

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ\*

Г. Г. ЧЕРНЫХ

*Институт вычислительных технологий СО РАН*

*Новосибирск, Россия*

e-mail: chernykh@ict.nsc.ru

The review of results of investigations of free turbulent flows carried out in the Institute of Computational Technologies of SB RAS since 1991 to 2000 are presented. The numerical simulation of isotropic turbulence dynamics has been performed. The numerical models of turbulent wakes with varied values of excess momentum and angular momentum have been constructed. The investigation of passive admixture propagation from localized source in some free turbulent flows has been carried out. The numerical simulation of turbulent wakes and internal waves generated by wakes behind the bodies moving in stably density stratified media has been done.

## Введение

Свободные турбулентные течения — классический объект теоретической, вычислительной и прикладной гидродинамики. Подобные течения играют важную роль в различного рода энергетических и химико-технологических устройствах сложной конфигурации, при обтекании тел, в геофизических явлениях.

Ниже излагаются результаты исследования свободных турбулентных течений, выполненных в период с 1991 по 2000 г. в Институте вычислительных технологий СО РАН. Исследования проводились совместно с сотрудниками других институтов РАН.

Для краткости обзор исследований других авторов не приводится; его можно найти в работах, приведенных в библиографии.

## 1. Численное моделирование динамики изотропной турбулентности

Для описания динамики однородной изотропной турбулентности привлекается замкнутое уравнение Кармана — Ховарта [1]

$$\frac{\partial \tilde{B}_{LL}}{\partial \tilde{t}} = \frac{2}{\tilde{r}^4} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[ \tilde{r}^4 \left( \tilde{K} + \frac{1}{\text{Re}_M} \right) \frac{\partial \tilde{B}_{LL}}{\partial \tilde{r}} \right], \quad (1.1)$$

где  $B_{LL}(t, r)$  — продольная двухточечная корреляционная функция поля скорости,  $\tilde{B}_{LL} =$

---

\*Исследования выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №93–01–17925, 95–01–00910, 98–01–00736, 01–01–00783) и СО РАН (гранты №1997–43, 2000–1).

© Г. Г. Черных, 2002.

$B_{LL}/U_\infty^2$ ;  $r$  — расстояние между двумя точками пространства;  $t = x/U_\infty$ ,  $t$  — время, связанное с расстоянием  $x$  от решетки в аэродинамической трубе,  $U_\infty$  — скорость потока в рабочей части трубы или канала,  $\tilde{t} = x/M$ ;  $\tilde{r} = r/M$ ,  $M$  — размер ячейки турбулизующей решетки;  $\tilde{K} = \alpha \tilde{r} \left( 2 \left( \tilde{B}_{LL}(\tilde{t}, 0) - \tilde{B}_{LL}(\tilde{t}, \tilde{r}) \right) \right)^{1/2}$ ;  $\alpha = 0.076$  — эмпирическая постоянная;  $\text{Re}_M = U_\infty M/\nu$ ,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости. В качестве начальных условий задается положительная монотонно убывающая функция  $\varphi(r)$ , согласующаяся с экспериментальными данными:

$$B_{LL}(t_0, r) = \varphi(r), \quad t = t_0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (1.2)$$

Граничные условия полагаются следующими:

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial r} = 0, \quad r = 0; \quad B_{LL} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad t \geq t_0. \quad (1.3)$$

В дальнейшем по возможности знак обезразмеривания  $\sim$  будет опущен.

Следствием уравнения (1.1) и условий (1.2), (1.3) в предположении достаточно быстрого убывания  $B_{LL}(t, r)$  при  $r \rightarrow \infty$  является интегральное условие

$$\Lambda(t) = \int_0^\infty r^4 B_{LL}(t, r) dr = \Lambda(t_0) \quad (1.4)$$

( $\Lambda(t)$  — инвариант Лойцянского [2]).

В качестве основного алгоритма решения задачи использовался неявный конечно-разностный алгоритм с применением подвижной сетки. Для его построения осуществлялся переход к переменным  $(t', r')$ :  $t' = t$ ;  $r' = \Phi(t, r)$  ( $t = t'$ ,  $r = \chi(t', r')$ ). Уравнение (1.1) при этом может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t'}(r_{r'} r^4 B_{LL}) - \frac{\partial}{\partial r'}(r_{t'} r^4 B_{LL}) = \frac{\partial}{\partial r'} \frac{2r^4}{r_{r'}} \left( K + \frac{1}{\text{Re}_M} \right) \frac{\partial B_{LL}}{\partial r'}. \quad (1.5)$$

Рассмотрена простейшая неявная аппроксимация (1.5) с итерациями по нелинейности

$$\begin{aligned} & \frac{(r_{r'}^h r^4 B_{LL})_j^{i+1, s+1} - (r_{r'}^h r^4 B_{LL})_j^i}{\tau^{i+1}} - \frac{(r_{t'}^h r^4 B_{LL})_{j+1}^{i+1, s+1} - (r_{t'}^h r^4 B_{LL})_{j-1}^{i+1, s+1}}{2h} = \\ & = \frac{(K_1)_{j+1/2}^{i+1, s} (B_{LL})_{j+1}^{i+1, s+1} - \left[ (K_1)_{j+1/2}^{i+1, s} + (K_1)_{j-1/2}^{i+1, s} \right] (B_{LL})_j^{i+1, s+1} + (K_1)_{j-1/2}^{i+1, s} (B_{LL})_{j-1}^{i+1, s+1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В (1.6) приняты обозначения:

$$\begin{aligned} (r_{r'}^h)_j^i &= \frac{r_{j+1}^i - r_{j-1}^i}{2h}, \quad j = 2, \dots, M_1 - 1; \\ (r_{r'}^h)_1^i &= \frac{r_2^i - r_1^i}{h}, \quad (r_{r'}^h)_{M_1}^i = \frac{r_{M_1}^i - r_{M_1-1}^i}{h}; \\ (r_{t'}^h)_j^{i+1} &= \frac{r_j^{i+1} - r_j^i}{\tau^{i+1}}; \quad K_1 = \frac{2r^4}{r_{r'}} \left( K + \frac{1}{\text{Re}_M} \right); \end{aligned}$$

$i$  — номер временного слоя:  $i = 0, \dots, I_0$ ;  $s$  — номер итерации по нелинейности;  $\tau^i$ ,  $h$  — параметры сетки по переменным  $t'$ ,  $r'$ ;  $(K_1)_{j\pm 1/2} = 0.5(K_{1j} + K_{1j\pm 1})$ . Итерации заканчивались при выполнении условия сходимости

$$\frac{\max_{1 \leq j \leq M_1 - 1} \left| (B_{LL})_j^{i+1,s} - (B_{LL})_j^{i+1,s+1} \right|}{(B_{LL})_1^i} \leq \delta,$$

$$\delta = \text{const} \in [10^{-5}, 10^{-3}]; \quad (B_{LL})_j^{i+1,0} \equiv (B_{LL})_j^i.$$

Конечно-разностный аналог первого из граничных условий (1.3) выбирался следующим:

$$(B_{LL})_1^{i+1,s+1} = (B_{LL})_2^{i+1,s+1}.$$

При фиксированном  $i$  для каждого  $s$  решение (1.6) находится методом прогонки. Функция  $\chi(t', r')$  в настоящих расчетах из физических соображений определялась следующим образом:

$$\begin{aligned} r(t', r') &= \frac{r(t'_0, r')L(t')}{L(t_0)}, \\ L(t) &= \frac{\int_0^\infty B_{LL}(t, r) dr}{B_{LL}(t, 0)} = L(t'). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Сетка по переменной  $r'$  выбиралась постоянной ( $h = \text{const}$ ). Функция  $r(t_0, r')$  исходя из опыта численного моделирования вырождения однородной изотропной турбулентности на начальной стадии [3] задавалась таблично. Величина шага по времени  $\tau^{i+1}$  определялась из соотношения  $\tau^{i+1} = \tau^i \gamma_2$ , параметр  $\gamma_2 = \text{const}$  выбирался экспериментально.

Алгоритм (1.6) был детально оттестирован [7, 8], в частности, путем решения задачи о температурной волне, имеющей точное аналитическое решение.

Динамика изотропной турбулентности на начальной стадии вырождения иллюстрируется рис. 1, на котором рассчитанные в [4, 8] нормализованные продольные корреляционные функции  $f(\tilde{r}) = B_{LL}(\tilde{t}, \tilde{r})/B_{LL}(\tilde{t}, 0)$  сопоставляются с экспериментальными данными [4]. Результаты расчетов [1] хорошо согласуются также с экспериментальными данными [3]. Удовлетворительное соответствие получено в [7, 8] и при сопоставлении результатов расчетов с применением математической модели (1.1) с результатами лабораторных измерений вырождения “слабой” изотропной турбулентности [5].

Представляет интерес сопоставление результатов расчетов с асимптотическим решением Лойцянского — Миллионщикова [2]. Согласно этой асимптотике на заключительной стадии вырождения однородной изотропной турбулентности при условии, что  $\Lambda(t)$  постоянен, конечен и отличен от нуля, справедливо соотношение ( $t^* = t - t_0 \rightarrow \infty$ ):

$$B_{LL}(t^*, r) \approx \frac{\Lambda(t_0) \exp \left[ \frac{-r^2}{8\nu t^*} \right]}{48\sqrt{2\pi}(\nu t^*)^{5/2}}. \tag{1.8}$$

С целью демонстрации выхода решения задачи (1.1) — (1.3) на асимптотическое решение (1.8) выполнены расчеты на интервале  $t^* \in [20.0, 0.35 \times 10^{13}]$ . В качестве начального распределения  $\varphi(r)$  при  $t_0 = 20$  выбиралась функция, согласующаяся с экспериментальными данными [3];  $\text{Re}_M = 5400$ . Вычисления выполнялись на последовательности сеток.

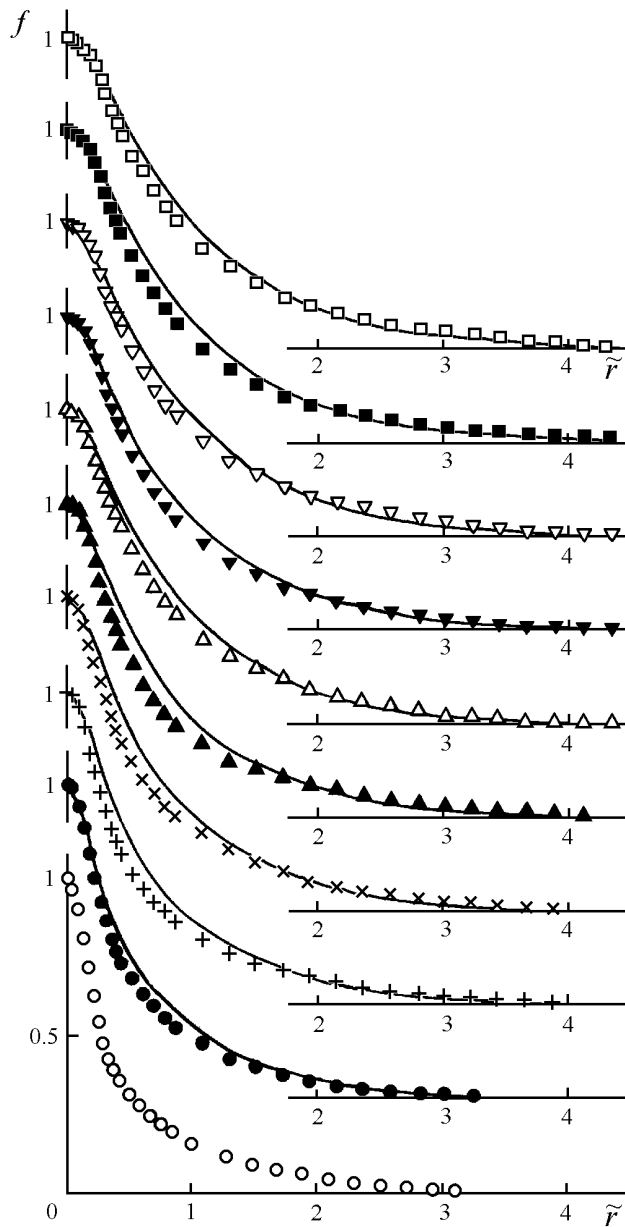


Рис. 1. Нормализованные продольные двухточечные корреляционные функции;  $\circ$  —  $t = 40$ ,  $\bullet$  —  $t = 60$ ,  $+$  —  $t = 80$ ,  $\times$  —  $t = 100$ ,  $\blacktriangle$  —  $t = 120$ ,  $\triangle$  —  $t = 140$ ,  $\blacktriangledown$  —  $t = 160$ ,  $\nabla$  —  $t = 200$ ,  $\blacksquare$  —  $t = 220$ ,  $\square$  —  $t = 240$ ; — — результаты расчетов.

Асимптотическое поведение при  $(t^* \rightarrow \infty)$  задачи (1.1) — (1.3) характеризуется данными, приведенными в таблице, в которой

$$\Delta^i = \frac{\max_j \left| (B_{LL})_j^i - (B_{LL}^m)_j^i \right|}{(B_{LL}^m)_1^i},$$

$B_{LL}^m$  определяется (1.8);  $\text{Re}_\lambda = (B_{LL}(t^*, 0))^{1/2} \lambda / \nu$ ;  $C_1 = B_{LL}(t^*, 0)(t^*)^{10/7}$ ;  $C_2 = B_{LL}(t^*, 0)(t^*)^{5/2}$ ;  $(\lambda/M)^2 = [-B_{LL}(t, r) / (\partial^2 B_{LL} / \partial r^2)]|_{r=0}$ . Анализируя данные таблицы, можно отметить следующее. Отклонение численного решения от асимптотического (1.8) не превышает 10% при  $t^* \geq 10^7$ . Величина  $C_1$  мало изменяется для  $t^* \in [20, 520]$ , при этом  $\text{Re}_\lambda \geq 9.5$ . Величина

$C_3 = L(t^*)(t^*)^{-2/7}$  для рассмотренного интервала значений  $t^*$  изменяется от 0.194 до 0.234. Малое изменение величин  $C_1$ ,  $C_3$  свидетельствует о близости законов вырождения однородной изотропной турбулентности для небольших значений времени к асимптотическим законам А. Н. Колмогорова [6].

Сопоставление результатов расчетов с асимптотическим решением  
Лойцянского — Миллионщикова

$(t^*)^i$	$\Delta^i$	$\tilde{\Lambda}(t^*) \times 10^4$	$Re_\lambda$	$C_1$	$C_2$
$0.310 \times 10^2$	$0.281 \times 10^5$	2.140	$0.192 \times 10^2$	$0.463 \times 10^{-1}$	—
$0.520 \times 10^3$	$0.125 \times 10^3$	2.140	$0.950 \times 10^1$	$0.413 \times 10^{-1}$	—
$0.108 \times 10^4$	$0.654 \times 10^2$	2.140	$0.734 \times 10^1$	$0.331 \times 10^{-1}$	—
$0.110 \times 10^5$	$0.101 \times 10^2$	2.140	$0.299 \times 10^1$	$0.163 \times 10^{-1}$	$0.347 \times 10^3$
$0.110 \times 10^6$	$0.194 \times 10^1$	2.140	$0.968 \times 10^0$	—	$0.131 \times 10^4$
$0.109 \times 10^7$	$0.425 \times 10^0$	2.140	$0.234 \times 10^0$	—	$0.269 \times 10^4$
$0.109 \times 10^8$	$0.999 \times 10^{-1}$	2.140	$0.462 \times 10^{-1}$	—	$0.350 \times 10^4$
$0.108 \times 10^9$	$0.305 \times 10^{-1}$	2.140	$0.844 \times 10^{-2}$	—	$0.372 \times 10^4$
$0.107 \times 10^{10}$	$0.165 \times 10^{-1}$	2.140	$0.151 \times 10^{-2}$	—	$0.377 \times 10^4$
$0.107 \times 10^{11}$	$0.139 \times 10^{-1}$	2.140	$0.271 \times 10^{-3}$	—	$0.378 \times 10^4$
$0.106 \times 10^{12}$	$0.137 \times 10^{-1}$	2.140	$0.483 \times 10^{-4}$	—	$0.378 \times 10^4$
$0.351 \times 10^{13}$	$0.133 \times 10^{-1}$	2.140	$0.351 \times 10^{-5}$	—	$0.378 \times 10^4$

В целом ряде работ (см., например, [2, 6] и приведенную там библиографию) обсуждается вопрос о невозможности реализации интеграла Лойцянского (1.4) в развитом изотропном турбулентном течении. В настоящих расчетах никакой специальной подгонки с целью выполнения (1.4) не проводилось. Исходя из анализа результатов численных экспериментов можно сделать вывод о том, что выполнение разностного аналога (1.4) является следствием заложенной в (1.1) градиентной гипотезы [1].

Таким образом, в рамках рассмотренной математической модели — замкнутого уравнения Кармана — Ховарта — осуществлена численная реализация асимптотического решения Лойцянского — Миллионщикова. Получено хорошее соответствие с известными экспериментальными данными о вырождении однородной изотропной турбулентности на начальной стадии. Удовлетворительное согласие результатов расчетов и экспериментальных данных удалось получить и для случая “слабой” изотропной турбулентности.

Во всех расчетах инвариант Лойцянского (1.4) оставался практически постоянным.

## 2. Турбулентные течения в следах с варьируемыми значениями импульса и момента количества движения

Построены численные модели динамики плоских и осесимметричных турбулентных следов с варьируемым значением суммарного избыточного импульса [9–14]. Математические модели основаны на использовании приближения как дальнего следа [9–11], так и пограничного слоя [12–14]. Хорошее соответствие с многочисленными известными экспериментальными данными удалось получить с применением модифицированной  $(e - \varepsilon)$ -модели турбулентности, в которой рейнольдсовы напряжения вычисляются из неравновесных алгебраических соотношений [15].

Численное моделирование закрученного безимпульсного турбулентного следа с ненулевым моментом количества движения, основанное на применении иерархии полуэмпирических моделей турбулентности второго порядка, осуществлено в [16]. Показано, что удовлетворительное согласие с экспериментальными данными [17] может быть получено при использовании математической модели, включающей дифференциальные уравнения переноса нормальных и одного из касательных рейнольдсовых напряжений и неравновесных алгебраических соотношений для остальных касательных напряжений.

Ниже представлена численная модель закрученного турбулентного течения, являющаяся логическим продолжением [16], позволяющая адекватно описать след за самодвижущимся телом. Выполненные по этой модели расчеты сопоставлены с экспериментальными данными ИГиЛ СО РАН [18].

### Постановка задачи

Для описания течения привлекается система осредненных уравнений движения, несжимаемости, переноса нормальных рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации энергии турбулентности:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^\infty \frac{[W^2 + \langle w'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle]}{r} dr - \frac{\partial(\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle)}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle v'w' \rangle - \frac{\langle v'w' \rangle}{r} - \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial x}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = 0, \quad (2.3)$$

$$U \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} = -2(1 - \alpha) \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle u'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{2}{3} \alpha P + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{re \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} \right), \quad (2.4)$$

$$U \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} - 2 \frac{W}{r} \langle v'w' \rangle = 2(1 - \alpha) \langle v'w' \rangle \frac{W}{r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle v'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{re}{\varepsilon} \left( \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} - \frac{2 \langle v'w' \rangle^2}{r} \right) \right] - \frac{2C_s e}{r\varepsilon} \left[ \langle v'w' \rangle \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle}{r} \right] + \frac{2}{3} \alpha P, \quad (2.5)$$

$$U \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} + 2 \frac{W}{r} \langle v'w' \rangle = -2(1 - \alpha) \langle v'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle w'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{re}{\varepsilon} \left( \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} + \frac{2 \langle v'w' \rangle^2}{r} \right) \right] + \frac{2C_s e}{r\varepsilon} \left[ \langle v'w' \rangle \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle}{r} \right] + \frac{2}{3} \alpha P, \quad (2.6)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{C_\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{re \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon}{e} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon). \quad (2.7)$$

Здесь  $(x, r, \varphi)$  — цилиндрическая система координат с началом на задней кромке тела; ось  $x$  направлена противоположно направлению движения тела;  $U, V, W, u', v', w'$  — компоненты скорости осредненного и пульсационного движения;  $\langle u'^2 \rangle, \langle v'^2 \rangle, \langle w'^2 \rangle, \langle u'v' \rangle, \langle u'w' \rangle,$

$\langle v'w' \rangle$  — рейнольдсовы напряжения;  $e = (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle)/2$  — энергия турбулентности;  $\langle \rangle$  — знак осреднения. В правых частях уравнений (2.1), (2.2), (2.4)–(2.7) члены с молекулярной вязкостью отброшены в предположении малости.

Касательные турбулентные напряжения определяются из неравновесных алгебраических соотношений [15]:

$$\langle u'v' \rangle = \alpha_1 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (2.8)$$

$$\langle u'w' \rangle = \alpha_1 \left( \langle u'v' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} + \langle v'w' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad (2.9)$$

$$\langle v'w' \rangle = \alpha_1 \left( \langle v'^2 \rangle r \frac{\partial(W/r)}{\partial r} + \frac{W}{r} (\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle) \right), \quad (2.10)$$

где  $\alpha_1 = -\lambda_1 e/\varepsilon$ ,  $\lambda_1 = (1 - C_2)/(C_1 + P/\varepsilon - 1)$ . В уравнениях (2.4)–(2.7) и соотношениях (2.8)–(2.10) величина  $P$  — порождение энергии турбулентности за счет осредненного движения:

$$P = - \left( \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} + \langle v'w' \rangle r \frac{\partial(W/r)}{\partial r} + \langle u'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial x} + \langle u'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial x} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial V}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{V}{r} \right).$$

В основу представленной выше математической модели положена модель [19]. Эмпирические постоянные модели принимались равными  $C_s = 0.22$ ,  $C_\varepsilon = 0.17$ ,  $\alpha = 0.93$ ,  $C_1 = 0.6$ ,  $C_2 = 2.2$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1.45$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ . В качестве начальных условий при  $x = 10D$  задавались экспериментально полученные поперечные распределения  $U$ ,  $W$ ,  $\varepsilon$ ,  $\langle u'_i u'_i \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ). При  $r \rightarrow \infty$  ставились условия невозмущенного потока, при  $r = 0$  — условия симметрии для  $U$ ,  $\langle u'_i u'_i \rangle$ ,  $\varepsilon$  и антисимметрии для  $V$ ,  $W$ :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial \langle u'_i u'_i \rangle}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = V = W = 0.$$

Из математической модели и соответствующих начальных и граничных условий для рассматриваемого течения вытекают следующие законы сохранения суммарного избыточного импульса и момента количества движения:

$$J(x) = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty \left[ UU_1 - \int_r^\infty \frac{[W^2 + \langle w'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle]}{r'} dr' + \langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle \right] r dr = J(x_0), \quad (2.11)$$

$$M(x) = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty (UW + \langle u'w' \rangle) r^2 dr = 0, \quad (2.12)$$

где  $U_1 = U - U_0$  — дефект продольной компоненты скорости;  $\rho_0 = \text{const}$  — плотность жидкости.

Численная реализация модели основана на применении конечно-разностного алгоритма первого порядка аппроксимации на подвижных сетках. В сравнении с [12, 14] он модифицирован с целью достижения консервативности по отношению к законам сохранения (2.11), (2.12). Алгоритм и его тестирование подробно изложены в [14, 18].

Результаты численных экспериментов [18, 20] демонстрируют удовлетворительное соответствие рассчитанных и экспериментально измеренных [18] распределений тангенциальной компоненты  $W$  и дефекта продольной компоненты средней скорости, интенсивностей турбулентных флуктуаций компонент скорости  $\sigma_u = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ ,  $\sigma_v = \sqrt{\langle v'^2 \rangle}$ ,  $\sigma_w = \sqrt{\langle w'^2 \rangle}$ .

В качестве иллюстрации ниже сопоставляются рассчитанные и измеренные поперечные распределения трех компонент интенсивностей турбулентности (рис. 2) и характерных масштабов турбулентного течения в следе в зависимости от расстояния от тела (рис. 3). Сплошными линиями на рис. 2 показаны результаты расчетов, экспериментальные данные — точками ( $x/D = 20$  (1), 30 (2), 46 (3)). Сплошная кривая на рис. 3 — рассчитанное изменение  $\tilde{U}_{10} = U_{10}/U_0$  осевого значения дефекта продольной компоненты скорости (экс-

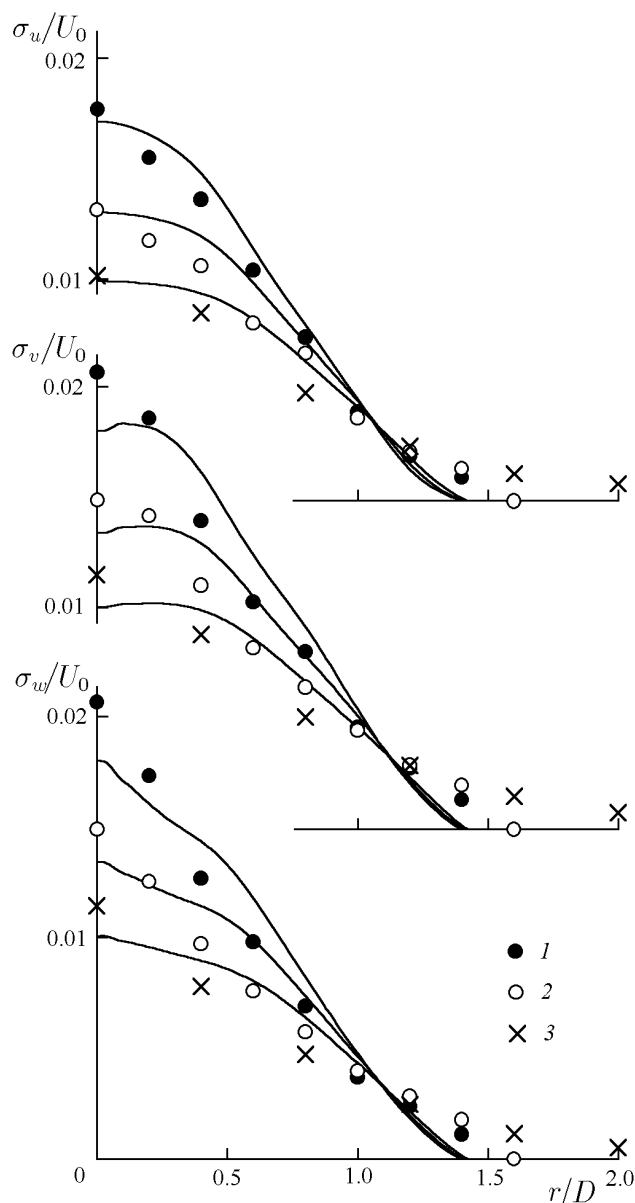


Рис. 2. Поперечные распределения трех компонент интенсивностей турбулентности в следе на различных расстояниях от тела.



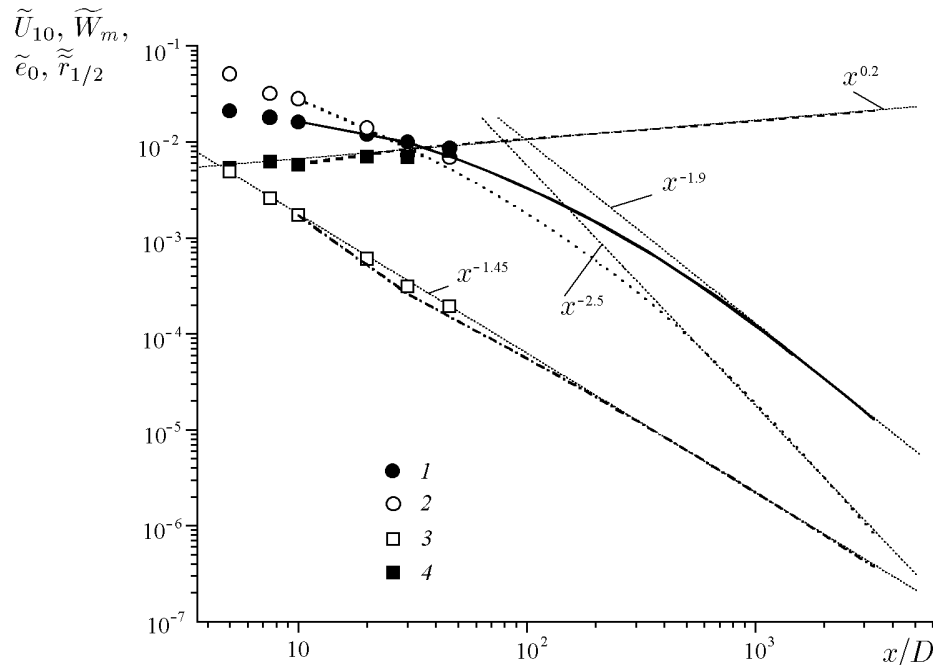


Рис. 3. Изменение характерных масштабов турбулентного течения в следе в зависимости от расстояния от тела.

перимент — точки 1);  $\widetilde{W}_m = |W|_{\max}/U_0$  — максимальное в данном сечении следа значение окружной компоненты скорости (пунктирная линия — расчет, эксперимент — точки 2);  $\widetilde{e}_0 = e_0/U_0^2$  — энергия турбулентности на оси следа (штрихпунктирная линия и точки 3);  $\widetilde{r}_{1/2} = 10^{-2} \cdot r_{1/2}/D$  — характерный масштаб ширины следа (штриховая линия и точки 4), определенный из условия

$$\langle u'^2 \rangle^{1/2}(r_{1/2}, x) = 0.5 \langle u'^2 \rangle^{1/2}(0, x).$$

Степенная зависимость от  $x$  осевых значений всех масштабных функций приведена на рис. 3; на основе анализа результатов расчетов получено, что при  $x/D > 1000$  достигается и аффинное подобие распределений.

### 3. Распространение пассивной примеси от локализованного источника в свободных турбулентных течениях

Ниже в качестве примера рассмотрена задача о динамике пассивной примеси, распространяющейся от мгновенного локализованного источника в зоне турбулентного смешения. Источник имитировался заданием начального распределения осредненной концентрации пассивной примеси в виде финитной функции, принимающей постоянное значение в круге малого радиуса. Построена численная модель и представлены результаты расчетов в случае, когда положение источника примеси не совпадает с центром турбулизованной области. Процесс распространения примеси при этом характеризуется смещением положения максимума осредненной концентрации к центру турбулизованной области, однако это смещение происходит чрезвычайно медленно в сравнении с вырождением турбулентности.

## Постановка задачи

Для описания течения, возникающего при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде, привлекается следующая система осредненных уравнений :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \langle u'^2 \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \langle u'v' \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'^2 \rangle - \frac{g \langle \rho_1 \rangle}{\rho_o}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial t} + U \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} + V \frac{d\rho_s}{dy} = -\frac{\partial}{\partial x} \langle u'\rho' \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'\rho' \rangle, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U \frac{\partial \Theta}{\partial x} + V \frac{\partial \Theta}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \langle u'\theta' \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'\theta' \rangle. \quad (3.5)$$

В уравнениях (3.1)–(3.5)  $U, V$  — компоненты скорости осредненного движения в направлении осей  $x, y$ ; ось  $x$  направлена горизонтально, ось  $y$  — вертикально вверх, против силы тяжести;  $p_1$  — отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией  $\rho_s(y)$ ;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\langle \rho_1 \rangle$  — осредненный дефект плотности:  $\rho_1 = \rho - \rho_s$ ;  $\rho_s = \rho_s(y)$  — плотность невозмущенной жидкости,  $\Theta$  — осредненная концентрация пассивной примеси; штрихом обозначены пульсационные составляющие;  $\langle \rangle$  — по-прежнему знак осреднения.

Стратификация предполагается устойчивой и слабой, и используется приближение Обербека — Буссинеска; члены с молекулярной вязкостью и диффузией отброшены в предположении малости.

Система уравнений (3.1)–(3.5) незамкнута; для определения нормальных рейнольдсовых напряжений  $\langle u'_i u'_j \rangle$  ( $i = j = 1, 2, 3$ ), потоков  $\langle u'_i \rho' \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и дисперсии флуктуаций плотности  $\langle \rho'^2 \rangle$  воспользуемся алгебраическими аппроксимациями [21]:

$$\frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{e} = \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{1 - C_2}{C_1} \left( \frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P}{\varepsilon} \right) + \frac{1 - C_3}{C_1} \left( \frac{G_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{G}{\varepsilon} \right), \quad (3.6)$$

$$P_{ij} = - \left\{ \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\}, \quad G_{ij} = -\frac{1}{\rho_o} (\langle u'_i \rho' \rangle g_j + \langle u'_j \rho' \rangle g_i),$$

$$\mathbf{g} = (0, -g, 0), \quad U_1 = U, \quad U_2 = V, \quad 2P = P_{ii}, \quad 2G = G_{ii},$$

$$-\langle u'\rho' \rangle = \frac{\langle u'^2 \rangle e}{C_{1t} \varepsilon} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x}, \quad (3.7)$$

$$-\langle v'\rho' \rangle = \frac{e}{C_{1t} \varepsilon} \left\{ \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} + \frac{1 - C_{2t}}{\rho_o} g \langle \rho'^2 \rangle \right\}, \quad (3.8)$$

$$\langle \rho'^2 \rangle = -\frac{2}{C_t \varepsilon} \frac{e}{\rho_o} \langle v'\rho' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}. \quad (3.9)$$

В дополнение к уравнениям (3.1)–(3.5) и соотношениям (3.6)–(3.9) привлекаются дифференциальные уравнения переноса энергии турбулентности  $e$ , скорости диссипации  $\varepsilon$  и касательного рейнольдсова напряжения  $\langle u'v' \rangle$ :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + U \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} K_{ex} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial e}{\partial y} + P + G - \varepsilon, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} K_{\varepsilon x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_{\varepsilon y} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} (P + G) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial t} + U \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} K_{\varepsilon x} \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} K_{\varepsilon y} \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} + (1 - C_2) P_{12} + (1 - C_3) G_{12} - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \langle u'v' \rangle. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Коэффициенты турбулентной вязкости  $K_{\varepsilon x}$ ,  $K_{\varepsilon y}$ ,  $K_{\varepsilon x}$ ,  $K_{\varepsilon y}$  определяются из соотношений

$$K_{\varepsilon x} = \frac{1 - C_2 e \langle u'^2 \rangle}{C_1 \varepsilon}, \quad K_{\varepsilon x} = K_{\varepsilon x} / \sigma, \quad (3.13)$$

$$K_{\varepsilon y} = \frac{\frac{e}{C_1 \varepsilon} \left[ (1 - C_2) \langle v'^2 \rangle - \frac{g}{\rho_0} \frac{e}{C_{1t} \varepsilon} (1 - C_3) (1 - C_{2t}) \langle v' \rho' \rangle \right]}{1 - \frac{g}{\rho_0} \frac{1 - C_3}{C_1 C_{1t}} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}}, \quad K_{\varepsilon y} = K_{\varepsilon y} / \sigma. \quad (3.14)$$

Величины  $\langle u'\theta' \rangle$ ,  $\langle v'\theta' \rangle$  определим с помощью соотношений, подобных применяемым для аппроксимации  $\langle u'\rho' \rangle$ ,  $\langle v'\rho' \rangle$ :

$$\begin{aligned} -\langle u'\rho' \rangle &= K_{\rho x} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x}, & -\langle v'\rho' \rangle &= K_{\rho y} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}, \\ -\langle u'\theta' \rangle &= K_{\theta x} \frac{\partial \Theta}{\partial x}, & -\langle v'\theta' \rangle &= K_{\theta y} \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$K_{\rho x} = K_{\theta x} = \frac{\langle u'^2 \rangle e}{C_{1t} \varepsilon}, \quad K_{\rho y} = K_{\theta y} = \frac{\frac{e \langle v'^2 \rangle}{C_{1t} \varepsilon}}{1 - 2 \frac{g}{\rho_0} \frac{1 - C_{2t}}{C_t C_{1t}} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}}.$$

В соотношениях и уравнениях (3.6)–(3.15) величины  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_{1t}$ ,  $C_{2t}$ ,  $C_t$ ,  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$ ,  $\sigma$  — эмпирические постоянные. Значения эмпирических постоянных выбирались равными:  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ ;  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ ;  $\sigma = 1.3$ ;  $C_1 = 2.2$ ;  $C_2 = C_3 = 0.55$ ;  $C_t = 1.25$ ;  $C_{1t} = 3.2$ ;  $C_{2t} = 0.5$  (они являются общепринятыми).

В качестве граничных и начальных условий принимались следующие:

$$U = V = \langle \rho_1 \rangle = e = \varepsilon = \Theta = \langle u'v' \rangle = 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad t \geq 0; \quad (3.16)$$

$$e(0, x, y) = e_0(r), \quad \varepsilon(0, x, y) = \varepsilon_0(r), \quad \Theta(0, x, y) = \Theta_0(x, y), \quad r^2 = x^2 + y^2 \leq R^2, \quad t = 0, \quad (3.17)$$

$$e(0, x, y) = \varepsilon(0, x, y) = \Theta(0, x, y) = 0, \quad r^2 \geq R^2;$$

$$\langle \rho_1 \rangle = U = V = \langle u'v' \rangle = 0, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < x < \infty, \quad t = 0. \quad (3.18)$$

Здесь  $e_0(r)$ ,  $\varepsilon_0(r)$  — финитные колоколообразные функции;  $R$  — радиус области турбулизованной жидкости в начальный момент времени. В качестве  $\Theta_0(x, y)$  задавалась функция, равная  $\Theta^0 = \text{const}$  в круге  $\Omega^0$  радиуса  $R_0 < R$  и нулю вне этого круга. Таким образом имитировался мгновенный локализованный источник примеси. При численном решении задачи нулевые краевые условия, соответствующие  $r \rightarrow \infty$ , сносились на границы достаточно большого прямоугольника.

Переменные задачи могут быть обезразмерены с применением в качестве масштаба длины величины  $R$  (радиуса области турбулизованной жидкости в начальный момент времени) и масштаба скорости  $U_0 = \sqrt{e(0, 0, 0)}$ . Воспользуемся также следующим представлением для безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} x^* &= x/R, & y^* &= y/R, & U_i^* &= U_i/U_0, & \langle u'_i u'_j \rangle^* &= \langle u'_i u'_j \rangle / U_0^2, & \varepsilon^* &= \varepsilon R / U_0^3, \\ \langle \rho \rangle^* &= \langle \rho \rangle / a R \rho_0, & t^* &= t/\tau, & \tau &= R/U_0, & \Theta^* &= \Theta / \Theta_m(0), & \Theta_m(0) &= \max_{x,y} \Theta_0(x, y), \\ & & a &= -(1/\rho_0) d\rho_s / dy, & & & & & & y = 0. \end{aligned}$$

В результате в обезразмеренных уравнениях вместо  $g$  будет фигурировать величина  $4\pi^2/\text{Fr}^2$ , где  $\text{Fr}$  — плотностное число Фруда, определяемое равенством

$$\text{Fr} = \frac{U_0 T}{R}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{ag}} \quad (3.19)$$

( $T$  — период Вайсяля — Брента).

Для численного решения задачи вводились в рассмотрение функция тока  $\psi$  и завихренность  $\omega$ :  $\omega = \partial U / \partial y - \partial V / \partial x$ ,  $U = \partial \psi / \partial y$ ,  $V = -\partial \psi / \partial x$ .

Конечно-разностный алгоритм решения задачи основан на применении методов расщепления по пространственным переменным. Осуществлялся переход к новой системе координат:  $t' = t$ ,  $x' = \varphi_1(x)$ ,  $y' = \varphi_2(y)$ . Построенный алгоритм имеет порядок аппроксимации  $O(\Delta t + h^2)$ , где  $\Delta t$ ,  $h$  — параметры дискретизации сеточной области по переменным  $t'$ ,  $x'$ ,  $y'$ . Алгоритм детально изложен в [22].

## Результаты расчетов

Гидродинамические аспекты течения, генерируемого зоной турбулентного смешения, изучены достаточно подробно (краткий обзор работ можно найти в [22, 23]). С целью анализа процесса распространения пассивной примеси от локализованного источника в линейно-стратифицированной среде выполнена серия численных экспериментов. Рассмотрены, в частности, следующие варианты расхождения круга  $\Omega^0$ , характеризующиеся значениями абсциссы и ординаты  $x_0$ ,  $y_0$ : 1)  $x_0 = y_0 = 0$ ; 2)  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0.57R$ ; 3)  $x_0 = y_0 = 0.57R$ .

Процесс распространения примеси иллюстрируется рис. 4, на котором представлено изменение во времени величины  $r_m(t) = \sqrt{(x_m(t))^2 + (y_m(t))^2}$ , характеризующей положение максимума концентрации  $\Theta_m(t) = \Theta^*(t, x_m, y_m)$  относительно центра турбулизованной области. Кривые 1 ( $g = 0$ , однородная жидкость), 3 ( $\text{Fr} = 4.7$ ), 4 ( $\text{Fr} = 22.1$ ) получены для варианта 3 начальных условий. Кривая 2 соответствует варианту 2 ( $\text{Fr} = 4.7$ ). Можно видеть, что на рассмотренном интервале времени наблюдается существенная зависимость распределения осредненной концентрации пассивной примеси от начальных данных. При этом значение энергии турбулентности в центре зоны смешения успеваает уменьшиться по меньшей мере на три порядка, т. е. процесс вырождения энергии турбулентности в зоне турбулентного смешения происходит значительно быстрее уменьшения величины  $r_m(t)$ .

Выполнено также численное моделирование динамики пассивной примеси от локализованного источника в зоне турбулентного смешения в пикноклине [24]. Результаты расчетов показали возможность ситуаций, когда распространение пассивной примеси в значительной мере определяется конвективным течением, генерируемым зоной турбулентного смешения.

Эффекты памяти при распространении тепла от линейного источника в плоском турбулентном следе продемонстрированы в [25].

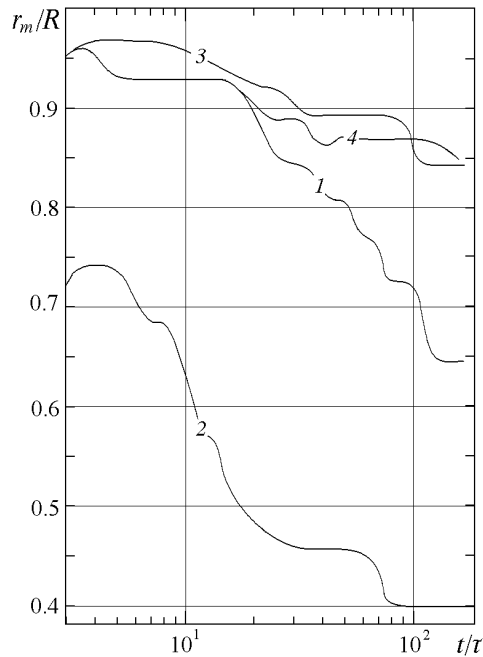


Рис. 4. Изменение во времени величины  $r_m(t)$ ;  $\tau = R/U_0$ .

#### 4. Турбулентные следы в стратифицированных жидкостях

Интересным примером пространственного свободного турбулентного течения является турбулентный след за телом вращения в устойчиво стратифицированной среде. Течение, возникающее в турбулентном следе за телом, движущимся в стратифицированной жидкости, весьма своеобразно. При сравнительно слабой стратификации турбулентный след вначале развивается почти так же, как и в однородной жидкости, и расширяется симметрично. Однако турбулентной диффузии в вертикальном направлении препятствуют архимедовы силы, поэтому на больших расстояниях от тела след приобретает сплюсненную форму и наконец совсем перестает расти в вертикальном направлении. Поскольку вследствие турбулентного перемешивания плотность жидкости в пределах следа распределена более равномерно, чем вне его, архимедовы силы стремятся восстановить прежнее состояние устойчивой стратификации. В результате в плоскости, перпендикулярной оси следа, возникают конвективные течения, приводящие к интенсивной генерации внутренних волн в окружающей жидкости.

Турбулентные следы и генерируемые ими внутренние волны, будучи достаточно подробно изученными в лабораторных экспериментах, представляют интерес как тест для проверки применимости математических моделей. Наиболее полная экспериментальная информация относится к безимпульсным турбулентным следам в линейно стратифицированной среде [26]. Вопрос о построении их численных моделей будет рассмотрен ниже.

#### Постановка задачи

Для описания течения в дальнем турбулентном следе за телом вращения в стратифицированной среде привлекается следующая параболизированная система осредненных уравнений

движения, неразрывности и несжимаемости в приближении Обербека — Буссинеска:

$$U_\infty \frac{\partial U_d}{\partial x} + V \frac{\partial U_d}{\partial y} + W \frac{\partial U_d}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle, \quad (4.1)$$

$$U_\infty \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'^2 \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle, \quad (4.2)$$

$$U_\infty \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'w' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'^2 \rangle - g \frac{\langle \rho_1 \rangle}{\rho_0}, \quad (4.3)$$

$$U_\infty \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial z} + W \frac{d\rho_s}{dz} = -\frac{\partial}{\partial y} \langle v'\rho' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'\rho' \rangle, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (4.5)$$

Здесь величина  $U_d = U_\infty - U$  — дефект осредненной продольной компоненты скорости;  $U$ ,  $V$ ,  $W$  — компоненты скорости осредненного движения в направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $p_1$  — отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией  $\rho_s$ ;  $U_\infty$  — скорость набегающего невозмущенного потока;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\langle \rho_1 \rangle$  — осредненный дефект плотности:  $\rho_1 = \rho - \rho_s$ ;  $\rho_s = \rho_s(z)$  — плотность невозмущенной жидкости:  $d\rho_s/dz \leq 0$  (устойчивая стратификация),  $\rho_0 = \rho_s(0)$ ; штрихом обозначены пульсационные составляющие. Система координат связана с движущимся телом так, что скорость его движения равна  $-U_\infty$ , а ось  $z$  направлена вертикально вверх, против силы тяжести. Плотность жидкости считается линейной функцией температуры, стратификация предполагается слабой. В правых частях уравнений (4.1)–(4.4) опущены в силу малости слагаемые, содержащие производную по переменной  $x$ , а также сомножители в виде коэффициента ламинарной вязкости или диффузии.

Система уравнений (4.1)–(4.5) незамкнута. Ниже рассмотрены четыре полуэмпирические модели, каждая из которых вместе с уравнениями (4.1)–(4.5) образует замкнутую модель течения.

В модели 1 величины компонент тензора рейнольдсовых напряжений  $\langle u'_i u'_j \rangle$  (кроме  $\langle u'_2 u'_3 \rangle = \langle v'w' \rangle$ ), турбулентных потоков  $\langle u'_i \rho' \rangle$  и дисперсии флуктуаций плотности  $\langle \rho'^2 \rangle$  аппроксимированы алгебраическими соотношениями [21]:

$$\frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{e} = \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{1 - c_2}{c_1} \left( \frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P}{\varepsilon} \right) + \frac{1 - c_3}{c_1} \left( \frac{G_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{G}{\varepsilon} \right), \quad (4.6)$$

$$-\langle u'_i \rho' \rangle = \frac{e}{c_{1T} \varepsilon} \left[ \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_k} + (1 - c_{2T}) \left( \langle u'_k \rho' \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{g_i}{\rho_0} \langle \rho'^2 \rangle \right) \right], \quad (4.7)$$

$$\langle \rho'^2 \rangle = -\frac{2}{c_T} \frac{e}{\varepsilon} \langle u'_k \rho' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_k}, \quad (4.8)$$

$$P_{ij} = - \left\{ \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\}, \quad (4.9)$$

$$G_{ij} = \frac{1}{\rho_0} (\langle u'_i \rho' \rangle g_j + \langle u'_j \rho' \rangle g_i), \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g), \quad 2P = P_{ii}, \quad 2G = G_{ii}, \quad U_1 = U, \quad U_2 = V, \quad U_3 = W.$$

Выражения (4.6)–(4.9) упрощаются с учетом физических особенностей рассматриваемого течения — спутного струйного турбулентного течения в поле силы тяжести на больших расстояниях от тела. При этом интересующие нас слагаемые порождения (4.9) заменяются приближенными соотношениями

$$P_{11} = 2 \left( \langle u'v' \rangle \frac{\partial U_d}{\partial y} + \langle u'w' \rangle \frac{\partial U_d}{\partial z} \right),$$

$$P_{22} = P_{33} = 0, \quad P_{12} = \langle v'^2 \rangle \frac{\partial U_d}{\partial y}, \quad P_{13} = \langle w'^2 \rangle \frac{\partial U_d}{\partial z}.$$

Выражения (4.6)–(4.8) переписываются следующим образом:

$$\langle u'v' \rangle = \frac{1 - c_2}{c_1} \frac{e \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial U_d}{\partial y} = K_y \frac{\partial U_d}{\partial y}, \quad (4.10)$$

$$\langle u'w' \rangle = \frac{\left[ (1 - c_2) e \langle w'^2 \rangle - \frac{(1 - c_3)(1 - c_{2T})}{c_{1T}} \frac{g}{\rho_0} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \langle w' \rho' \rangle \right]}{c_{1T} \varepsilon \left( 1 - \frac{(1 - c_3) g}{c_1 c_{1T}} \frac{e^2}{\rho_0 \varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)} \frac{\partial U_d}{\partial z} = K_z \frac{\partial U_d}{\partial z}, \quad (4.11)$$

$$\langle \rho'^2 \rangle = -\frac{2}{c_T} \frac{e}{\varepsilon} \langle w' \rho' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}, \quad (4.12)$$

$$-\langle u' \rho' \rangle = \frac{1}{c_{1T}} \frac{e}{\varepsilon} \left[ \langle u'w' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + (1 - c_{2T}) \langle w' \rho' \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right], \quad (4.13)$$

$$-\langle v' \rho' \rangle = \frac{1}{c_{1T}} \frac{e}{\varepsilon} \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} = K_{\rho y} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} -\langle w' \rho' \rangle &= \frac{e}{c_{1T} \varepsilon} \left[ \langle w'^2 \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + (1 - c_{2T}) \frac{g}{\rho_0} \langle \rho'^2 \rangle \right] = \\ &= \frac{e \langle w'^2 \rangle}{c_{1T} \varepsilon \left( 1 - 2 \frac{1 - c_{2T}}{c_{1T} c_T} \frac{g}{\rho_0} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} = K_{\rho z} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Для определения значений энергии турбулентности  $e$ , скорости диссипации  $\varepsilon$  и касательного рейнольдсова напряжения  $\langle v'w' \rangle$  привлекаются дифференциальные уравнения переноса:

$$U_\infty \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} + W \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial e}{\partial z} + P + G - \varepsilon, \quad (4.16)$$

$$U_\infty \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + W \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{\varepsilon y} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{\varepsilon z} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} (P + G) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} U_\infty \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z} + (1 - c_2) P_{23} + (1 - c_3) G_{23} - c_1 \frac{\varepsilon}{e} \langle v'w' \rangle, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$P_{23} = - \left( \langle v'^2 \rangle \frac{\partial W}{\partial y} + \langle w'^2 \rangle \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad G_{23} = -\frac{g}{\rho_0} \langle v' \rho' \rangle.$$

Коэффициенты турбулентной вязкости в уравнениях (4.16)–(4.18) равны:  $K_{ey} = K_y$ ,  $K_{ez} = K_z$ ,  $K_{ey} = K_{ey}/\sigma$ ,  $K_{ez} = K_{ez}/\sigma$ .

В результате выполненных построений модель 1 дальнего турбулентного следа представляет собой систему дифференциальных уравнений (4.1)–(4.5), (4.16)–(4.18) с учетом (4.10)–(4.15).

Основное отличие математической модели 2 от модели 1 заключается в использовании для определения компонент тензора рейнольдсовых напряжений (вместо “изотропных” [21] соотношений (4.6)) локально-равновесного приближения ( $P = \varepsilon$ )

$$\frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{e} = -\frac{2(1-c_2-c_1)}{3} \frac{\delta_{ij}}{c_1} + \frac{(1-c_2)P_{ij}}{c_1 \varepsilon} + \frac{(1-c_3)G_{ij}}{c_1 \varepsilon}. \quad (4.19)$$

Соотношения (4.6) представляются более предпочтительными в связи с тем, что в безимпульсных следах в однородной жидкости достаточно точно выполняется соотношение  $\langle u'_i u'_i \rangle = (2/3)e$ .

В модели 3 величины  $\langle u_i'^2 \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\langle u'_2 u'_3 \rangle = \langle v' w' \rangle$  вычисляются путем решения соответствующих дифференциальных уравнений переноса с упрощенными представлениями коэффициентов турбулентной вязкости:

$$U_\infty \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial z} +$$

$$+ P_{ij} + G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon - c_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} e \right) - c_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) - c_3 \left( G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G \right), \quad (4.20)$$

$$K_{ey} = c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle v'^2 \rangle, \quad K_{ez} = c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle w'^2 \rangle, \quad (4.21)$$

$$e = (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle)/2.$$

Здесь  $P_{ij}$ ,  $G_{ij}$ ,  $P$ ,  $G$  по-прежнему задаются соотношениями (4.9); значения  $\varepsilon$  определяются из дифференциального уравнения (4.17) с учетом (4.21):  $K_{ey} = K_{ey}/\sigma$ ,  $K_{ez} = K_{ez}/\sigma$ . Для величин  $\langle u'v' \rangle$ ,  $\langle u'w' \rangle$  сохраняются алгебраические аппроксимации (4.10), (4.11). Как и в моделях 1, 2, для отыскания  $\langle \rho'^2 \rangle$ ,  $\langle u'_i \rho' \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) используется локально-равновесное приближение (4.12)–(4.15).

Отличие модели 4 от модели 3 состоит в отказе от локально-равновесного приближения (4.13)–(4.15) и привлечении для определения величин  $\langle u'_i \rho' \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) следующих неравновесных алгебраических аппроксимаций [27]:

$$-\langle u'_i \rho' \rangle = \Phi_T \frac{e}{\varepsilon} \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_k} - \Phi'_T \frac{e}{\varepsilon} P_{iT}, \quad (4.22)$$

$$P_{iT} = \langle u'_k \rho' \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{g_i}{\rho_0} \langle \rho'^2 \rangle, \quad \Phi_T = \left( c_{1T} + \frac{1}{2} \left( \frac{P+G}{\varepsilon} - 1 \right) \right)^{-1}, \quad \Phi'_T = (1 - c_{2T}) \Phi_T.$$

При этом с учетом особенностей рассматриваемого течения (как и в модели 1) аппроксимации (4.22) приводятся к упрощенному виду:

$$-\langle u' \rho' \rangle = \Phi_T \frac{e}{\varepsilon} \left( \langle u'w' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + (1 - c_{2T}) \langle w' \rho' \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right),$$

$$-\langle v' \rho' \rangle = \Phi_T \frac{e}{\varepsilon} \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} = K_{\rho y} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y},$$



$$-\langle w' \rho' \rangle = \Phi_T \frac{e}{\varepsilon} \langle w'^2 \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + \Phi'_T \frac{g}{\rho_0} \frac{e}{\varepsilon} \langle \rho'^2 \rangle = \frac{\Phi_T \frac{e}{\varepsilon} \langle w'^2 \rangle}{1 - 2 \frac{1}{c_T} \Phi'_T \frac{g}{\rho_0} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} = K_{\rho z} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}. \quad (4.23)$$

Таким образом, модель 4 состоит из дифференциальных уравнений (4.1)–(4.5), (4.17), (4.20), а также соотношений (4.10)–(4.12), (4.21)–(4.23).

Отметим, что ни одна из представленных математических моделей течения не является стандартной (исключение в определенном смысле составляет лишь модель 2). При их получении принималось во внимание то обстоятельство, что цель построений — получение удовлетворительного соответствия с имеющимися экспериментальными данными.

В приведенных выше уравнениях и соотношениях эмпирические постоянные  $c_1, c_2, c_3, c_{1T}, c_{2T}, c_T, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, c_S, \sigma$  полагались равными соответственно 2.2, 0.55, 0.55, 3.2, 0.5, 1.25, 1.45, 1.90, 0.25, 1.3. Эти значения являются общепринятыми [21, 27].

Переменная  $x$  в уравнениях (4.1)–(4.4), (4.16)–(4.18), (4.20) играет роль времени. На расстоянии  $x = x_0$  от тела задавались начальные условия

$$\begin{aligned} U_d(x_0, y, z) &= \Theta_1(r), \quad e(x_0, y, z) = \Theta_2(r), \quad \varepsilon(x_0, y, z) = \Theta_3(r), \\ r^2 &= y^2 + z^2, \quad 0 \leq r < \infty, \quad \langle \rho \rangle = \rho_s(z) = \rho_0(1 - az), \\ V &= W = \langle v' w' \rangle = 0, \quad \langle u'^2 \rangle = \langle v'^2 \rangle = \langle w'^2 \rangle = (2/3)e, \\ -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty, \quad x &= x_0; \quad a = -(1/\rho_0)d\rho_s/dz \text{ при } z = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Здесь  $\Theta_1(r), \Theta_2(r), \Theta_3(r)$  — колоколообразные функции, согласующиеся с экспериментальными данными Линя и Пао [26, 28] в однородной жидкости.

При  $r \rightarrow \infty$  ставились условия невозмущенного потока

$$U_d = e = \varepsilon = \langle v' w' \rangle = \langle u'^2_i \rangle = \langle \rho_1 \rangle = V = W = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.25)$$

Из соображений симметрии решение отыскивалось лишь в первом квадранте плоскости  $(y, z)$  с применением граничных условий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u'^2_i \rangle}{\partial y} &= \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = V = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial U_d}{\partial y} = \langle v' w' \rangle = 0, \\ y &= 0, \quad z \geq 0; \\ \frac{\partial \langle u'^2_i \rangle}{\partial z} &= \langle \rho_1 \rangle = \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = W = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U_d}{\partial z} = \langle v' w' \rangle = 0, \\ z &= 0, \quad y \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Переменные задачи обезразмериваются с использованием масштаба длины  $D$  — диаметра тела и масштаба скорости  $U_\infty$ . Безразмерные переменные вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} x^* &= x/D, \quad y^* = y/D, \quad z^* = z/D; \quad U_i^* = U_i/U_\infty; \\ e^* &= e/U_\infty^2; \quad \varepsilon^* = \varepsilon D/U_\infty^3; \\ \langle \rho_1 \rangle^* &= \langle \rho_1 \rangle / (aD\rho_0); \quad \langle \rho'^2 \rangle^* = \langle \rho'^2 \rangle / (aD\rho_0)^2; \\ \langle u'_i u'_j \rangle^* &= \langle u'_i u'_j \rangle / U_\infty^2, \quad \langle u'_i \rho' \rangle^* = \langle u'_i \rho' \rangle / (aD\rho_0 U_\infty). \end{aligned}$$

В результате в безразмерных уравнениях вместо  $g$  будет фигурировать величина  $4\pi^2/F_D^2$ , где  $F_D$  — плотностное число Фруда, определяемое равенством

$$F_D = \frac{U_\infty T}{D}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{ag}} = \frac{1}{N},$$

где  $T, N$  — период и частота Вайсяля — Брента. Для интерпретации результатов расчетов удобно ввести в рассмотрение время  $t$ , связанное с расстоянием от тела:

$$t = \frac{x}{U_\infty}, \quad t^* = \frac{t}{T} = \frac{x D}{U_\infty D T} = \frac{x^*}{F_D}.$$

Прежде чем переходить к краткому описанию алгоритмов расчета, отметим, что, как показывают результаты численных экспериментов [13, 32], уравнение (4.5) может быть существенно упрощено и записано в виде

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (4.5')$$

Систему уравнений (4.2), (4.3), (4.5') удобно свести к следующей:

$$U_\infty \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} + W \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle v' w' \rangle + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle v' w' \rangle, \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \omega. \quad (4.28)$$

Здесь функция тока  $\psi$  определяется равенствами  $V = \partial \psi / \partial z$ ,  $W = -\partial \psi / \partial y$ .

## Алгоритмы решения задачи

Для построения конечно-разностных алгоритмов вводятся новые независимые переменные

$$x' = x, \quad \xi = y' = \chi_1(y), \quad \eta = z' = \chi_2(z), \quad (x = x', \quad y = \varphi_1(\xi), \quad z = \varphi_2(\eta)). \quad (4.29)$$

Функции  $\varphi_1, \varphi_2$  задавались таблично, их выбор позволял осуществлять сгущение узлов сетки в окрестности турбулентного следа. В новой системе координат  $(x', \xi, \eta)$  узлы расчетной сетки на плоскости  $(\xi, \eta)$  распределялись равномерно:  $\xi_i = i\Delta\xi, \eta_j = j\Delta\eta, i = 0, \dots, M_1; j = 0, \dots, M_2; \varphi_1(\xi_{M_1}) = y_*, \varphi_2(\xi_{M_2}) = z_*$ . Величина  $\Delta x$  шага сетки в направлении оси  $x'$  выбиралась переменной.

Разработаны два алгоритма решения задачи. Первый из них основан на применении упрощенного уравнения несжимаемости (4.5') и неявных методов расщепления по пространственным переменным. При решении модельных задач применялась также модификация алгоритма на адаптивных подвижных сетках [22]. Второй алгоритм построен с использованием уравнения несжимаемости (4.5) и основан на применении явного метода расщепления по физическим процессам при интегрировании системы уравнений (4.2), (4.3), (4.5) и неявных методов расщепления по пространственным переменным при интегрировании других дифференциальных уравнений. Подробное изложение алгоритмов расчета и результатов их тестирования приведено в [29, 30, 32, 33].

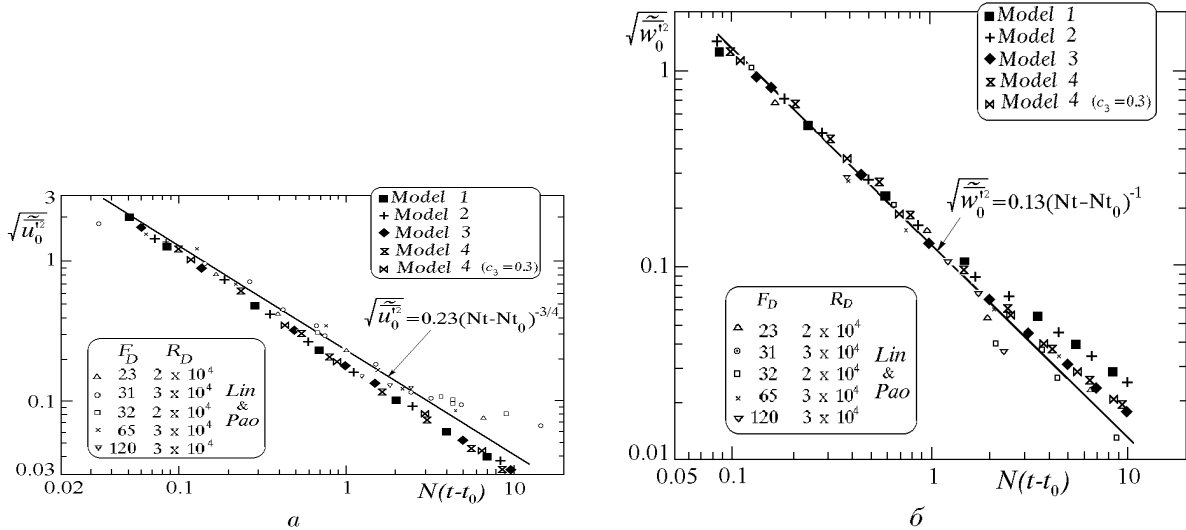


Рис. 5. Изменение интенсивности флуктуаций горизонтальной (а) и вертикальной (б) компонент скорости на оси следа.

## Некоторые результаты расчетов

Динамика безимпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде иллюстрируется данными, представленными на рис. 5, 6.

На рис. 5 рассчитанные с применением моделей 1–4 осевые значения интенсивностей турбулентных флуктуаций продольной и вертикальной компонент скорости  $\overline{u_0^2} = F_D^{3/2} \langle u^2(t, 0, 0) \rangle^*$ ,  $\overline{w_0^2} = F_D^{3/2} \langle w^2(t, 0, 0) \rangle^*$  сопоставляются с результатами лабораторных измерений Линя и Пао [26],  $t_0 = 2/F_D$ . Расчеты выполнены для значения числа Фруда  $F_D = 120$ . Прямые линии на рис. 5, а также на рис. 6 проведены Линем, Пао и их соавторами для асимптотических оценок экспериментальных данных о вырождении турбулентных следов. Все рассмотренные модели дают близкие результаты по изменению осевых значений интенсивности флуктуаций продольной компоненты скорости  $\overline{u_0^2}$ . Рассчитанное изменение во времени интенсивности турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости  $\overline{w_0^2}$  (рис. 5, б) существенно зависит от применяемой математической модели. Лишь математические модели 3, 4, включающие дифференциальные уравнения (4.20) переноса нормальных рейнольдсовых напряжений, позволяют удовлетворительно описать вырождение этой величины. При использовании моделей 1, 2 интенсивности находились из соответствующих алгебраических соотношений.

На рис. 6 осевые значения интенсивности турбулентных флуктуаций плотности  $\sum_c = \sqrt{\langle \rho^2(t, 0, 0) \rangle} / (aD\rho_0 F_D^{1/4})$  сравниваются с экспериментальными данными [26]. Совпадение достаточно хорошее для всех рассмотренных моделей, несмотря на использование для определения этой величины простейшего алгебраического соотношения (4.12).

Дальнейшее развитие численные модели дальнего безимпульсного турбулентного следа получили в работе [34], в которой для аппроксимации тройных корреляций пульсационных составляющих поля скорости привлекались усовершенствованные алгебраические модели, более детально учитывающие воздействие силы тяжести на процесс турбулентной

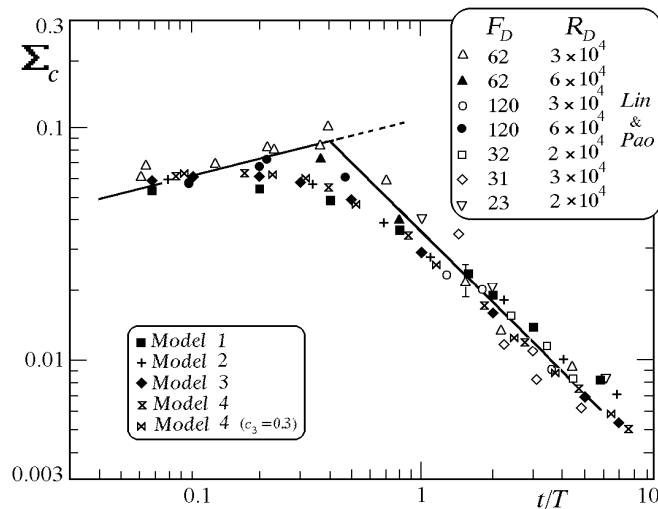


Рис. 6. Изменение интенсивности турбулентных флуктуаций плотности на оси следа.

диффузии в устойчиво стратифицированной жидкости.

Выполнено численное моделирование внутренних волн, генерируемых безимпульсным турбулентным следом в линейно стратифицированной жидкости [30]. Фазовая картина внутренних волн хорошо согласуется с результатами лабораторных измерений [31].

Построены численные модели динамики турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде [32, 35, 36]. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с известными экспериментальными данными Линя и Пао [28].

Выполнено численное моделирование динамики безимпульсного турбулентного следа и генерируемых им внутренних волн в пикноклине [33, 37]. Показано, что эволюция следа в пикноклине сопровождается более интенсивным расширением в горизонтальном направлении и сплющиванием в вертикальном. При этом при определенном соотношении ширины переходного слоя пикноклина и начального вертикального размера следа могут формироваться стационарные внутренние волны солитонного типа.

Осуществлено сопоставление характеристик внутренних волн, генерируемых турбулентными следами за самодвижущимся и буксируемым телами в линейно стратифицированной среде [32]. Показано, что турбулентный след за буксируемым телом генерирует волны значительно большей амплитуды. Последнее объясняется существенным различием динамики турбулентных следов за самодвижущимся и буксируемым телами.

На основе анализа результатов численных экспериментов построены упрощенные математические модели турбулентных следов в устойчиво стратифицированной среде и генерируемых ими внутренних волн [29, 30, 32, 33].

## Заключение

Приведен краткий обзор исследований свободных турбулентных течений, выполненных в ИВТ СО РАН в период с 1991 по 2000 гг. Численное моделирование осуществлялось с применением современных полуэмпирических моделей турбулентности. Подобный подход в настоящее время является основным при изучении турбулентных течений. Выполненный цикл исследований в достаточной мере наглядно демонстрирует его возможности. Дальнейшее совершенствование численных моделей свободных турбулентных течений пред-

ставляет задачу ближайших исследований.

## Список литературы

- [1] ЛЫТКИН Ю. М., ЧЕРНЫХ Г. Г. Расчеты корреляционных функций в изотропной турбулентности // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / Сиб. отд-ние АН СССР. ИГиЛ. 1978. Вып. 35. С. 74–78.
- [2] ЛОЙЦЯНСКИЙ Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
- [3] BATSCHLOR G. K., TOWNSEND A. A. Decay of isotropic turbulence in initial period // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1948. Vol. A193, No. 1035. P. 539–558.
- [4] КОСТОМАХА В. А. Экспериментальное моделирование изотропной турбулентности // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / Сиб. отд-ние АН СССР. ИГиЛ. 1985. Вып. 70. С. 92–104.
- [5] LING S. C., HUANG T. T. Decay of weak turbulence // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13, No. 12. P. 2912–2920.
- [6] МОНИН А. С., ЯГЛОМ А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
- [7] КЛИМЕНТЕНКО У. А., КОРОБИЦЫНА Ж. Л., ЧЕРНЫХ Г. Г. О численной реализации асимптотического решения Лойцянского — Миллионщикова // Мат. моделирование. 1995. Т. 7, №1. С. 69–80.
- [8] CHERNYKH G. G., KOROBITSINA Z. L., KOSTOMAKHA V. A. Numerical simulation of isotropic turbulence dynamics // IJCFD. 1998. Vol. 10. P. 173–182.
- [9] ФЕДОРОВА Н. Н., ЧЕРНЫХ Г. Г. О численном моделировании безымпulsiveного турбулентного следа за сферой // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние ВЦ; ИТПМ. 1992. Т. 6(23), №1. С. 129–140.
- [10] ФЕДОРОВА Н. Н., ЧЕРНЫХ Г. Г. О численном моделировании осесимметричных турбулентных следов // Там же. С. 141–159.
- [11] ФЕДОРОВА Н. Н., ЧЕРНЫХ Г. Г. О численном моделировании плоских турбулентных следов // Мат. моделирование. 1994. Т. 6, №10. С. 24–34.
- [12] ДЕМЕНКОВ А. Г., ЧЕРНЫХ Г. Г. О численном моделировании струйных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вычисл. технологии: Сб. науч. тр. 1995. Т. 4, №12. С. 119–131.
- [13] CHERNYKH G. G., DEMENKOV A. G., MOSHKIN N. P., VOROPAYEVA O. F. Numerical models of turbulent wakes in homogeneous and stratified fluids // Proc. Third ECCOMAS CFD Conf. Wiley. N. Y., 1996. P. 161–166.
- [14] CHERNYKH G. G., DEMENKOV A. G. On numerical simulation of jet flows of a viscous incompressible fluid // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1997. Vol. 12, No. 2. P. 111–125.

- [15] RODI W. The prediction of free turbulent boundary layers by use of two-equation model of turbulence. Ph.D. Thesis. Univ. London. 1972. 310 p.
- [16] CHERNYKH G. G., DEMENKOV A. G., KOSTOMAKHA V. A. Numerical model of swirling momentumless turbulent wake // *Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 1998. Vol. 13, No. 4. P. 279–288.
- [17] КОСТОМАХА В. А., ЛЕСНОВА Н. В. Турбулентный закрученный след за сферой с полной или частичной компенсацией силы сопротивления // *ПМТФ*. 1995. Т. 36, №2. С. 88–98.
- [18] ГАВРИЛОВ Н. В., ДЕМЕНКОВ А. Г., КОСТОМАХА В. А., ЧЕРНЫХ Г. Г. Экспериментальное и численное моделирование турбулентного следа за самодвижущимся телом // *ПМТФ*. 2000. Т. 41, №4. С. 49–58.
- [19] ЛАУНДЕР Б. Е., МОРС А. Численный расчет осесимметричных сдвиговых течений с использованием замыканий для напряжений // *Турбулентные сдвиговые течения 1*. Пер. с англ. под ред. А. С. Гиневского. М.: Машиностроение, 1982. С. 291–310.
- [20] ВАСИЛЬЕВ О. Ф., ДЕМЕНКОВ А. Г., КОСТОМАХА В. А., ЧЕРНЫХ Г. Г. Численное моделирование закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом // *Докл. РАН*. 2001. Т. 376, №2. С. 195–199.
- [21] RODI W. Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // *J. Geoph. Res.* 1987. Vol. 92, No. C5. P. 5305–5328.
- [22] ВОРОПАЕВА О. Ф., ЧЕРНЫХ Г. Г. Эволюция зоны турбулентного смешения в жидкости с нелинейной стратификацией // *Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ*. 1989. Т. 3(20), №5. С. 3–29.
- [23] ВОРОПАЕВА О. Ф., ЧАШЕЧКИН Ю. Д., ЧЕРНЫХ Г. Г. Диффузия пассивной примеси от мгновенного локализованного источника в зоне турбулентного смешения // *Докл. РАН*. 1997. Т. 356, №6. С. 759–762.
- [24] ВОРОПАЕВА О. Ф., ЧЕРНЫХ Г. Г. Распространение пассивной примеси от мгновенного локализованного источника в зоне турбулентного смешения в пикноклине // *ПМТФ*. 1998. Т. 39, №4. С. 76–83.
- [25] БУКРЕЕВ В. И., ДЕМЕНКОВ А. Г., КОСТОМАХА В. А., ЧЕРНЫХ Г. Г. Распространение тепла от линейного источника в плоском турбулентном следе // *ПМТФ*. 1996. Т. 37, №5. С. 115–126.
- [26] LIN J. T., PAO Y. H. Wakes in stratified fluids // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1979. Vol. 11. P. 317–336.
- [27] GIBSON M. M., LAUNDER B. E. On the calculation of horizontal, turbulent, free shear flows under gravitational influence // *Trans. ASME*. 1976. Vol. C98, No. 1 P. 81–87.
- [28] HASSID S. Collapse of turbulent wakes in stable stratified media // *J. Hydronautics*. 1980. Vol. 14, No. 1. P. 25–32.

- [29] CHERNYKH G. G., VOROPAYEVA O. F. Numerical modelling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // *Computers and Fluids*. 1999. Vol. 13, No. 28. P. 281–306.
- [30] ВОРОПАЕВА О. Ф., ЧЕРНЫХ Г. Г. Внутренние волны, генерируемые безимпульсным турбулентным следом в линейно стратифицированной жидкости // *Мат. моделирование*. 1998. Т. 10, №6. С. 75–89.
- [31] CHASNECHKIN YU. D. Internal waves, vorticies and turbulence in a wake past a bluff body in a continuously stratified liquid // *Preprints of the Fourth Intern. Symp. on Stratified Flows, Grenoble, France, June 29 – July 2, 1994*. Grenoble: Grenoble Inst. of Mech. 1994. Vol. 2. Sess. B4. No. 29. 8 p.
- [32] ВОРОПАЕВА О. Ф., МОШКИН Н. П., ЧЕРНЫХ Г. Г. Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами за буксируемым и самодвижущимся телами в линейно стратифицированной среде // *Мат. моделирование*. 2000. Т. 12, №10. С. 77–94.
- [33] ВОРОПАЕВА О. Ф., ЧЕРНЫХ Г. Г. Численная модель безимпульсного турбулентного следа в пикноклине // *ПМТФ*. 1997. Т. 38, №3. С. 69–86.
- [34] CHERNYKH G. G., ILYISHIN B. B., VOROPAYEVA O. F. A numerical investigation of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // *Proc. 16-th Imacs World Congress 2000*. Lausanne, Aug. 21–25, 2000. Dept. of Computer Sci., Rutgers Univ. No. 411–6. 6 p.
- [35] МОШКИН Н. П., ФЕДОРОВА Н. Н., ЧЕРНЫХ Г. Г. О численном моделировании турбулентных следов // *Вычисл. технологии: Сб. науч. тр.* 1992. Т. 1, №1. С. 70–92.
- [36] CHERNYKH G. G., FEDOROVA N. N., MOSHKIN N. P. Numerical Simulation of Turbulent Wakes // *Rus. J. Theoret. Appl. Mech.* 1992. Vol. 2, No. 4. P. 295–304.
- [37] ВОРОПАЕВА О. Ф., ЧЕРНЫХ Г. Г. О численном моделировании динамики областей турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // *Вычисл. технологии: Сб. науч. тр.* 1992. Т. 1, №1. С. 93–104.

*Поступила в редакцию 29 июля 2001 г.*