Z$
13	$(u^6)^{\gamma_0} e^{\delta u^5}$	$L_0, 3C^1 - \gamma_0 Z,\ 3T^2 - \delta Z$
14	$e^{\delta_1 u^5 + \delta_2 u^6}$	$L_0, 3C^2 - \delta_1 Z,\ 3T^2 - \delta_2 Z$
15	$u^5 + \gamma_0 \ln(u^6)$	$L_0, T^2 - Y^1,\ C^1 - \gamma_0 Y^1$
16	$u^6 + \gamma_0 \ln(u^5)$	$L_0, C^2 - Y^1,\ T^1 - \gamma_0 Y^1$
17	$u^5 + \delta_1 e^{\delta_2 u^6}$	$L_0, T^2 - Y^1,\ \delta_2 Z - 3(\delta_2 T^1 + C^2)$
18	$u^6 + \delta_1 e^{\delta_2 u^5}$	$L_0, C^2 - Y^1,\ \delta_2 Z - 3(\delta_2 C^1 + T^2)$
19	$u^5 + \delta(u^6)^\beta$	$L_0, T^2 - Y^1,\ \beta Z - 3(\beta T^1 + C^1)$
20	$u^6 + \delta(u^5)^\beta$	$L_0, C^2 - Y^1,\ \beta Z - 3(\beta C^1 + T^1)$

№ п/п	R	Оператор
21	$(u^5-u^6)^\beta$	$L_0, T^2+C^2,\ \beta Z-3(T^1+C^1)$
22	$(u^5)^{-\frac{\gamma_0}{2\gamma_1}}(u^6)^{-\frac{\gamma_0}{2\gamma_2}}g_1\big[(u^5)^{\gamma_2}(u^6)^{-\gamma_1}\big]$	$L_0, \gamma_0 Z+3(\gamma_1 T^1+\gamma_2 C^1)$
23	$g_3\big[(u^5)^{\gamma_2}(u^6)^{-\gamma_1}\big]$	$L_0, \gamma_2 C^1+\gamma_1 C^1$
24	$\ln\big[(u^5)^{\gamma_2}(u^6)^{\gamma_1}\big]+g_2\big[(u^5)^{\gamma_2}(u^6)^{-\gamma_1}\big]$	$L_0, \gamma_2 C^1+\gamma_1 T^1-2\gamma_1\gamma_2 Y^1$
25	$(u^5)^{\gamma_0}g_4(u^6)$	$L_0, 3T^1-\gamma_0 Z$
26	$(u^6)^{\gamma_0}g_4(u^5)$	$L_0, 3C^1-\gamma_0 Z$
27	$e^{-\gamma_0 u^6}g_1\big[u^5e^{-\gamma_1 u^6}\big]$	$L_0, \gamma_0 Z+3(C^2+\gamma_1 T^1)$
28	$e^{-\gamma_0 u^5}g_1\big[u^6e^{-\gamma_1 u^5}\big]$	$L_0, \gamma_0 Z+3(T^2+\gamma_1 C^1)$
29	$e^{\delta u^6}g_4(u^5)$	$L_0, \delta Z-3C^2$
30	$e^{\delta u^5}g_4(u^6)$	$L_0, \delta Z-3T^2$
31	$e^{-\frac{\delta_1u^5+\delta_2u^6}{2}}g_5\big(\delta_1u^5-\delta_2u^6\big)$	$L_0, \delta_1\delta_2 Z+3(\delta_2T^2+\delta_1C^2)$
32	$\ln(u^5)+g_6(u^6)$	L_0, T^1-Y^1
33	$\ln(u^6)+g_6(u^5)$	L_0, C^1-Y^1
34	$g_8\big(\delta u^5-\ln(u^6)\big)$	$L_0, \delta C^1+T^2$
35	$g_8\big(\delta u^6-\ln(u^5)\big)$	$L_0, \delta T^1+C^2$
36	$\delta u^5+\ln(u^6)+g_7\big[\delta u^5-\ln(u^6)\big]$	$L_0, \delta C^1+T^2-2\delta Y^1$
37	$\delta u^6+\ln(u^5)+g_7\big[\delta u^6-\ln(u^5)\big]$	$L_0, \delta T^1+C^2-2\delta Y^1$
38	$u^5+g_9(u^6)$	L_0, T^2-Y^1
39	$u^6+g_9(u^5)$	L_0, C^2-Y^1
40	$g_4\big(u^5-\delta u^6\big)$	$L_0, \delta T^2+C^2$
41	$\big(u^5+\delta u^6\big)+g_7\big(u^5-\delta u^6\big)$	$L_0, \delta T^2+C^2-2\delta Y^1$

*$\beta\neq 0,\neq 1, \gamma_{0,1,2}\neq 0$ — произвольные постоянные, $\delta=\pm1,\ \delta_{1,2}=\pm1$, все функции, входящие в таблицу, отличны от постоянной (в том числе нуля). При этом g_1 — произвольная, кроме степенной (в том числе линейной), g_2 — произвольная, кроме натурального логарифма, g_3 — произвольная, кроме степенной (в том числе линейной), а также натурального логарифма, g_4 — произвольная, кроме степенной (в том числе линейной), а также экспоненты, g_5 — произвольная, кроме экспоненты, g_6 — произвольная, кроме линейной, а также натурального логарифма, g_7 — произвольная, кроме линейной, g_8 — произвольная, кроме линейной, а также экспоненты, g_9 — произвольная, кроме степенной (в том числе линейной), натурального логарифма и экспоненты.

Обозначения операторов следующие:

$$X_0=\frac{\partial}{\partial t},\quad H_0=\varphi(t)\frac{\partial}{\partial u^4},\quad X_{12}=x^1\frac{\partial}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial}{\partial x^1}+u^1\frac{\partial}{\partial u^2}-u^2\frac{\partial}{\partial u^1},$$

$$H_i(h^i(t))=h^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}+h^i_t(t)\frac{\partial}{\partial u^i}-x^ih^i_{tt}(t)\frac{\partial}{\partial u^4},\quad i=1,2,3,$$

$$Z=2t\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\left(x^i\frac{\partial}{\partial x^i}-u^i\frac{\partial}{\partial u^i}\right)-2u^4\frac{\partial}{\partial u^4},$$

$$Y^1=x^3\frac{\partial}{\partial u^4},\quad T^1=u^5\frac{\partial}{\partial u^5},\quad T^2=\frac{\partial}{\partial u^5},\quad C^1=u^6\frac{\partial}{\partial u^6},\quad C^2=\frac{\partial}{\partial u^6}.$$

4. Инвариантные решения

В данной работе не ставится цель изучения и систематического анализа всего класса инвариантных решений системы (2). Укажем лишь некоторые из них, которые могут быть построены на соответствующих подалгебрах операторов для конкретных значений функции R. Напомним, что физические характеристики течения выражаются через инвариантные функции в виде

$$Rg \to R, \quad p = \rho_0 u^4, \quad \theta = \frac{\chi - D}{\alpha D} u^5, \quad c = u^5 + u^6.$$

Пример 1. Выберем следующие базисные операторы подалгебры из ядра основной алгебры Ли:

$$H_1(1) = \partial_{x^1}, \quad H_2(1) = \partial_{x^2}.$$

В этом случае функция $R(u^5, u^6)$ остается произвольной. Решение ищем в виде

$$u^i = u^i(t, x^3), \quad i = \overline{1,6}.$$

После подстановки данного представления в (2) получается фактор-система

$$\begin{aligned} &u_t^1 + u^3 u_{x^3}^1 = \nu u_{x^3x^3}^1, \quad u_t^2 + u^3 u_{x^3}^2 = \nu u_{x^3x^3}^2, \\ &u_t^3 + u^3 u_{x^3}^3 + u_{x^3}^4 = \nu u_{x^3x^3}^3 - R(u^5, u^6), \quad u_{x^3}^3 = 0, \\ &u_t^5 + u^3 u_{x^3}^5 = \chi u_{x^3x^3}^5, \quad u_t^6 + u^3 u_{x^3}^6 = D u_{x^3x^3}^6. \end{aligned} \tag{15}$$

Из четвертого уравнения системы (15) получаем $u^3 = w_0(t)$, и после замены переменных по формуле $\xi = x^3 - \int w_0(t)dt$ фактор-система (15) запишется как

$$u_t^1 = \nu u_{\xi\xi}^1, \quad u_t^2 = \nu u_{\xi\xi}^2, \quad u_\xi^4 = -w_{0_t} - R(u^5, u^6), \quad u_t^5 = \chi u_{\xi\xi}^5, \quad u_t^6 = D u_{\xi\xi}^6.$$

Здесь уравнения компонент скорости, а также переменных u^5, u^6 имеют одинаковую дифференциальную структуру и интегрируются для конкретных краевых задач. Функция u^4 выражается из третьего уравнения системы при каждой конкретной функции $R(u^5, u^6)$.

Пример 2. Для $R = R(u^6)$ (см. таблицу, № 6) допускается подгруппа с оператором $< \partial/\partial x^3 + A\partial/\partial u^5 - \varphi(t)\partial/\partial u^4 >$, здесь $A = \mathrm{const}$. Решение следует искать в виде

$$\begin{aligned} &u^i = u^i(t, x^1, x^2), \quad i = \overline{1,3}, \quad u^4 = -\varphi(t)x^3 + q(t, x^1, x^2), \\ &u^5 = Ax^3 + T(t, x^1, x^2), \quad u^6 = u^6(t, x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \tag{16}$$

Система (2) редуцируется к следующей:

$$\begin{aligned} &u_t^1 + u^1 u_{x^1}^1 + u^2 u_{x^2}^1 + q_{x^1} = \nu(u_{x^1x^1}^1 + u_{x^2x^2}^1), \\ &u_t^2 + u^1 u_{x^1}^2 + u^2 u_{x^2}^2 + q_{x^2} = \nu(u_{x^1x^1}^2 + u_{x^2x^2}^2), \\ &u_t^3 + u^1 u_{x^1}^3 + u^2 u_{x^2}^3 - \varphi = \nu(u_{x^1x^1}^3 + u_{x^2x^2}^3) - R(u^6), \\ &u_{x^1}^1 + u_{x^2}^2 = 0, \\ &T_t + u^1 T_{x^1} + u^2 T_{x^2} + u^3 A = \chi(T_{x^1x^1} + T_{x^2x^2}), \\ &u_t^6 + u^1 u_{x^1}^6 + u^2 u_{x^2}^6 + u^3 u_{x^3}^6 = D(u_{x^1x^1}^6 + u_{x^2x^2}^6 + u_{x^3x^3}^6). \end{aligned} \tag{17}$$

Первые два уравнения (17) представляют собой двумерную систему Навье—Стокса. В частности, она имеет решение $u^1 = u^2 = 0,\ q = \text{const}$. В этом случае представление (16) можно интерпретировать как одномерное движение бинарной смеси в плоском слое под действием нестационарного градиента давления и силы плавучести, зависящей от u^6. При этом переменные $u^5,\ u^6$, а значит и поля температур и концентраций, зависят от всех переменных. Без учета эффекта термодиффузии подобная задача была решена в работе [7]. Заметим, что и для функции $R(u^5)$ (см. таблицу, № 2) можно рассматривать решение, аналогичное (16), где функция u^6 будет линейной по переменной x^3.

Пример 3. Для функции R, произвольно зависящей от $u^5,\ u^6$, построим решение, инвариантное относительно операторов, входящих в ядро L_0: $H_1(t),\ H_2(1)$. Тогда $u^1 = x^1/t + U(t, x^3),\ u^i = u^i(t, x^3),\ i = \overline{2,6}$. В этом случае фактор-система имеет вид

$$\begin{gathered} U_t + \frac{1}{t}U + u^3 U_{x^3} = \nu U_{x^3x^3}, \quad u^2_t + u^3 u^2_{x^3} = \nu u^2_{x^3x^3}, \\ u^3_t + u^3 u^3_{x^3} + u^4_{x^3} = \nu u^3_{x^3x^3} - R(u^5, u^6), \quad u^3_{x^3} + \frac{1}{t} = 0, \\ u^5_t + u^3 u^5_{x^3} = \chi u^5_{x^3x^3}, \quad u^6_t + u^3 u^6_{x^3} = D u^6_{x^3x^3}. \end{gathered} \tag{18}$$

Функции, входящие в (18), зависят только от двух переменных; из четвертого уравнения (18) легко получается представление для u^3, остальные уравнения фактор-системы также интегрируются в квадратурах.

Это лишь самые простые примеры инвариантных решений. Исходя из представлений классифицируемой функции и допускаемых системой (2) операторов при различных спецификациях функции R можно строить очень много других инвариантных и частично-инвариантных решений системы функции (2). Работа в данном направлении будет продолжена.

Следует отметить, что при интерпретации найденных решений рассматриваются различные постановки задач [8]. Например, движение между двумя плоскими стенками со свободной границей или с границей раздела.

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[2] Родионов А.А., Степанова И.В. Групповая классификация уравнений модели конвекции с учетом сил плавучести // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 5. С. 61–69.

[3] Рыжков И.И., Андреев В.К. Групповая классификация и точные решения уравнений термодиффузии // Диф. уравнения. 2005. Т. 41, № 4. С. 508–517.

[4] Степанова И.В. Групповая классификация и точные решения уравнений двух моделей гидродинамики: Дис. ...канд. физ.-мат. наук. Красноярск, ИВМ СО РАН, 2008.

[5] Андреев В.К. Об инвариантных решениях уравнений термодиффузии // Тр. III Международной конф. “Симметрия и дифференциальные уравнения”. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2002. С. 13–17.

[6] Андреев В.К., Рыжков И.И. Групповые свойства уравнений термодиффузии в плоском случае // Материалы Всероссийской молодежной научной школы-конф. “Чеботаревские чтения по проблемам современного группового анализа и его приложений в нелинейной механике”. Казань, 2004. С. 11–18.

[7] Андреев В.К. Эволюция совместного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием нестационарного перепада давления // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 4. С. 94–107.

[8] Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: ВО “Наука”, 1994. 319 с.

Поступила в редакцию 10 августа 2009 г.