ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДМОДЕЛЕЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ*

А. А. Черевко
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирск, Россия
e-mail: cherevko@hydro.nsc.ru

The functioning of the program of analytical computations in the environment of Mathematica 3.0. is considered. The most laborious part of algoritm [1], i. e. building of canonical differential equations system for gas dynamics invariant solutions on selected invariant and non-invariant variables are rendered automatic.

Одной из задач программы ПОДМОДЕЛИ [2, 3] является нахождение инвариантных решений уравнений газовой динамики (УГД). Для построения решения, инвариантного относительно некоторой подалгебры, необходимо сначала выбрать инварианты составляющих подалгебру операторов. При выборе инвариантов всегда есть произвол, поскольку функции от инвариантов — это тоже инварианты. Поэтому система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет инвариантное решение, может быть получена в различных формах, эквивалентных друг другу. Это затрудняет сравнительный анализ подмоделей. Кроме того, подмоделей довольно много (сотни) и поэтому весьма полезны дополнительные классифицирующие признаки.

В работе [1] доказано существование определенной канонической формы дифференциальных уравнений инвариантных подмоделей УГД. Эта форма имеет дивергентный вид, и в ней явно выделена операция дифференцирования инвариантных искомых функций вдоль инвариантных траекторий.

Для описания этой канонической формы введем следующие обозначения (подробный вывод см. в [1]). Пусть $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ — исходные переменные. На этом пространстве УГД могут быть записаны в дивергентной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}(S\rho\mathbf{h}) = 0, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{h} = (1, u, v, w)^*, \quad \mathbf{H} = \rho(\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^*) + p\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №96–01–01780, и программы "Ведущие научные школы", грант №96–15–96238.

Здесь и далее символ $*$ обозначает транспонирование, ρ — плотность, p — давление, S — энтропия, u, v, w — компоненты вектора скорости, $\mathbf{I}$ — единичная 3×3 матрица, а $\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^*$ есть матрица-диада

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^* = \begin{pmatrix} 1 & u & v & w \\ u & u^2 & uv & uw \\ v & uv & v^2 & vw \\ w & uw & vw & w^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим переход в УГД к новым переменным

$$y^0 = t, \quad y^k = y^k(t, x^1, x^2, x^3), \quad k = 1, 2, 3$$

(t не преобразуется!). Матрица Якоби J запишется в блочном виде

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{q}' & J_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{q}' = (x^1_t, x^2_t, x^3_t)^*$, $J_0 = (\partial x^i / \partial y^j)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$. Тогда $\mathbf{h} = J\mathbf{h}'$, где

$$\mathbf{h}' = (1, v^1, v^2, v^3)^*, \quad v^k = Dy^k, \quad k = 1, 2, 3$$

с оператором полного дифференцирования $D = \partial_t + u\partial_{x^1} + v\partial_{x^2} + w\partial_{x^3}$. Кроме того, $\mathbf{H} = J\mathbf{H}'J^*$, где

$$\mathbf{H}' = \rho \mathbf{h}' \cdot \mathbf{h}'^* + p\mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = J_0^{-1} J_0^{-1*}.$$

1×3 векторы-строки матрицы $\mathbf{B}_0$ обозначим как $\mathbf{B}_0^k$ и положим

$$\Gamma^k = \begin{pmatrix} \Gamma^k_{tt} & (\Gamma^k_{tj}) \\ (\Gamma^k_{tj})^* & (\Gamma^k_{ij}) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где

$$\Gamma^k_{tt} = \frac{\partial y^k}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial t^2}, \quad \Gamma^k_{tj} = \frac{\partial y^k}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial t \partial y^j}, \quad \Gamma^k_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial y^i \partial y^j} \text{ —}$$

символы Кристоффеля.

Тогда УГД запишутся следующим образом:

$$\mathrm{div}_y(\rho \mathbf{h}' + \rho \mathbf{h}' \cdot \nabla_y \ln|J_0| = 0,$$

$$\mathrm{div}_y(v^k \rho \mathbf{h}' + p(0, \mathbf{B}_0^k)) + \nabla_y \ln|J_0| \cdot (v^k \rho \mathbf{h}' + p(0, \mathbf{B}_0^k)) + \Gamma^k : \mathbf{H}' = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\mathrm{div}_y(S\rho \mathbf{h}') + (\nabla_y \ln|J_0|) \cdot S\rho \mathbf{h}' = 0.$$

При этом существуют [1] такие новые координаты $y^k(\mathbf{x}, t)$ (некоторые из них инвариантные) и функции $\varphi^k(\mathbf{x}, t)$, $z^k(\mathbf{x}, t)$, $k = 1, 2, 3$, что выражения $u^k = \varphi^k(D(y^k) + z^k)$, $k = 1, 2, 3$ можно взять в качестве инвариантных скоростей (здесь D — оператор полного дифференцирования). Тогда, подставляя

$$v^k = D(y^k) = u^k / \varphi^k - z^k, \quad k = 1, 2, 3,$$

и учитывая независимость инвариантных величин от неинвариантных переменных, получим уравнения инвариантной подмодели УГД в канонической форме.

При приведении уравнений инвариантных подмоделей УГД к каноническому виду значительно уменьшается произвол в выборе инвариантов, кроме того, появляются новые классифицирующие признаки, связанные с алгебраической структурой и представлением в базовом пространстве соответствующей подалгебры.

При использовании описанного в [1] алгоритма построения канонической системы уже после выбора $y^k(\mathbf{x},t)$, $z^k(\mathbf{x},t)$, $\varphi^k(\mathbf{x},t)$, $k=1,2,3$ и инвариантных плотности, давления и энтропии возникает большой объем аналитических выкладок, связанный с громоздкими подстановками, обращением матриц, упрощением возникающих уравнений и т. п. В связи с этим и написана программа аналитических вычислений в среде пакета Mathematica 3.0, проделывающая всю эту работу. Далее описывается схема работы программы и приводится пример выходного файла.

В качестве входных данных необходимо задать y^k, z^k, φ^k, $k=1,2,3$, выбранные в соответствии с алгоритмом [1], и инвариантные плотность, давление и энтропию. Кроме того, необходимо указать, какие из y^k являются инвариантными.

Программа создает два выходных файла (один в формате Mathematica 3.0, второй в формате издательской системы TEX), каждый из которых включает в себя:

1) выражения для инвариантных независимых и зависимых переменных (инвариантные скорости вычисляются по формуле $u^k=\varphi^k(D(y^k)+z^k)$);

2) уравнения, определяющие инвариантное решение в дивергентной форме (дивергенция по инвариантным переменным);

3) уравнения, определяющие инвариантное решение с оператором полного дифференцирования по инвариантным переменным.

Далее следует пример выходного файла программы в формате TEX для одной из подмоделей ранга 1, т. е. с одной инвариантной независимой переменной.

Подалгебра:

$$
\begin{aligned}
X1 &= \partial_x,\\
X4+X10 &= \partial_t+t\partial_x+\partial_u,\\
2\cdot X11-X13+a\cdot X14 &= t\partial_t+2x\partial_x+2y\partial_y+2z\partial_z+\\
&\quad +u\partial_u+v\partial_v+w\partial_w+(a-2)\rho\partial_\rho+ap\partial_p.
\end{aligned}
$$

В соответствии с рекомендациями работы [1] выбраны следующие функции φ^k, z^k и координаты:

$$
\begin{array}{ll|l}
\varphi^1=e^{y^2}, & z^1=0 & x=\dfrac{t^2}{2}+y^3,\\
\varphi^2=e^{y^2}, & z^2=0 & y=e^{2\,y^2}\,\cos(y^1),\\
\varphi^3=e^{-y^2}, & z^3=0 & z=e^{2\,y^2}\,\sin(y^1).
\end{array}
$$

Инвариантные переменные: $\{y^1\}$.

Инвариантные скорости:

$$
\begin{aligned}
u^1 &= \frac{w\,\cos(y^1) - v\,\sin(y^1)}{e^{y^2}},\\
u^2 &= \frac{v\,\cos(y^1) + w\,\sin(y^1)}{2\,e^{y^2}},\\
u^3 &= \frac{-t+u}{e^{y^2}},\\
u &= t + e^{y^2}\,u^3,\\
v &= -\left(e^{y^2}\,\left(\sin(y^1)\,u^1 - 2\,\cos(y^1)\,u^2\right)\right),\\
w &= e^{y^2}\,\left(\cos(y^1)\,u^1 + 2\,\sin(y^1)\,u^2\right).
\end{aligned}
$$

Плотность, давление, энтропия:

$$
\begin{aligned}
\rho &= e^{(-2+a)\,y^2}\,\bar\rho,\\
p &= e^{a\,y^2}\,\bar p,\\
S &= e^{(a+2\,\gamma-a\,\gamma)\,y^2}\,\bar S.
\end{aligned}
$$

Уравнения подмодели в дивергентной форме ($\mathfrak{Div}(f^1) = {f^1}_{y^1}$):

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Div}(\bar\rho\,u^1) &= -\,(1+a)\;\bar\rho\,u^2,\\
\mathfrak{Div}(\bar p + \bar\rho\,{u^1}^2) &= -\,(4+a)\;\bar\rho\,u^1\,u^2,\\
\mathfrak{Div}(\bar\rho\,u^1\,u^2) &= \imath 4\left(-a\,\bar p + 2\,\bar\rho\,\left({u^1}^2 - 2\;(2+a)\;{u^2}^2\right)\right),\\
\mathfrak{Div}(\bar\rho\,u^1\,u^3) &= -\bar\rho\,\left(1 + (2+a)\;u^2\,u^3\right),\\
\mathfrak{Div}(\bar S\,\bar\rho\,u^1) &= (-1 + a\;(-2+\gamma) - 2\,\gamma)\;\bar S\,\bar\rho\,u^2.
\end{aligned}
$$

Каноническая форма уравнений подмодели ($\mathcal{D}(\{) = \sqcap^{\infty}\,\{_{\dagger^{\infty}}$):

$$
\begin{aligned}
&\bar\rho\,{u^1}_{y^1} + \mathcal{D}(\bar\rho) = -\,(\infty + \dashv)\;\bar\rho\,\sqcap^{\in},\\
&\bar p_{y^1} + \bar\rho\,\mathcal{D}(\sqcap^{\infty}) = -\ni\bar\rho\,\sqcap^{\infty}\,\sqcap^{\in},\\
&4\,\bar\rho\,\mathcal{D}(\sqcap^{\in}) = -\dashv\underset{\surd}{\bar{}} + \in\bar\rho\,\left(\sqcap^{\infty\in} - \in\sqcap^{\in\in}\right),\\
&\mathcal{D}(\sqcap^{\ni}) = -\,(\infty + \sqcap^{\in}\,\sqcap^{\ni}),\\
&\mathcal{D}(\bar{\mathcal{S}}) = (\dashv\;(-\infty+\gamma) - \in\gamma)\;\bar{\mathcal{S}}\,\sqcap^{\in}.
\end{aligned}
$$

Ко времени написания данной статьи с помощью предложенной программы Е. В. Мамонтовым, С. В. Головиным и автором было исследовано 160 подмоделей с одной независимой переменной и 101 подмодель с двумя независимыми переменными из оптимальной системы подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа [4]. Расчеты производились на ЭВМ с процессором Cyrix-130 и ОЗУ 32 Мб. Вычисления показали приемлемое время счета: от нескольких десятков секунд до 30 минут на одну подмодель без учета предварительной подготовительной работы. Типичное время счета 1–10 минут, лишь сравнительно небольшое (около

10 %) число подмоделей с переменными в сферических координатах требует большего времени.

Автор выражает благодарность участникам программы ПОДМОДЕЛИ Л. В. Овсянникову, С. В. Головину, С. В. Мелешко, С. В. Хабирову, А. П. Чупахину, плодотворное общение с которыми оказало большое влияние на эту работу. Хочется также выразить особую признательность Е. В. Мамонтову, чьи ценные замечания позволили значительно улучшить программу.

Список литературы

[1] Овсянников Л. В. Каноническая форма инвариантных подмоделей газовой динамики. *Препринт №3–97*, Ин-т гидродинамики СО РАН, Новосибирск, 1997.

[2] Овсянников Л. В. *Программа ПОДМОДЕЛИ.* Ин-т гидродинамики СО РАН, Новосибирск, 1992.

[3] Овсянников Л. В. *Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика. ПММ*, **58**, №4, 1994, 30–55.

[4] Головин С. В. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа. *Препринт №5–96*, Ин-т гидродинамики СО РАН, Новосибирск, 1996.

Поступила в редакцию 23 июня 1998 г.