

## Идентификация параметров дискретных стохастических систем методом обратных итераций

А. А. ЛОМОВ

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Контактный автор: Ломов Андрей А., e-mail: lomov@math.nsc.ru

Поступила 10 марта 2020 г., доработана 26 марта 2020 г., принята в печать 16 апреля 2020 г.

Получены условия глобальной сходимости алгоритмов, основанных на обратных итерациях в переменной метрике, в задаче идентификации параметров дискретной стохастической системы с возмущениями в невязке уравнения и наблюдениях процессов. Доказана сходимость оценок параметров к истинному значению при увеличении объема выборки наблюдений истинного процесса. Приведены примеры расчетов.

*Ключевые слова:* дискретные стохастические системы, идентификация параметров, обратные итерации, состоятельность.

*Цитирование:* Ломов А.А. Идентификация параметров дискретных стохастических систем методом обратных итераций. Вычислительные технологии. 2020; 25(3):66–76.

### Введение

Будем рассматривать дискретные стохастические системы

$$\begin{cases} \mathbf{s}[k+1] = \Phi(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}[k] + \Psi(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}[k] + \Lambda\mathbf{e}[k], \\ \mathbf{y}[k] = \Upsilon\mathbf{s}[k], \quad \mathbf{z}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}[k] \\ \mathbf{u}[k] \end{bmatrix}, \\ \check{\mathbf{z}}[k] = \mathbf{z}[k] + \boldsymbol{\eta}[k], \quad k \in \overline{1, N}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{s}[k] \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния;  $\mathbf{u}[k] \in \mathbb{R}^m$  — входные переменные;  $\mathbf{z}[k] \in \mathbb{R}^{r+m}$  — наблюдаемые переменные входа  $\mathbf{u}[k]$  и выхода  $\mathbf{y}[k]$ ;  $\boldsymbol{\eta}[k] \in \mathbb{R}^{r+m}$ ,  $\mathbf{e}[k] \in \mathbb{R}^l$  — независимые случайные возмущения соответственно в наблюдениях и невязке уравнения с нулевыми математическими ожиданиями  $M\boldsymbol{\eta}[k] = \mathbf{0}$ ,  $M\mathbf{e}[k] = \mathbf{0}$  и конечными матрицами вторых моментов  $M\boldsymbol{\eta}[i]\boldsymbol{\eta}[k]^\top = \sigma^2\mathbf{I}_{r+m}\delta_{ik}$ ,  $M\mathbf{e}[i]\mathbf{e}[k]^\top = \mathbf{I}_l\delta_{ik}$ . Матрицы  $\Phi(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Psi(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  аффинно зависят от векторного параметра  $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1 \dots \boldsymbol{\theta}_v]^\top \in \mathbb{R}^v$ ,  $v \leq n^2 + nm$ :

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}) = \Phi_0 + \Phi_1\boldsymbol{\theta}_1 + \dots + \Phi_v\boldsymbol{\theta}_v, \quad \Psi(\boldsymbol{\theta}) = \Psi_0 + \Psi_1\boldsymbol{\theta}_1 + \dots + \Psi_v\boldsymbol{\theta}_v. \quad (2)$$

На параметризацию (2) накладывается единственное условие однозначной вычислимости параметра  $\boldsymbol{\theta}$  по элементам пары матриц  $[\Phi(\boldsymbol{\theta}), \Psi(\boldsymbol{\theta})]$ , т. е. взаимной однозначности отображения  $[\Phi(\boldsymbol{\theta}), \Psi(\boldsymbol{\theta})] \leftrightarrow \boldsymbol{\theta}$ . Матрицы  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times l}$  и  $\Upsilon \in \mathbb{R}^{r \times n}$  фиксированы.

Для систем (1) широко известны задачи типа калмановской фильтрации рекуррентного вычисления переменных входа-выхода  $\mathbf{z}[k]$  по зашумленным наблюдениям  $\check{\mathbf{z}}[k]$ . С ними тесно связаны задачи вычисления (идентификации) параметров  $\boldsymbol{\theta}$ , при которых фильтр становится оптимальным по критерию наименьших квадратов или максимального правдоподобия [1], например с точки зрения ошибки прогноза/фильтрации  $\|\check{\mathbf{z}}[k] - \mathbf{z}[k]\|$ , а также задачи выбора оптимального плана эксперимента  $\mathbf{u}[k]$  [2, 3]. При этом для итеративного вычисления  $\boldsymbol{\theta}$  используются преимущественно универсальные алгоритмы, основанные на рекурсиях градиента и матрицы вторых производных целевой функции [1–3]. Главной проблемой подобного рода алгоритмов является, как правило, небольшой радиус сходимости, вызванный сложностью изоповерхностей целевых функций максимального правдоподобия при идентификации динамических систем [4, 5].

В статье исследуется возможность применения для идентификации параметров  $\boldsymbol{\theta}$  специализированных алгоритмов, основанных на так называемых обратных итерациях в переменной метрике (термин не является устоявшимся) [5–8]. Особенностью подобного рода итераций является малая зависимость от начального приближения [5], вплоть до глобальной сходимости почти всюду при малых нормах возмущений  $\|\check{\mathbf{z}}[k] - \mathbf{z}[k]\|$  [8]. Для использования алгоритмов обратных итераций мы в некоторой степени сужаем класс систем (1) по сравнению с работами [1–3].

## 1. Исследуемые системы

Ограничимся двумя видами систем (1).

Вид I:  $r = n$ ,  $\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{I}_n$ .

Вид II (каноническая наблюдаемая форма):  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $l = 1$ ,

$$\boldsymbol{\Upsilon} = [0 \ \dots \ 0 \ 1], \quad \boldsymbol{\Lambda} = [\lambda_e \ 0 \ \dots \ 0]^\top,$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \alpha_i = \alpha_i(\boldsymbol{\theta}), \quad \beta_i = \beta_i(\boldsymbol{\theta}).$$

Оба вида систем по построению наблюдаемы. При этом условие управляемости на пары  $[\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}]$ ,  $[\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Lambda}]$  не налагается. Многомерный вариант канонической наблюдаемой формы вида II ( $r > 1$ ,  $m > 1$ ) также возможен, но для простоты изложения не рассматривается.

Выбор вида систем I, II обусловлен тем, что обе они равносильны системам порядка  $p \leq n$  без переменных состояния:

$$\gamma_p \mathbf{z}[k+p] + \gamma_{p-1} \mathbf{z}[k+p-1] + \dots + \gamma_0 \mathbf{z}[k] = \gamma_e \mathbf{e}[k] \doteq \mathbf{w}[k], \quad k = \overline{1, N-p}, \quad (3)$$

$$\check{\mathbf{z}}[i] = \mathbf{z}[i] + \boldsymbol{\eta}[i], \quad i = \overline{1, N}.$$

Вид I:  $p = 1$ ,  $\gamma_1 \doteq [\mathbf{I}_n \ 0]$ ,  $\gamma_0 \doteq -[\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}) \ \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta})]$ ,  $\gamma_e = \boldsymbol{\Lambda}$ .

Вид II:  $p = n$ ,  $\gamma_p \doteq [1 \ 0]$ ,  $\gamma_i \doteq [\alpha_i(\boldsymbol{\theta}) \ -\beta_i(\boldsymbol{\theta})]$  ( $i \in \overline{0, p-1}$ ),  $\gamma_e = \lambda_e$ .

Определим “большие” векторы

$$\mathbf{z} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{z}[1] \\ \vdots \\ \mathbf{z}[N] \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} \doteq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}[1] \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}[N] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N(r+m)}, \quad \mathbf{w} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{w}[1] \\ \vdots \\ \mathbf{w}[N-p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e \mathbf{e}[1] \\ \vdots \\ \gamma_e \mathbf{e}[N-p] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-p)l}$$

и будем называть их процессами. В пространстве процессов  $\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{w}$  система уравнений (3) записывается в матричном виде:

$$\mathbf{G}^\top \mathbf{z} = \mathbf{w}, \quad (4)$$

$$\mathbf{G}^\top \doteq \begin{bmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-1} & 1 & & & 0 \\ & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-1} & 1 & & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-n) \times N}.$$

В случае нулевых возмущений в невязке ( $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ) уравнения (3) известны эффективные алгоритмы идентификации вектора параметров  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^v$  по наблюдениям  $\check{\mathbf{z}} = \mathbf{z} + \boldsymbol{\eta}$ , основанные на обратных итерациях в пространстве  $\mathbb{R}^v$  с переменной метрикой [5–8], минимизирующие целевую функцию

$$J_0 = \|\check{\mathbf{z}} - \mathbf{z}\|^2 = (\check{\mathbf{z}} - \mathbf{z})^\top (\check{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) \rightarrow \min_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}: \mathbf{G}^\top \mathbf{z} = \mathbf{0}}. \quad (5)$$

В данной статье рассмотрим вопросы применения алгоритмов с обратными итерациями при смешанных возмущениях  $\mathbf{w} \neq 0, \boldsymbol{\eta} \neq 0$ . Для простоты изложение будем проводить для систем (3) с  $r = 1$  (вид II). Обобщение на многомерный случай  $r > 1$  не приводит к принципиальным трудностям, только к усложнению матричных конструкций [9]. При  $r = 1$  определим вектор коэффициентов  $\boldsymbol{\gamma} \doteq [\gamma_0 \ \cdots \ \gamma_{n-1} \ 1]^\top$ . Аффинная параметризация  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})$  равносильна соотношению  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{d}$ , где матрица  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times v}$  и столбец  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n+1}$  заданы.

Пусть  $\mathbf{w} \neq 0, \boldsymbol{\eta} \neq 0$ . Вместо  $J_0$  выберем целевую функцию [10, с. 165]

$$J = \|\check{\mathbf{z}} - \mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = (\check{\mathbf{z}} - \mathbf{z})^\top (\check{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) + \mathbf{w}^\top \mathbf{w} \rightarrow \min_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}, \mathbf{w}: \mathbf{G}^\top \mathbf{z} = \mathbf{w}} \quad (6)$$

(для слагаемых в  $J$  могут быть введены весовые множители, учитывающие априорные сведения о соотношении амплитуд возмущений  $\boldsymbol{\eta}$  и  $\mathbf{w}$ ). Определим процессы и матрицу

$$\check{\mathbf{x}} \doteq \begin{bmatrix} \check{\mathbf{z}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}^\top \doteq [\mathbf{G}^\top \quad -\mathbf{I}].$$

Задача минимизации (6) примет вид (5)

$$J = (\check{\mathbf{z}} - \mathbf{z})^\top (\check{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) + \mathbf{w}^\top \mathbf{w} = (\check{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^\top (\check{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \rightarrow \min_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}: \boldsymbol{\Gamma}^\top \mathbf{x} = \mathbf{0}}. \quad (7)$$

Возникают два принципиальных вопроса: 1) есть ли эффективные алгоритмы минимизации (7), подобные алгоритмам с обратными итерациями для задачи (5); 2) являются ли оценки параметра  $\boldsymbol{\theta}$ , получаемые минимизацией (7), состоятельными в смысле сходимости к истинным значениям при увеличении объема выборки наблюдений, и при какой схеме наблюдений обеспечивается состоятельность. Ответы на эти два вопроса даются в статье.

## 2. Алгоритмы с обратными итерациями

Минимизация по  $\mathbf{x}$  в (7) приводит к выражениям

$$J(\gamma) = \check{\mathbf{x}}^\top \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{\Gamma}^\top \check{\mathbf{x}} = \check{\mathbf{z}}^\top \mathbf{G} \mathbf{C} \mathbf{G}^\top \check{\mathbf{z}} = \gamma^\top \mathbf{V}^\top \mathbf{C} \mathbf{V} \gamma, \quad (8)$$

$$\mathbf{C} \doteq (\mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{\Gamma})^{-1}, \quad \mathbf{V} \doteq \begin{bmatrix} \check{\mathbf{z}}[1] & \dots & \check{\mathbf{z}}[n+1] \\ \vdots & & \vdots \\ \check{\mathbf{z}}[N-n] & \dots & \check{\mathbf{z}}[N] \end{bmatrix}.$$

Пусть  $\lambda_1(\mathbf{Q})$  и  $\mathbf{p}_1(\mathbf{Q})$  — минимальное собственное число и соответствующий собственный вектор матрицы  $\mathbf{Q} \doteq \mathbf{V}^\top \mathbf{C} \mathbf{V}$ . Предполагается, что число  $\lambda_1(\mathbf{Q})$  некрратное (это условие полноты наблюдения  $\check{\mathbf{z}}$ ). Нетрудно увидеть, что в задачах (5) и (7) целевые функции  $J(\gamma)$  (8) отличаются только заменой матрицы  $\mathbf{C} = (\mathbf{G}^\top \mathbf{G})^{-1}$  на  $\mathbf{C} = (\mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{\Gamma})^{-1}$ . Это позволяет применить алгоритмы минимизации  $J(\gamma)$ , разработанные для задачи (5), к задаче (7).

Алгоритм О70 [6]:

$$\gamma_{[k+1]} = \mathbf{p}_1(\mathbf{Q}(\gamma_{[k]})), \quad k \geq 0. \quad (9)$$

Минимальный собственный вектор  $\mathbf{p}_1(\mathbf{Q})$  вычисляется обратными итерациями  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}^{-1} \gamma_{[k]}$ ,  $\gamma_{[k+1]} = \boldsymbol{\tau} / \|\boldsymbol{\tau}\|$ ,  $k \geq 0$ ,  $\mathbf{p}_1(\mathbf{Q}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{[k]}$ . Если использовать результат одного шага, вместо О70 получим алгоритм Е73 [7]:

$$\gamma_{[k+1]} = \boldsymbol{\tau} / \|\boldsymbol{\tau}\|, \quad \boldsymbol{\tau} = (\mathbf{Q}(\gamma_{[k]}))^{-1} \gamma_{[k]}, \quad k \geq 0. \quad (10)$$

Известно [11], что итерации О70 не находят точного минимума (5). То же верно для Е73. Вычислительные эксперименты показывают (см. разд. 4), что итерации (9) малочувствительны к начальному приближению  $\gamma_{[0]}$  и имеют предельную точку в малой окрестности глобального минимума  $J(\gamma)$  (8). В предположении малости нормы возмущений  $\min_{\mathbf{z}: \mathbf{G}^\top \mathbf{z} = 0} \|\check{\mathbf{z}} - \mathbf{z}\|$  в [8] даны доказательства этих экспериментально обнаруженных свойств.

Сформулируем три теоремы о свойствах итераций О70 и Е73 в задаче (7) с матрицей  $\mathbf{C} = (\mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{\Gamma})^{-1}$ , опираясь на результаты [8]. Доказательства аналогичны выкладкам [8] и здесь не приводятся. Принято, что нормы матриц  $\|\mathbf{A}\| \doteq \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$  согласованы с евклидовой нормой  $\|\mathbf{x}\| \doteq \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}$ . Считается, что наблюдения  $\check{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_* + \boldsymbol{\eta}$  порождены добавлением возмущения  $\boldsymbol{\eta}$  к “истинному” процессу  $\mathbf{z}_*$ ,  $\mathbf{G}^\top(\gamma_*)\mathbf{z}_* = \mathbf{w}_*$ .

**Теорема 1.** Пусть в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , содержащей истинную точку  $\gamma_*$  и точки  $\gamma_{[k]}$ ,  $k \geq k_*$  при некотором  $k_* \geq 0$ , выполнено условие на малость  $\lambda_1(\mathbf{Q})$  и тем самым на малость нормы возмущения  $\|\check{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_*\|$ :

$$\frac{2n \cdot \sqrt{\lambda_1} \cdot \|\mathbf{C}\| \cdot \|\mathbf{V}\|}{\lambda_2 - \lambda_1} < 1. \quad (11)$$

Тогда отображение  $\gamma_{[k]} \rightarrow \gamma_{[k+1]}$  при  $k \geq k_*$  в итерации (9) является сжимающим, следовательно, имеет единственную неподвижную точку в  $\Omega$ .

**Теорема 2.** Все элементы  $\gamma_{[k]}$  в итерациях (9) при  $k \geq k_* = 1$  остаются в следующей окрестности истинной точки  $\gamma_*$ :

$$\begin{aligned} \frac{\|\gamma_{[k]} - \gamma_*\|}{\|\gamma_*\|} &\leq \frac{\alpha' \cdot \|\mathbf{C}_*\| \cdot \|\mathbf{V}_*\|^2}{\lambda_{2*}} \tilde{\varepsilon} + O(\tilde{\varepsilon}^2) \leq \\ &\leq \frac{\alpha \cdot \|\mathbf{C}_*\| \cdot \|\mathbf{V}_*\|^2}{\lambda_{2*}} \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} \doteq \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{V}_*\|} \doteq \frac{\|\mathbf{V} - \mathbf{V}_*\|}{\|\mathbf{V}_*\|} = \frac{\|\mathbf{V}(\check{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_*)\|}{\|\mathbf{V}(\mathbf{z}_*)\|}. \end{aligned} \quad (12)$$

Константа  $\alpha'$  определена условием  $\|\mathbf{C}_{[k]}\| \leq \alpha' \|\mathbf{C}_*\|$ ,  $k \geq 0$ , которое можно рассматривать как ограничение на начальное значение  $\gamma_{[0]}$ , а константа  $\alpha > \alpha'$  определяется условием мажорирования слагаемых  $O(\varepsilon^2)$  в (12).

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия

$$\varepsilon < \frac{1}{5n \|\mathbf{C}_*\|^{1/2}} \cdot \frac{\lambda_2}{\alpha \|\mathbf{C}_*\| \cdot \|\mathbf{V}_*\| \cdot \|\gamma_*\|} \quad \text{и} \quad \varepsilon < \|\mathbf{V}_*\|.$$

Тогда следующее неравенство является достаточным для выполнения условия теоремы 1 в области (12):

$$\varepsilon < \frac{\varepsilon_*}{f_1^{1/2}},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_* &\doteq \frac{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2} - \omega}{\sqrt{2} \|\mathbf{C}_*\|}, \quad \omega \doteq 4n \|\mathbf{C}_*\| \cdot \|\mathbf{V}_*\|, \\ f_1 &\doteq \alpha_0 + \alpha_1 \|\mathbf{V}_*\| + \alpha_2 \|\mathbf{V}_*\|^2, \\ \alpha_0 &\doteq 1 + \frac{2n (\sqrt{\lambda_2} \|\mathbf{C}_*\|^{1/2} + \|\mathbf{C}_*\| \cdot \|\mathbf{V}_*\|)}{\lambda_2} \cdot \|\mathbf{V}_*\|, \\ \alpha_1 &\doteq \frac{2n (\sqrt{\lambda_2} \|\mathbf{C}_*\|^{1/2} + 3 \|\mathbf{C}_*\| \cdot \|\mathbf{V}_*\|)}{\lambda_2}, \quad \alpha_2 \doteq \frac{4n \|\mathbf{C}_*\|}{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Теоремы 1–3 и расчеты в разд. 4 показывают эффективность алгоритмов с обратными итерациями в задаче со смешанными возмущениями (7).

### 3. Состоятельность

Покажем, что минимизация целевой функции  $J(\gamma)$  (8) приводит к состоятельным оценкам параметров  $\theta$  в следующем смысле. Пусть дано множество наблюдений  $\mathbf{X}_L \doteq \{\check{\mathbf{x}}_{(1)}, \dots, \check{\mathbf{x}}_{(L)}\}$ . Отталкиваясь от случая (7) одного наблюдения, определим целевую функцию по множеству  $\mathbf{X}_L$ :

$$J_L(\mathbf{x}, \theta) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\check{\mathbf{x}}_{(i)} - \mathbf{x})^\top (\check{\mathbf{x}}_{(i)} - \mathbf{x}) \rightarrow \min_{\theta, \mathbf{x}: \Gamma_\theta^\top \mathbf{x} = \mathbf{0}}.$$

Уравнение  $\Gamma_\theta^\top \mathbf{x} = \mathbf{0}$  равносильно выражению  $\mathbf{x} = \mathbf{H}(\theta) \boldsymbol{\mu}$  для некоторого вектора  $\boldsymbol{\mu}$  координат на многообразии  $\ker \Gamma_\theta^\top$  и матрицы  $\mathbf{H}(\theta)$ , составленной из базисных векторов. Оценка  $\hat{\theta}_L$  параметра  $\theta$  по измерениям  $\mathbf{X}_L$  получается двуступенчатой минимизацией

$$\hat{\theta}_L = \arg \min_{\theta} \min_{\mathbf{x}: \Gamma_\theta^\top \mathbf{x} = \mathbf{0}} J_L(\mathbf{x}, \theta). \quad (13)$$

**Теорема 4.** Пусть: 1)  $\check{\mathbf{x}}_{(i)} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{z}}_{(i)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $\check{\mathbf{z}}_{(i)} = \mathbf{z}_{*(i)} + \boldsymbol{\eta}_{(i)}$ ,  $\mathbf{G}_*^\top \mathbf{z}_{*(i)} = \mathbf{w}_{*(i)}$ , что равносильно  $\mathbf{z}_{*(i)} = \mathbf{H}_{*0} \mathbf{z}_0 + \mathbf{H}_{*1} \mathbf{w}_{*(i)}$ , где матрицы  $\mathbf{H}_{*0,1}$  составлены из элементов базисных векторов подпространства  $\ker [\mathbf{G}_*^\top, -\mathbf{I}]$ ; 2) случайные величины  $\boldsymbol{\eta}_{(i)}$  и  $\mathbf{w}_{*(i)}$  для всех  $i \geq 1$  независимы и одинаково распределены,  $\mathbf{M}\boldsymbol{\eta}_{(i)} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{M}\boldsymbol{\eta}_{(i)}\boldsymbol{\eta}_{(i)}^\top = \sigma^2 \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{M}\mathbf{w}_{*(i)} = \mathbf{0}$ ; 3) выполнено естественное условие идентифицируемости ( $\mathbf{G}_\theta^\top \mathbf{H}_{*0} \mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ )  $\Rightarrow (\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_*)$ . Тогда оценка  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_L$  (13) состоятельна в смысле сходимости  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_L \rightarrow \boldsymbol{\theta}_*$ .

**Доказательство.** Обозначим среднее значение  $\bar{\mathbf{x}} \doteq \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \check{\mathbf{x}}_{(i)}$  и сформулируем вспомогательное утверждение.

**Лемма.** Пусть даны наблюдения  $\check{\mathbf{x}}_{(1)}, \dots, \check{\mathbf{x}}_{(L)} \in \mathbb{R}^N$  из условия теоремы и некоторое непрерывное отображение  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\mu}) : \mathbb{R}^\tau \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Тогда целевые функции

$$J(\boldsymbol{\mu}) \doteq \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\check{\mathbf{x}}_{(i)} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\mu}))^\top (\check{\mathbf{x}}_{(i)} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\mu})) \quad \text{и} \quad \bar{J}(\boldsymbol{\mu}) \doteq (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\mu}))^\top (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\mu})) \quad (14)$$

различаются на константу. Как следствие, совпадают точки минимума  $J(\boldsymbol{\mu})$  и  $\bar{J}(\boldsymbol{\mu})$ .

Для доказательства леммы достаточно раскрыть скобки под знаком суммы и учесть независимость  $\check{\mathbf{x}}_{(i)}$  и среднего  $\bar{\mathbf{x}}$  от  $\boldsymbol{\mu}$ .

Продолжим доказательство теоремы. Из (13) имеем

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_L = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \min_{\boldsymbol{\mu}} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\check{\mathbf{x}}_{(i)} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\mu})^\top (\check{\mathbf{x}}_{(i)} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\mu}).$$

Применив лемму для  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\mu}$ , получим

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_L &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \min_{\boldsymbol{\mu}} (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\mu})^\top (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\mu}) = \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \underbrace{\bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{\Gamma}_\theta \mathbf{C}_\theta \mathbf{\Gamma}_\theta^\top \bar{\mathbf{x}}}_{J_L(\boldsymbol{\theta})} \doteq \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J_L(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

Перейдем к предельному случаю  $L \rightarrow \infty$ . По закону больших чисел  $\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{M}\check{\mathbf{x}} \doteq \bar{\mathbf{x}}$  и  $J_L(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{\Gamma}_\theta \mathbf{C}_\theta \mathbf{\Gamma}_\theta^\top \bar{\mathbf{x}}$ . Из сходимости целевой функции следует сходимость аргумента минимума [12, теорема 1]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_L \rightarrow \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{\Gamma}_\theta \mathbf{C}_\theta \mathbf{\Gamma}_\theta^\top \bar{\mathbf{x}}.$$

Вычислим  $\bar{\mathbf{x}}$ , используя условие теоремы:  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{z}}_{(i)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{*0} \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ . Тогда

$$\bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{\Gamma}_\theta \mathbf{C}_\theta \mathbf{\Gamma}_\theta^\top \bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}_{*0} \mathbf{z}_0)^\top \mathbf{G}_\theta \mathbf{C}_\theta \mathbf{G}_\theta^\top (\mathbf{H}_{*0} \mathbf{z}_0).$$

Ввиду строгой положительной определенности  $\mathbf{C}_\theta > 0$  и условия идентифицируемости получаем искомое равенство

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta}} (\mathbf{H}_{*0} \mathbf{z}_0)^\top \mathbf{G}_\theta \mathbf{C}_\theta \mathbf{G}_\theta^\top (\mathbf{H}_{*0} \mathbf{z}_0) = \boldsymbol{\theta}_*.$$

Теорема доказана. □

#### 4. Расчеты

Приведем текст программы в среде Scilab [13] для демонстрации сходимости итераций E73 (10) в задаче со смешанными возмущениями (7).

Параметры уравнения (3):  $p = 2$ ,  $r = 1$ ,  $m = 0$ ,  $N = 100$ . Число наблюдений процессов  $L = 1$ . Уравнение идентифицируемого объекта:

$$\mathbf{z}^*[k+2] + \gamma_1^* \mathbf{z}^*[k+1] + \gamma_0^* \mathbf{z}^*[k] = c^* \mathbf{e}^*[k], \quad \mathbf{e}[k] \in N(0, \sigma^2),$$

$\sigma = 0.1$ ,  $c^* = 0.1$ . Вектор оцениваемых параметров:  $\boldsymbol{\theta} = [\gamma_0 \quad \gamma_1]^\top$ . Значения  $\gamma_i^*$  истинных параметров выбраны исходя из желаемого вида решения при  $\mathbf{e}^*[k] = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{z}^*[k] = A \exp(-k/50) \cdot \sin(4\pi * k/50 + \varphi_0), \quad k \in \overline{1, 100}.$$

Матричная запись:

$$\mathbf{G}^* \mathbf{z}^* + c^* \mathbf{I} \mathbf{e}^* = \mathbf{0},$$

матрица  $\mathbf{G}^* = \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}^*}$  представлена в (4),  $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}^*}^\top = [\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}^*}^\top \quad c^* \mathbf{I}]$ . Наблюдения:  $\check{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{z}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $\check{\mathbf{z}} = \mathbf{z}^* + \boldsymbol{\eta}$ .

В тексте программы  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ .

```
// Scilab
N=100;
// К-ты диф. уравнения
p=2; c=0.1; // к-т при невязке в уравнении
sigma_e=0.1; // амплитуда (с.к.о.) невязки при моделировании (до 2.0)
a=-1/50; b=2*%pi*2/50; g1=-2*a; g0=a^2+b^2; g=[g0;g1;1];
// Интервал дискретизации
tau=1;
// К-ты разностного уравнения
T=[1 -tau tau^2/2 ; 1 0 0; 1 tau tau^2/2 ]; gamma=inv(T')*g;
gamma=gamma/gamma(length(gamma));
// Моделирование наблюдений
z=zeros(N)'; z(1)=1; z(2)=1; em=zeros(N-p)';
for k=1:N-p
em(k)= grand(1,1,'nor', 0, sigma_e);
z(k+p)=-gamma(1:length(gamma)-1)'*z(k:k+p-1) - em(k);
end
// Дополнение наблюдений нулями
xm = [z;zeros(N-p,1)];
// Матрица разностной системы
row=[gamma' zeros(1,N-p-1) ] ; col=[gamma(1) ; zeros(N-p-1,1) ];
G=toeplitz(col,row);
A=[G c*eye(N-p,N-p)];
// Проектор на подпространство решений системы
C = inv(A*A'); Pi = eye(A'*A) - A'*C*A;
// Оценка траектории
xp = Pi * xm; zp = xp (1:N); ep = xp (N+1:N+N-p);
```

```

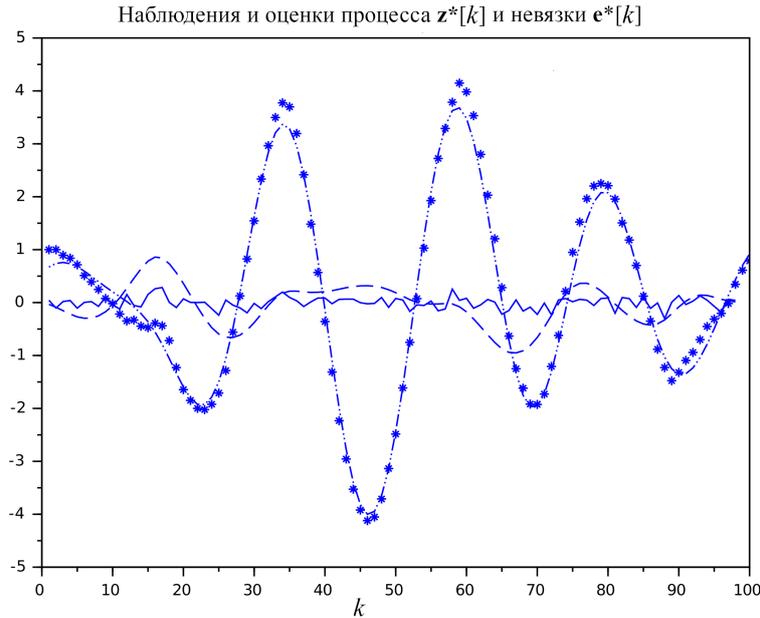
///// Итерации по параметрам:
// Матрица наблюдений:
V=zeros(N-p,p+1); for k=1:p+1 V(:,k)=z(k:N-p-1+k); end
// Начальное значение параметров:
theta=[g0;g1] //[1;1]; // [g0;g1];
v=2; // (размерность theta)
phi=[theta;1];
// Связь коэффициентов с параметрами:
Dg=[ 1 0; 0 1; 0 0]; dg=[0;0;1]; D=inv(T')*Dg; d=inv(T')*dg; Dv=[D,d];
D0=[D;zeros(1,v)]; d0=[d;c];
Dv0=[D0,d0];
// Матрицы для итераций ОР:
P=Dv'*V'*V*Dv; Pinv=inv(P); B=Dv0'*Dv0;
// итерации:
for k=1:10 tt = Pinv*B*phi; phi = tt/tt(length(tt)); phi' end
// эталон:
etalon=[g0 g1 1]
// оценка траектории по оценкам параметров:
gamma=Dv*phi; row=[gamma' zeros(1,N-p-1) ] ;
col=[gamma(1) ; zeros(N-p-1,1) ];
G=toeplitz(col,row); A=[G c*eye(N-p,N-p)]; C = inv(A*A');
Pi = eye(A'*A) - A'*C*A;
xp = Pi * xm; zp = xp (1:N); ep = xp (N+1:N+N-p);
plot(z,'*'); plot(zp,':'); plot(ep,'--'); plot(em,'-')
xlabel ("Наблюдения и оценки процесса z*[k] и невязки e*[k]",
"k, дискретное время");
legend('$\check{z}[k]$', '$\hat{z}[k]$', '$\hat{\vec{e}}[k]$', '$e^{\ast}[k]$', 3, %f);
// конец программы

```

Результаты расчетов приведены в таблице. Графики наблюдения и оценки процесса  $z^*[k]$  и невязки  $e^*[k]$  представлены на рисунке ( $k$  — дискретное время).

Ход итераций E73 / E73 iterations flow

$i$	$\gamma_0$	$\gamma_1$
0	1	1
1	0.0502308	0.01233121
2	0.0497862	-0.0003573
3	0.0497858	-0.0004678
4	0.0497858	-0.0004688
5	0.0497858	-0.0004688
6	0.0497858	-0.0004688
7	0.0497858	-0.0004688
8	0.0497858	-0.0004688
9	0.0497858	-0.0004688
10	0.0497858	-0.0004688



Оценка  $\hat{\mathbf{z}}$  ( $\cdots$ ) процесса  $\mathbf{z}^*$  по наблюдению  $\check{\mathbf{z}}$  (\*\*\*) и оценка  $\hat{\mathbf{e}}$  (---) невязки  $\mathbf{e}^*$  (—) /  
 The estimate  $\hat{\mathbf{z}}$  ( $\cdots$ ) of the process  $\mathbf{z}^*$  from the observation  $\check{\mathbf{z}}$  (\*\*\*) and the estimate  $\hat{\mathbf{e}}$  (---)  
 of the latency  $\mathbf{e}^*$  (—)

## Заключение

В задачах параметрической идентификации дискретных стохастических систем с возмущениями в невязке уравнения и в наблюдаемых переменных оказываются эффективными алгоритмы с обратными итерациями в переменной метрике. Доказаны теоремы об условиях сходимости итераций и о состоятельности оценок параметров. Приведен пример расчетов.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00754) и в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0010).

## Список литературы

- [1] Цыганова Ю.В., Куликова М.В. Об эффективных методах параметрической идентификации линейных дискретных стохастических систем. Автоматика и телемеханика. 2012; (6):34–51.
- [2] Денисов В.И., Чубич В.М., Черникова О.С. Активная параметрическая идентификация стохастических линейных дискретных систем во временной области. Сиб. журн. индустриальной математики. 2003; 6(3):70–87.
- [3] Денисов В.И., Чубич В.М., Филиппова Е.В. Активная идентификация стохастических систем при параметризации входного сигнала. Научный вестник НГТУ. 2017; 66(1):86–98.
- [4] Костин В.И. О точках экстремума одной функции. Управляемые сист. 1984; (24):35–42.
- [5] Petersson J., Holmström K. A review of the parameter estimation problem of fitting positive exponential sums to empirical data. Applied Mathematics and Computation. Applied Mathematics and Computation. 2002; 126(1):31–61.
- [6] Osborne M.R. A class of nonlinear regression problems. Data Representation. Eds R.S. Anderssen and M.R. Osborne. St. Lucia: University of Queensland Press; 1970: 94–101.

- [7] **Егоршин А.О., Будянов В.П.** Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ. *Автометрия*. 1973; (1):78–82. Адрес доступа: [https://www.iae.nsk.ru/images/stories/5\\_Autometria/5\\_Archives/1973/1/78-82.pdf](https://www.iae.nsk.ru/images/stories/5_Autometria/5_Archives/1973/1/78-82.pdf) (дата обращения 3.02.2020).
- [8] **Ломов А.А.** О сходимости алгоритмов М. Осборна с обратными итерациями в модифицированном методе Прони. *Сибирские электронные математические известия*. 2019; (16):1916–1926. Адрес доступа: <http://semr.math.nsc.ru/v16/p1916-1926.pdf> (дата обращения 3.02.2020).
- [9] **Ломов А.А.** Вариационные методы идентификации линейных динамических систем и проблема локальных экстремумов. *Управление большими системами*. 2012; (39): 53–94. Адрес доступа: <http://ubs.mtas.ru/upload/library/UBS3903.pdf> (дата обращения 3.02.2020).
- [10] **Markovsky I., Willems J.C., Van Huffel S., De Moor B.** Exact and approximate modeling of linear systems: A behavioral approach. *Monographs on Mathematical Modeling and Computation*. Bangkok: SIAM; 2006: 216.
- [11] **Osborne M.R., Smyth G.K.** A modified Prony algorithm for exponential function fitting. *SIAM Journal of Scientific Computing*. 1995; (16):119–138.
- [12] **Ломов А.А.** О состоятельности обобщенных орторегрессионных оценок параметров линейной динамической системы. *Сиб. журн. индустриальной математики*. 2013; 16(4):87–93.
- [13] **Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В., Рудченко Е.А.** Scilab: Решение инженерных и математических задач. М.: ALT Linux, БИНОМ. Лаборатория знаний; 2008: 269. Адрес доступа: <http://docs.altlinux.org/books/2008/altlibrary-scilab-20090409.pdf>

## Parameter identification of discrete stochastic systems by the inverse iteration method

LOMOV ANDREI A.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia

Corresponding author: Lomov Andrei A., e-mail: [lomov@math.nsc.ru](mailto:lomov@math.nsc.ru)

Received March 10, 2020, revised March 26, 2020, accepted April 16, 2020

### Abstract

The article addresses the problem of identifying parameters of discrete stochastic systems with perturbations in the residual of the equation and observation of variables. The identification functional in the problem has a complex nature of isosurfaces, which is why universal minimization algorithms based on estimates of the first and second derivatives have a small radius of convergence.

It is proposed to employ efficient computational identification algorithms with inverse iterations in a variable metric for solving the convergence problem for two classes of systems with simple correspondence between matrix elements and parameters of equivalent systems without state variables. These algorithms are used for systems without state variables due to the large radius and high convergence rate since the 1970s.

At first, a theorem on the conditions for convergence of inverse iterations from almost any initial approximation to a small neighborhood of the global minimum of the identification functional was proved. Secondly, a theorem on the convergence of the points of the global minimum of the identification functional to the desired true value with an increase in the sample size of observations is taken into account. Assumption of a zero first and restricted second moments of stochastic disturbances in the residual of the equation and observation of variables was made. The convergence of inverse iterations is shown numerically in a model example with significant values of disturbances.

The result of the article is new theorems on the conditions of global convergence of computational algorithms with inverse iterations in the problem with mixed disturbances and the justification of possibility of using these algorithms to identify the parameters for discrete stochastic systems of two classes with a simple correspondence between matrix elements and parameters of equivalent systems without state variables.

*Keywords:* discrete stochastic systems, parameter identification, inverse iterations, consistency.

*Citation:* Lomov A.A. Parameter identification of discrete stochastic systems by the inverse iteration method. Computational Technologies. 2020; 25(3):66–76. (In Russ.)

**Acknowledgements.** This research was supported by RFBR (grant No. 19-01-00754) and was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project No. 0314-2019-0010).

## References

1. Tsyganova Yu.V., Kulikova M.V. On efficient parametric identification methods for linear discrete stochastic systems. Automation and Remote Control. 2012; 73(6):962–975.
2. Denisov V.I., Chubich V.M., Chernikova O.S. Active parametric identification of stochastic linear discrete systems in the time domain. Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki. 2003; 6(3):70–87. (In Russ.)
3. Denisov V.I., Chubich V.M., Filippova E.V. Active identification of stochastic systems with input signal parameterization. Science Bulletin of the NSTU. 2017; 66(1):86–98. (In Russ.)
4. Kostin V.I. On extremum points of some function. Upravlyaemye Sistemy. 1984; (24):35–42. (In Russ.)
5. Petersson J., Holmström K. A review of the parameter estimation problem of fitting positive exponential sums to empirical data. Applied Mathematics and Computation. Applied Mathematics and Computation. 2002; 126(1):31–61.
6. Osborne M.R. A class of nonlinear regression problems. Data Representation. Eds R.S. Anderssen and M.R. Osborne. St. Lucia: University of Queensland Press; 1970: 94–101.
7. Egorshin A.O., Budyanov V.P. Signal smoothing and dynamic parameter estimation in automatic systems using digital computers. Avtometriya. 1973; (1):78–82. Available at: [https://www.iae.nsk.su/images/stories/5\\_Autometria/5\\_Archives/1973/1/78-82.pdf](https://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/5_Archives/1973/1/78-82.pdf) (accessed 3.02.2020). (In Russ.)
8. Lomov A.A. On convergence of M. Osborne' inverse iteration algorithms for modified Prony method. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2019; (16):1916–1926. Available at: <http://semr.math.nsc.ru/v16/p1916-1926.pdf> (In Russ.) DOI:10.33048/semi.2019.16.137.
9. Lomov A.A. Variational identification methods for linear dynamic systems and the local extrema problem. Upravlenie Bol'shimi Sist. 2012; (39):53–94. Available at: <http://ubs.mtas.ru/upload/library/UBS3903.pdf> (accessed 3.02.2020). (In Russ.)
10. Markovsky I., Willems J.C., Van Huffel S., De Moor B. Exact and approximate modeling of linear systems: A behavioral approach. Monographs on Mathematical Modeling and Computation. Bangkok: SIAM; 2006: 216.
11. Osborne M.R., Smyth G.K. A modified Prony algorithm for exponential function fitting. SIAM Journal of Scientific Computing. 1995; (16):119–138.
12. Lomov A.A. On consistency of a generalized orthoregressive parameter estimator for a linear dynamical system. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2014; 8(1):86–91.
13. Alekseev E.R., Chesnokova O.V., Rudchenko E.A. Scilab: Reshenie inzhenernykh i matematicheskikh zadach [Scilab: Solution of engineering and mathematical problems]. Moscow: ALT Linux, BINOM. Laboratoriya Znaniy; 2008: 269. Available at: <http://docs.altlinux.org/books/2008/altlibrary-scilab-20090409.pdf> (In Russ.)