

О возникновении движения в конечном цилиндре*

Е. П. МАГДЕНКО

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

e-mail: magdenko_evgeniy@icm.krasn.ru

Рассмотрена задача о возникновении конвекции в цилиндрическом контейнере. Для её решения применён метод разделения переменных. В результате получено однородное дифференциальное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами со сложными граничными условиями. Для случая монотонного возмущения получено аналитическое выражение для критических чисел Марангони. Рассмотрен случай, когда система находится в состоянии невесомости, для которого доказано, что с увеличением радиуса цилиндра критические числа Марангони стремятся к известным числам Марангони для бесконечного слоя.

Ключевые слова: критические числа Марангони, метод разделения переменных, свободная граница, конвекция.

1. Постановка задачи

Пусть цилиндрический контейнер заполнен покоящейся жидкостью с верхней свободной деформируемой границей, на которой задан теплообмен с окружающей средой. Обозначим через $\Omega = (0, a) \times (0, 2\pi) \times (-h, 0)$ область, занимаемую жидкостью (рис. 1).

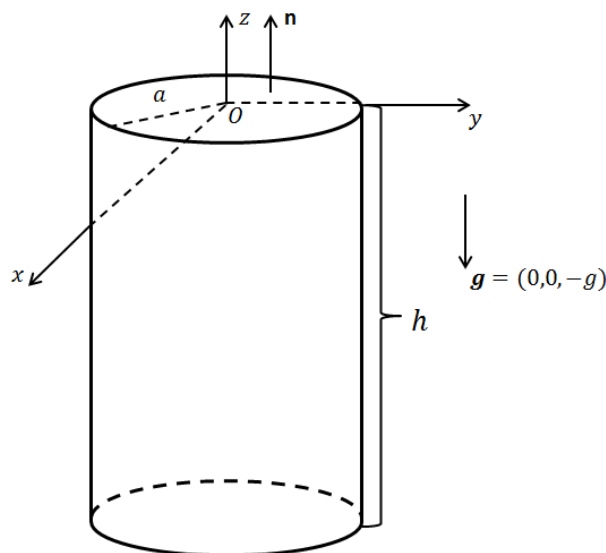


Рис. 1. Схема области конвекции

*Работа выполнена при поддержке Интеграционного проекта СО РАН № 38 и проекта РФФИ № 11-01-00283.

Равновесное состояние системы в рамках модели Обербека — Буссинеска описывается уравнениями [1]

$$\mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$p_z = \rho_0 g \beta \Theta, \quad (2)$$

$$\Theta = Az + B, \quad (3)$$

где \mathbf{u} — вектор скорости; p — отклонение давления от гидростатического; ρ_0 — плотность, β — коэффициент теплового расширения, Θ — температура жидкости; A , B — температурные коэффициенты, которые находятся из условия на нижнем основании контейнера и условия теплового контакта на свободной границе:

$$A = \frac{\text{Bi}(\Theta_{01} - \Theta_{02})}{(1 + \text{Bi})h}, \quad B = \frac{\Theta_{01} + \text{Bi}\Theta_{02}}{1 + \text{Bi}}, \quad (4)$$

здесь $\text{Bi} = \gamma h/k$ — число Био, γ — коэффициент межфазного теплообмена, Θ_{01} и Θ_{02} — температура на нижнем и верхнем основании соответственно. Поверхностное натяжение линейно зависит от температуры, а свободная граница является плоской (круг). Давление квадратично зависит от z и имеет вид

$$p = \rho_0 g \beta \left(\frac{A}{2} z^2 + Bz \right) + c, \quad c = \text{const.}$$

2. Возмущённое решение

При некоторой критической разности температур на основаниях цилиндра $\Theta_{01} - \Theta_{02}$ возникает движение — конвекция. С целью определения этой разности рассматривается линеаризованная на равновесном состоянии задача (1)–(4) о малых возмущениях системы в рамках модели Обербека — Буссинеска, решение которой находится в виде нормальных волн

$$(\mathbf{U}, P, T, R) = (\mathbf{U}(r, z), P(r, z), T(r, z), N) \exp[i(s\varphi - Ct)], \quad (5)$$

где \mathbf{U} , P , T — возмущения основного решения \mathbf{u} , p и Θ ; R — нормальная составляющая вектора возмущений на свободной границе; N — отклонение амплитуды возмущений свободной границы по нормали; s — азимутальное волновое число; C — комплексный декремент. Тогда для осесимметричного случая ($s = 0$) монотонных возмущений ($C = 0$) в безразмерных переменных (в качестве масштаба длины, времени, скорости, давления и температуры выбраны соответственно h , h^2/ν , ν/h , $\rho_0 \nu^2/h^2$, Ah) задача (1)–(4) описывается уравнениями ($\mathbf{U} = (U, 0, W)$)

$$P_r = \left(U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + U_{zz} - \frac{U}{r^2} \right), \quad (6)$$

$$P_z - GT = \left(W_{rr} + \frac{1}{r} W_r + W_{zz} \right), \quad (7)$$

$$U_r + \frac{U}{r} + W_z = 0, \quad (8)$$

$$W = \frac{1}{\text{Pr}} \left(T_{rr} + \frac{1}{r} T_r + T_{zz} \right), \quad (9)$$

где $G = g\beta Ah^4/\nu^2$ — число Грасгофа, $Pr = \nu/\chi$ — число Прандтля. На свободной границе выполняются следующие условия [1]:

$$-P + 2\frac{\partial W}{\partial z} = (G' + Ga) + We \left(N_{rr} + \frac{1}{r}N_r \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{M}{Pr} (N_r + T_r), \quad (11)$$

$$T_z + Bi (T + N) = 0, \quad (12)$$

$$W = 0, \quad (13)$$

здесь $G' = g\beta Bh^3/\nu^2$ — число Грасгофа; $Ga = gh^3/\nu^3$ — число Галилея; $We = \sigma h/\rho_0\nu^2$ — число Вебера; $M = \alpha Ah^2/\rho_0\nu\chi$ — число Марангони (заметим, что в силу (4) оно прямо пропорционально искомой разности температур на нижнем и верхнем основаниях цилиндра). Условия на нижнем основании дают

$$U(r, -1) = W(r, -1) = 0, \quad T(r, -1) = 0. \quad (14)$$

На боковой поверхности выполняются следующие условия

$$U\left(\frac{1}{\alpha}, z\right) \neq 0, \quad W\left(\frac{1}{\alpha}, z\right) = 0, \quad T\left(\frac{1}{\alpha}, z\right) = 0,$$

т. е. жидкость может просачиваться по нормали к стенке, при этом её общий поток через всю боковую поверхность равен нулю.

Задача (6)–(14) допускает разделение переменных:

$$U = \frac{1}{r}R(r)F_z(z), \quad (15)$$

$$W = -\frac{1}{r}R_r(r)F(z), \quad (16)$$

$$T = \frac{1}{r}R_r(r)D(z), \quad (17)$$

где

$$R = R_n(r) = rJ_1(mr), \quad (18)$$

здесь $m = \alpha\delta_n = h\delta_n/a$, $\delta_n, n = 1, 2, \dots$, — решение уравнения

$$J_0(\delta) = 0, \quad (19)$$

первые корни которого равны [2] $\delta_1 = 2.4048255577$, $\delta_2 = 5.5200781103$, $\delta_3 = 8.6537279129$, $\delta_4 = 11.7915344391$, $\delta_5 = 14.9309177086$. В общем случае $\delta_n^{(0)} \approx n\pi + 3\pi/4$ при $n \rightarrow \infty$. Из (18), (19) выводим равенство $R_{nr}(a) = 0$. Таким образом, условия на боковой поверхности для возмущения температуры и касательной скорости заведомо выполнены. Заметим также, что согласно (15)–(17) величина N пропорциональна $r^{-1}R_r(r)$, т. е.

$$N = N_0 r^{-1} R_r(r) \equiv m N_0 J_0(m), \quad N_0 = \text{const.}$$

Подстановка выражений (15)–(17) в уравнения (6)–(9) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению шестого порядка

$$\frac{1}{Pr} L^3 D - m^2 G D = 0, \quad (20)$$

где $L = d^2/dz^2 - m^2$. Функция $F(z)$ вычисляется из уравнения

$$F(z) = -\frac{1}{\text{Pr}}LD. \quad (21)$$

В результате функция D определяется с точностью до шести постоянных, которые находятся из семи граничных условий (N_0 входит в число неизвестных постоянных) (10)–(14).

3. Зависимость числа Марангони от геометрии контейнера и физических параметров жидкости

Решение уравнения (20) выглядит следующим образом:

$$D = \frac{H_1}{8m^3} \frac{2m(\cosh \lambda_1 z - \cos \lambda_3 z \cosh \lambda_2 z) - \lambda_3 \sin \lambda_3 z \sinh \lambda_2 z}{\lambda_3^2} +$$

$$+ \frac{H_2}{8m^3} \frac{2m(\sinh \lambda_1 z - \cos \lambda_3 z \sinh \lambda_2 z) - \lambda_3 \sin \lambda_3 z \cosh \lambda_2 z}{\lambda_3^2} +$$

$$+ \frac{H_3}{2m} \frac{\sin \lambda_3 z \sinh \lambda_2 z}{\lambda_3} + \frac{H_4}{2m} \frac{\sin \lambda_3 z \cosh \lambda_2 z}{\lambda_3} + H_5 \cosh \lambda_1 z + H_6 \sinh \lambda_1 z,$$

где

$$\lambda_1 = m(1+b)^{1/2},$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}m \left[1 - \frac{b}{2} + ((1-b)^2 + b)^{1/2} \right]^{1/2},$$

$$\lambda_3 = \frac{mb\sqrt{6}}{4 \left[1 - \frac{b}{2} + ((1-b)^2 + b)^{1/2} \right]^{1/2}},$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{\text{PrG}}{m^4}},$$

а H_i , $i = 1, \dots, 6$, — неизвестные постоянные. Формула для функции F имеет более громоздкий вид и поэтому в статье не приводится. Подставляя найденное решение в условия (10)–(14), получим систему уравнений, которая будет однородной относительно постоянных H_i , $i = 1, \dots, 6$. Нетривиальное решение существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю. Это даёт возможность найти критические числа Марангони путём аналитических вычислений в системе Maple, показывающих, что числа Марангони зависят от геометрии контейнера и физических параметров жидкости. Данная зависимость, а также асимптотические формулы имеют слишком громоздкий вид и поэтому также не приводятся.

При получении асимптотических оценок были использованы следующие выражения:

— при $m \rightarrow 0$ (физически это означает, что рассматривается плоский слой, т. е. $a \rightarrow \infty$)

$$\lambda_1 \sim \text{Pr}^{1/6} \text{G}^{1/6} m^{1/3} + \frac{1}{2} \frac{m^{5/3}}{\text{Pr}^{1/6} \text{G}^{1/6}},$$

$$\lambda_2 \sim -\frac{1}{2}\text{Pr}^{1/6}\text{G}^{1/6}m^{1/3} - \frac{1}{4}\frac{m^{5/3}}{\text{Pr}^{1/6}\text{G}^{1/6}},$$

$$\lambda_3 \sim -\frac{\sqrt{3}}{2}\text{Pr}^{1/6}\text{G}^{1/6}m^{1/3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{m^{5/3}}{\text{Pr}^{1/6}\text{G}^{1/6}},$$

$$\sin x \sim x, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \sinh x \sim x + \frac{x^3}{6}, \quad \cosh x \sim 1 + \frac{x^2}{2};$$

— при $m \rightarrow \infty$ (в данном случае либо $n \rightarrow \infty$, либо радиус цилиндра слишком мал). Здесь $\sinh x \sim e^x/2$, $\cosh x \sim e^x/2$.

Теперь рассмотрим конкретную заполняющую сосуд жидкость — трансформаторное масло. Физические параметры таковы: $\rho_0 = 0.86 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 18.49 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\chi = 1.21 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $k = 0.63519 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}/(\text{с}^3 \cdot \text{К})$, $\beta = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, $\alpha = 0.0022 \text{ Н}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\sigma = 3.81 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$.

На рис. 2 приведены графики зависимости числа Марангони от $m = \delta_n h/a$ при $1 \leq m \leq 10$, $\text{We} = 10^4$, $\text{Bi} = 2$. Физически это означает следующее. Например, в точке $(1.92674905565, 3.203963483 \cdot 10^5)$ график функции достигает своего минимума, и если принять $n = 1$, т.е. $\delta_1 = 2.4048255577$, то исходя из формул для m и M получится, что при таком отношении высоты слоя жидкости к радиусу цилиндра, а именно, $h/a = 0.8012011722$, критическая разность температур $\Theta_{01} - \Theta_{02} = 27.23325641 \text{ К}$. При $n = 5$ ($\delta_5 = 14.9309177086$) данная разность температур будет достигнута уже при $h/a = 0.1290442485$.

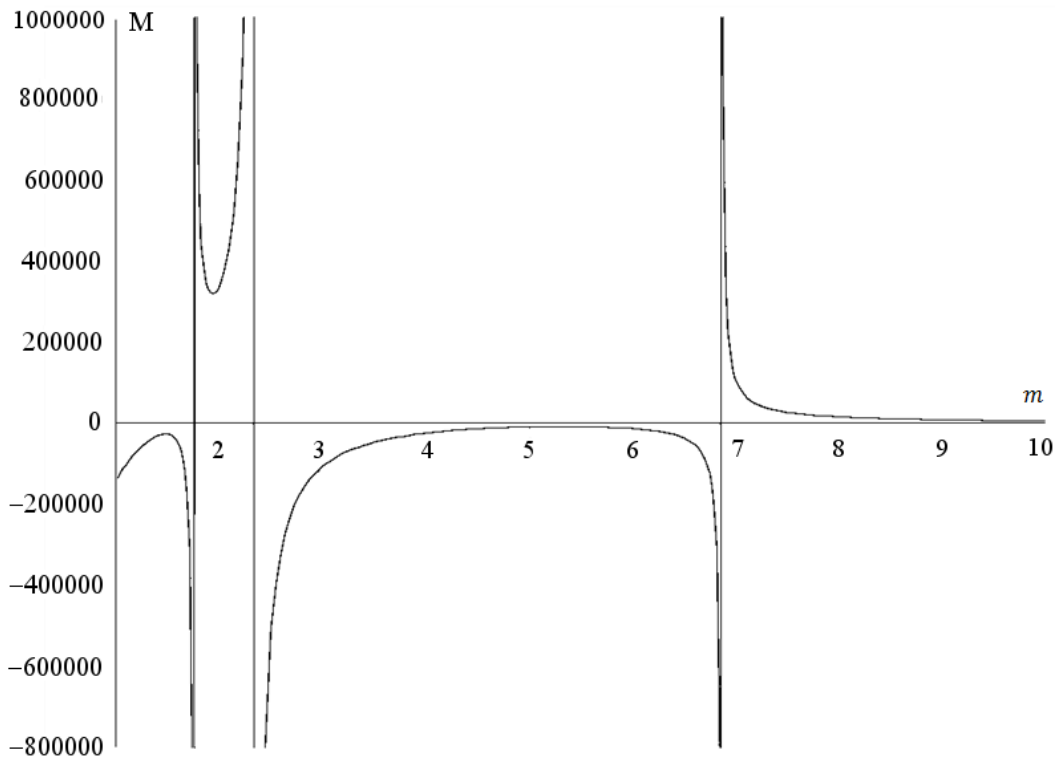


Рис. 2. Графики зависимости числа Марангони от m при $\text{We} = 10^4$ и $\text{Bi} = 2$

Случай невесомости. Предположим, что $g = 0$. Тогда решение уравнения (20) будет следующим:

$$D = \left(\frac{H_1}{8m^2} z^2 + \frac{1}{2m} \left(H_4 - \frac{H_2}{4m^2} \right) z + H_5 \right) \cosh mz + \left(\frac{H_2}{8m^2} z^2 + \frac{1}{2m} \left(H_3 - \frac{H_1}{4m^2} \right) z + H_6 \right) \sinh mz, \quad (22)$$

где H_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, — некоторые неизвестные постоянные. Теперь функция F из (21) примет вид

$$F = -\frac{1}{\text{Pr}} \left[\left(\frac{H_2}{2m} z + H_3 \right) \cosh mz + \left(\frac{H_1}{2m} z + H_4 \right) \sinh mz \right]. \quad (23)$$

Используя условия на свободной границе, с учётом (22), (23) получим:

— динамическое условие $3m^2 F_z - F_{zzz} = m^4 \text{We} N_0$ —

$$H_4 + m \text{WePr} N_0 = 0; \quad (24)$$

— условие касательных напряжений $m^2 F + F_{zz} = m^2 \frac{M}{\text{Pr}} (N_0 + D)$ —

$$H_1 + 2m^2 H_3 - m^2 M H_5 - m^2 M N_0 = 0; \quad (25)$$

— условие теплового контакта $D_z + \text{Bi} (D + N_0) = 0$ —

$$-\frac{1}{8m^3} H_2 + \frac{1}{2m} H_4 + \text{Bi} H_5 + m H_6 + \text{Bi} N_0 = 0; \quad (26)$$

— кинематическое условие $F = 0$ —

$$H_3 = 0. \quad (27)$$

Граничные условия на нижнем основании цилиндра для скоростей и температуры $F(-1) = F_z(-1) = 0$, $D(-1) = 0$ примут вид

$$\frac{H_1}{2m} \sinh m - \frac{H_2}{2m} \cosh m + H_3 \cosh m - H_4 \sinh m = 0, \quad (28)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cosh m + \frac{\sinh m}{m} \right) H_1 + \frac{1}{2} \left(\sinh m + \frac{\cosh m}{m} \right) H_2 - m H_3 \sin m + m H_{14} \cos m = 0, \quad (29)$$

$$\frac{1}{8m^2} \left(\cosh m - \frac{\sinh m}{m} \right) H_1 + \frac{1}{8m^2} \left(\frac{1}{m} \cosh m - \sinh m \right) H_2 + \frac{H_3}{2m} \sinh m - \frac{H_4}{2m} \cosh m + H_5 \cosh m - H_6 \sinh m = 0. \quad (30)$$

Система, полученная из условий (24)–(30), будет являться алгебраической относительно постоянных. Нетривиальное решение системы уравнений существует тогда и только тогда, когда её определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Это даёт возможность найти критические числа Марангони. Аналитические вычисления в системе Maple показывают, что

$$M = \frac{8m (\text{Bi} \sinh m + m \cosh m) (m - \sinh m \cosh m)}{m^3 \cosh m - \sinh^3 m - 8m^3 \cosh m (\text{PrWe})^{-1}}. \quad (31)$$

Замечание. Если $a \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ таким образом, что $m = h\delta_n/a \rightarrow m_0 = \text{const}$, то выражение (31) в точности совпадает с числом Марангони для бесконечного слоя [3].

Для (31) найдены следующие асимптотические формулы:

– при $m_0 \rightarrow \infty$ ($\sinh m \sim e^{m_0}/2$, $\cosh m \sim e^{m_0}/2$)

$$M \sim 8m_0(m_0 + \text{Bi}); \quad (32)$$

– при $m_0 \rightarrow 0$ ($\sinh m \sim m_0 + m_0^3/6$, $\cosh m \sim 1 + m_0^2/2$)

$$M \sim \frac{2}{3} \text{PrWe} (\text{Bi} + 1) m_0^2; \quad (33)$$

– в случае недеформируемой свободной поверхности

$$M \sim \frac{64 (\text{Bi} + 1)}{m_0^2}. \quad (34)$$

Далее, как и для $g \neq 0$, рассмотрим конкретную жидкость, заполняющую цилиндрический контейнер, — трансформаторное масло, физические параметры которого приведены выше. Графики зависимости критического числа Марангони от числа m_0 для этого случая представлены на рис. 3. Анализируя полученные графики и используя

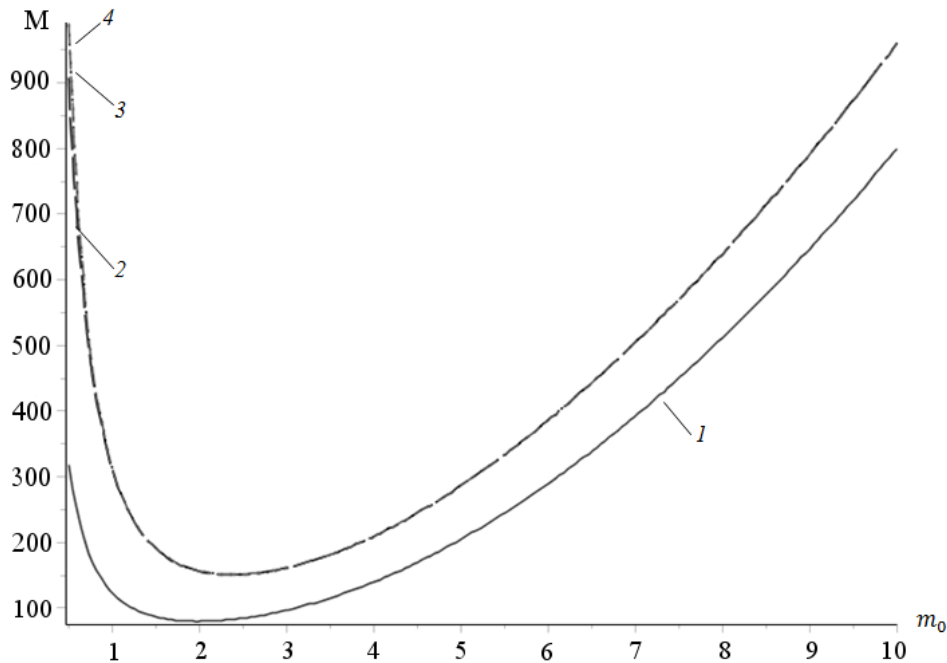


Рис. 3. Графики зависимости критического числа Марангони от m_0 : 1 — $\text{We} = 10^4$, $\text{Bi} = 0$, 2 — $\text{We} = 10^4$, $\text{Bi} = 2$, 3 — $\text{We} = 10^7$, $\text{Bi} = 2$, 4 — $\text{We} = \infty$, $\text{Bi} = 2$

формулы для числа Марангони при m_0 для случая $n = 1$, получим следующую зависимость критической разности температур от чисел Вебера и Био:

	Кривая 1	Кривая 2	Кривая 3	Кривая 4
Точка				
минимума	(1.99, 79.534)	(2.4, 150.614)	(2.4, 150.6844121)	(2.4, 150.6844822)
h/a	0.8275	0.998	0.998	0.998
$\Theta_{01} - \Theta_{02}$	0.0007 К	0.001317235403 К	0.00131785121 К	0.001317851824 К

Таким образом, полученные данные позволяют сделать вывод: зная заранее геометрию контейнера и физические параметры находящейся в нём жидкости, можно определить критическую разность температур, при которой в цилиндрическом контейнере возникнет конвекция.

Автор выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук, профессору В.К. Андрееву за постановку задачи и ценные советы при проведении настоящего исследования.

Список литературы

- [1] АНДРЕЕВ В.К., ЗАХВАТАЕВ В.Е., РЯБИЦКИЙ Е.А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000. 31 с.
- [2] АБРАМОВИЦА М., СТИГАН И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.
- [3] РЯБИЦКИЙ Е.А. Колебательная термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя в присутствии поверхностно-активного вещества // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 1. С. 6–10.

*Поступила в редакцию 14 августа 2013 г.,
с доработки — 23 сентября 2013 г.*