

Тензорный коэффициент электропроводности в геофизических приложениях*

Н. В. ОРЛОВСКАЯ, Э. П. ШУРИНА

Новосибирский государственный технический университет, Россия

e-mail: nadino2000@mail.ru, shurina@online.sinor.ru

М. И. ЭПОВ

Институт нефтегазовой геологии и геофизики

им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия

In this work various approaches to the description of conductivity in the anisotropic medium typical for geophysical applications were considered. Four types of the tensor conductivity coefficient were designed. Their influence on modeling of the electromagnetic field at anisotropic medium was investigated. Only one type among this set of tensors was identified as correctly describing the conductive properties of the medium. The results of numerical modeling confirm our theoretical findings.

1. Тензор электропроводности

Для геофизических приложений характерно разделение расчетной области на две подобласти: воздух и землю. Воздух считается непроводящей или очень слабо проводящей средой, земля, как правило, обладает неоднородной структурой с различными свойствами. В земле могут находиться как проводящие, так и непроводящие объекты, электрическая проводимость земли может быть анизотропной. Анизотропная электрическая проводимость описывается тензором второго ранга в трехмерном пространстве (матрица 3×3).

Одним из объектов исследования в геофизике являются тонкослоистые, или трансверсально изотропные, среды [1]. Как правило, рассматриваются горизонтальные структуры, но в большинстве приложений ориентация тонкослоистых фрагментов относительно дневной поверхности (граница воздух—земля), определяющей глобальную декартову систему координат, может быть произвольной. Определим систему координат тонкослоистой среды x', y', z' следующим образом. Ось $O'z'$ перпендикулярна направлению залегания слоев, а оси $O'x'$, $O'y'$ лежат в плоскости слоев (рис. 1). Ось системы координат, перпендикулярная плоскости залегания слоев, называется осью симметрии. Для горизонтальной тонкослоистой среды система x', y', z' совпадает с декартовой системой координат x, y, z . Электрическая проводимость тонкослоистой среды

*Работа выполнена при финансовой поддержке совместного международного проекта NWO и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 047.016.003).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2008.

может быть описана диагональным тензором вида [2]

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\sigma_x = \sigma_y \neq \sigma_z$, $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$, $\sigma_z > 0$. Известно, что в системе координат x', y', z' тензор электропроводности всегда имеет вид (1).

Тонкослоистая структура среды — частный случай анизотропии. В общем случае можно определить анизотропную среду как произвольно ориентированную тонкослоистую среду. В данной работе рассмотрена наклонная тонкослоистая среда, для которой каждая ось системы координат x', y', z' образует угол θ с осями декартовой системы координат (рис. 2). В этом случае нельзя с уверенностью сказать, как будет выглядеть тензор электрической проводимости в декартовой системе координат.

Предположим, что искомый тензор можно получить следующим образом:

$$\sigma(x, y, z) = J\sigma(x', y', z'), \quad (2)$$

где J — матрица перехода от системы x', y', z' в систему x, y, z .

Таким образом, чтобы перейти к системе координат x, y, z , необходимо выписать якобиан преобразования. Для этого выписываются выражения, описывающие оси $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ в системе координат x, y, z .

Уравнения осей можно выписывать по-разному в зависимости от типа поворота осей. Положим, что при повороте координат не использовалось преобразование переноса. Следуя различным предположениям о характере поворота осей системы координат x', y', z' , стало возможным построение первых трех типов тензора по формуле (2).

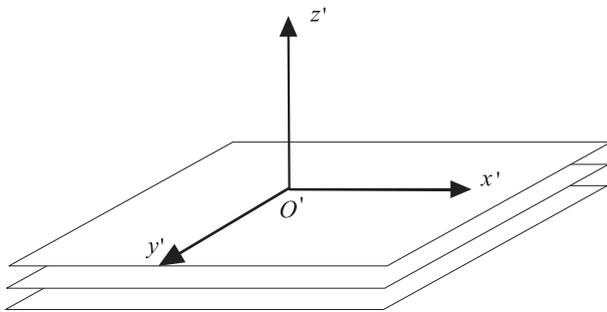


Рис. 1. Тонкослоистая среда

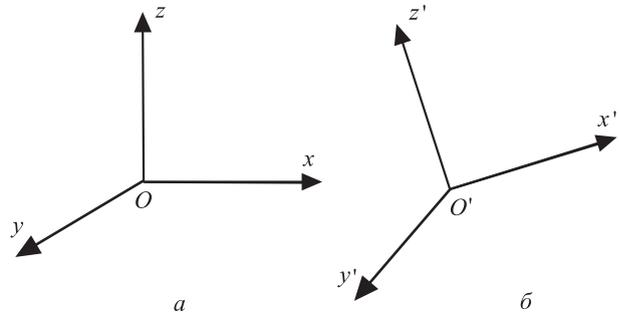


Рис. 2. Декартова система координат (а) и система координат тонкослоистой среды (б)

1.1. Тензоры электропроводности I и II типов

Полагая, что результирующий тензор должен иметь следующую структуру:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

получим уравнения осей координатной системы x', y', z' в системе x, y, z . Спроектируем точку A' , лежащую на оси $O'x'$ и имеющую координаты $(1,0,0)$ в системе x', y', z' на оси

системы x, y, z . Получим точку A с координатами $(\cos \theta, 0, -\sin \theta)$ в системе x, y, z . Аналогично, спроектируем точку B' , лежащую на оси $O'y'$ и имеющую координаты $(0, 1, 0)$ в системе x', y', z' на оси системы x, y, z . Получим точку B с координатами $(0, \cos \theta, -\sin \theta)$ в системе x, y, z . Тогда, применив формулу для уравнения прямой, проходящей через две точки к парам точек: $O(0, 0, 0)$ и A , $O(0, 0, 0)$ и B , получим уравнения для осей $O'x'$ и $O'y'$ в координатах системы x, y, z соответственно:

$$O'x' : \frac{x}{\cos \theta} = -\frac{z}{\sin \theta}; \quad O'y' : \frac{y}{\cos \theta} = -\frac{z}{\sin \theta}. \quad (4)$$

Через точки O, A, B и оси $O'x', O'y'$ проходит плоскость, описываемая уравнением

$$\sin \theta x + \sin \theta y + \cos \theta z = 0. \quad (5)$$

Проектируя точку $(0, 0, 1)$, получим уравнение оси $O'z'$

$$O'z' : -\frac{x}{\sin \theta} = -\frac{y}{\sin \theta} = \frac{z}{\cos \theta}. \quad (6)$$

Тогда из (4), (6) следует, что матрица J принимает вид

$$J = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Подставив (7) в (2), получим тензор I типа для электрической проводимости наклонной тонкослойной среды:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \theta & 0 & -\sigma_z \sin \theta \\ 0 & \sigma_y \cos \theta & -\sigma_z \sin \theta \\ -\sigma_x \sin \theta & -\sigma_y \sin \theta & \sigma_z \cos \theta \end{bmatrix}.$$

При построении тензора I типа было нарушено условие ортогональности оси $O'z'$ к плоскости $x'O'z'$. Это легко исправить, заменив выражение (6) следующим:

$$O'z' : \frac{x}{\sin \theta} = \frac{y}{\sin \theta} = \frac{z}{\cos \theta}. \quad (8)$$

Получим тензор II типа:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \theta & 0 & -\sigma_z \sin \theta \\ 0 & \sigma_y \cos \theta & -\sigma_z \sin \theta \\ \sigma_x \sin \theta & \sigma_y \sin \theta & \sigma_z \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Недостатком тензоров I и II типов является нарушение условия ортогональности осей x', y', z' системы координат тонкослойной среды при переходе в декартову систему координат. Тензор электропроводности σ как параметр, описывающий проводящие свойства среды, обладает свойством положительной определенности. Следовательно, все собственные значения матрицы тензора должны быть вещественными и положительными для любых значений угла θ . Зафиксируем значения коэффициентов $\sigma_x = 0.1$, $\sigma_y = 0.1$, $\sigma_z = 0.05$ и вычислим собственные значения тензоров I и II типов в зависимости от угла $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$. Вещественные, положительные собственные значения матрицы тензора I типа имеют место при $\theta \in [0^\circ, 35^\circ]$ (табл. 1). Для $\theta \in [36^\circ, 90^\circ]$ одно

Т а б л и ц а 1. Интервалы значений угла θ , при которых сохраняется свойство положительной определенности тензора σ

Тип тензора	Способ построения	Углы θ
I	Структура (3)	$\theta \in [0^\circ, 35^\circ]$
II	Структура (3) + ортогональность оси Oz к плоскости xOy	$\theta \in [0^\circ, 15^\circ]$
III	Поворот на угол θ осей Ox, Oy	$\theta \in [0^\circ, 15^\circ]$
IV	Тензорное преобразование (11)	$\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$

Т а б л и ц а 2. Собственные значения тензоров различных типов для характерных значений угла θ

Тип тензора	Угол θ	Собственные значения σ		
I	0	0.1	0.1	0.05
	30	0.01049540	0.08661581	0.1194283
	60	-0.04994088	0.05004597	0.1250098
	90	-0.09994025	$7.963267 \cdot 10^{-5}$	0.1000597
II	0	0.1	0.1	0.05
	30	$0.06496186 + i0.04504229$	$0.06496186 - i0.04504229$	0.08661581
	60	$0.03753448 + i0.08566717$	$0.03753448 - i0.08566717$	0.05004597
	90	$5.97245 \cdot 10^{-5} + i0.09999997$	$5.97245 \cdot 10^{-5} - i0.09999997$	$7.963267 \cdot 10^{-5}$
III	0	0.1	0.1	0.05
	30	0.09764975	$0.05654668 + i0.0438499$	$0.05654668 - i0.0438499$
	60	0.09063182	$0.01099156 + i0.07345755$	$0.01099156 - i0.07345755$
	90	$-0.0396152 + i0.06876542$	$-0.0396152 - i0.06876542$	0.07938969
IV	0	0.1	0.1	0.05
	30	0.05317828	0.08603719	0.1670000
	60	0.05689939	0.1073372	0.1420823
	90	0.05	0.1	0.1

из собственных значений становится отрицательным (табл. 2). Вещественные, положительные собственные значения матрицы тензора II типа имеют место при $\theta \in [0^\circ, 15^\circ]$ (табл. 1). Для $\theta \in [16^\circ, 90^\circ]$ среди собственных значений появляются два комплексно-сопряженных числа (табл. 2). Таким образом, данные типы тензоров не удовлетворяют свойству положительной определенности электропроводности для $\theta \notin [0^\circ, 35^\circ]$ (тензор I типа) или $\theta \notin [0^\circ, 15^\circ]$ (тензор II типа), что приводит к изменению спектральных свойств конечно-элементной матрицы и появлению нефизичных результатов при решении системы уравнений Максвелла.

1.2. Тензор электропроводности III типа

Из-за недостатков тензоров I и II типов был предложен альтернативный подход к построению тензора. При построении тензора этого типа использовались стандартные

преобразования поворота координат вокруг одной из осей. Был произведен поворот относительно оси $O'x'$, а затем относительно $O'y'$:

$$J = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \theta & -\sigma_y \sin^2 \theta & -\sigma_z \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \sigma_y \cos \theta & -\sigma_z \sin \theta \\ \sigma_x \sin \theta & \sigma_y \sin \theta \cos \theta & \sigma_z \cos^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Поворот относительно двух из трех осей позволяет сохранить один из нулей, присутствующих в предположении о структуре тензора (3). В этом случае полученная после преобразования система координат остается ортогональной. Тензор III типа тогда имеет вид

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \theta & -\sigma_y \sin^2 \theta & -\sigma_z \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \sigma_y \cos \theta & -\sigma_z \sin \theta \\ \sigma_x \sin \theta & \sigma_y \sin \theta \cos \theta & \sigma_z \cos^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Сохранение ортогональности системы однако не позволило улучшить спектральные свойства тензора. Для тензора III типа вещественные, положительные собственные значения имеют место при значениях $\theta \in [0^\circ, 15^\circ]$ (см. табл. 1). Для $\theta \in [16^\circ, 90^\circ]$ среди собственных значений появляются два комплексно-сопряженных числа (см. табл. 2). Данный тип тензора также приводит к нефизичным решениям.

1.3. Тензор электропроводности IV типа

Очевидно, что простого преобразования координат недостаточно для разрешения поставленной задачи. Поскольку σ — тензор, было решено воспользоваться формулой преобразования тензора при переходе из одной системы координат в другую [3]:

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial x_n}{\partial x'_i} \frac{\partial x_m}{\partial x'_j} \sigma_{nm}, \quad (11)$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты декартовой системы, x'_1, x'_2, x'_3 — координаты системы тонкослойной среды. Обе системы связаны соотношениями последовательного поворота всех трех осей, аналогично (9):

$$x = \cos^2 \theta x' - (\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \cos \theta) y' + (\sin^3 \theta - \sin \theta \cos^2 \theta) z', \\ y = \cos \theta \sin \theta x' + (\cos^2 \theta - \sin^3 \theta) y' - (\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \cos \theta) z', \\ z = \sin \theta x' + \sin \theta \cos \theta y' + \cos^2 \theta z'.$$

Тензор IV типа, полученный в результате такого преобразования, является плотным, симметричным и имеет следующие компоненты:

$$\sigma'_{11} = \sigma_x + \sin^2 \theta (\sigma_y - 2\sigma_x + \sigma_z) + \sin^4 \theta (\sigma_x - \sigma_y), \\ \sigma'_{12} = \sigma'_{21} = \sin \theta \cos \theta ((\sigma_y - \sigma_x) \cos^2 \theta (1 + \sin \theta) + \sin \theta (\sigma_z - \sigma_y)), \\ \sigma'_{13} = \sigma'_{31} = \cos^2 \theta \sin \theta (\sin \theta \sigma_x - \cos \theta \sigma_x - \sin \theta \cos^2 \theta \sigma_y - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sigma_y + \cos^2 \theta \sigma_z),$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{22} &= \sigma_y + \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sigma_x + \sigma_z + 2 \sin \theta (\sigma_x - \sigma_y) + \sin^2 \theta (\sigma_x - \sigma_y)), \\ \sigma'_{23} = \sigma'_{32} &= \sin \theta \cos \theta ((1 + \sin \theta) (\sigma_y - \sigma_x) (\sin^2 \theta - \sin \theta \cos^2 \theta) + \cos^2 \theta (\sigma_y + \sigma_z)), \\ \sigma'_{33} &= \sigma_z + \sin^2 \theta (\sin^2 \theta (\sigma_x - \sigma_z) + 2 \sin \theta \cos^2 \theta (\sigma_y - \sigma_x) + \cos^4 \theta \sigma_x + \\ &\quad + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sigma_y + \cos^2 \theta \sigma_y),\end{aligned}$$

Для тензора IV типа все собственные значения являются вещественными, положительными для $\theta \in [0, 90^\circ]$ (см. табл. 1 и 2).

2. Математическая модель

Моделирование электромагнитного поля в анизотропных средах, где электрическая проводимость является тензором второго ранга, приводит к усложнению вариационной формулировки и ее численных аналогов. В [4] с помощью специальной замены переменных от представления электропроводности в виде тензора второго ранга переходят к диагональному представлению тензора. Такой подход не оправдан для произвольного тензора второго ранга, описывающего электропроводность. В [5] с использованием аппарата дифференциальных форм показана целесообразность моделирования напряженности электрического поля \mathbf{E} , представленного уравнением гиперболического типа (уравнение второго порядка).

Введем следующие функциональные пространства:

$$\begin{aligned}H(\text{rot}; \Omega) &= \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3 : \text{rot } \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3 \right\}, \\ H^0(\text{rot}; \Omega) &= \{ \mathbf{v} \in H(\text{rot}; \Omega) : \text{div } \mathbf{v} = 0 \}, \\ H_0^0(\text{rot}; \Omega) &= \{ \mathbf{v} \in H^0(\text{rot}; \Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_\Gamma = 0 \},\end{aligned}$$

где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к границе Γ области Ω . Норма в пространстве $H(\text{rot}; \Omega)$ определяется соотношением

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\text{rot}; \Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} d\Omega.$$

Пусть в области Ω нет свободных зарядов, тогда $\mathbf{E} \in H^0(\text{rot}; \Omega)$ и имеет место следующая задача.

Для заданной плотности тока \mathbf{J}_0 такой, что $\text{div } \mathbf{J}_0 = 0$, найти поле $\mathbf{E} \in H^0(\text{rot}; \Omega)$ такое, что

$$\text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}_0}{\partial t} \text{ в } \Omega \times (t_0, T), \quad (12)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (13)$$

$$\mathbf{E}|_{t_0} = \mathbf{E}_1, \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right|_{t_0} = \mathbf{E}_2. \quad (14)$$

Здесь коэффициенты μ, ε — диагональные тензоры с равными значениями на диагонали. Пространства $H(\text{rot}; \Omega)$, $H^0(\text{rot}; \Omega)$ — гильбертовы, и тогда скалярное произведение вводится как

$$(f, g) = \int_{\Omega} f \cdot g^* d\Omega.$$

Выпишем вариационную формулировку для задачи (12)–(14).
Найти поле $\mathbf{E} \in H^0(\text{rot}; \Omega)$ такое, что для $\forall \mathbf{W} \in H_0^0(\text{rot}; \Omega)$

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{W} d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{W} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{W} d\Omega + \\ + \int_{\partial\Omega} (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{W} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{J}_0}{\partial t} \cdot \mathbf{W} d\Omega. \quad (15)$$

Обозначим W^h конечно-элементное подпространство роторно-конформных функций [6, 7]:

$$W^h \subset \{\mathbf{v} \in H_0^0(\text{rot}; \Omega)\}.$$

Дискретизация вариационной постановки (15) по пространству проводилась с помощью векторного метода конечных элементов с использованием edge-функций из пространства W^h . Для аппроксимации по времени использовалась трехслойная неявная схема. Тензорный коэффициент σ , входящий в уравнение (15), не приводился к диагональному виду. Получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\tau^2 B e^n + A e^n + \tau S e^n = 2A e^{n-1} - A e^{n-2} + \tau S e^{n-1} - \tau(F^n - F^{n-1}), \quad (16)$$

где B, A, S, F — конечно-элементные матрицы, определяемые соотношениями

$$[B]_{i,j} = (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{N}_i, \text{rot } \mathbf{N}_j), \quad [A]_{i,j} = (\varepsilon \mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j),$$

$$[S]_{i,j} = (\sigma \mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j), \quad [F]_i = (\mathbf{J}_0, \mathbf{N}_i).$$

Здесь \mathbf{N}_i — базисные edge-функции из пространства W^h .

3. Влияние тензорного коэффициента электропроводности на спектральные свойства конечно-элементных матриц

Систему линейных алгебраических уравнений (16) можно записать в виде

$$M \mathbf{e} = \mathbf{F}_r, \quad (17)$$

где M — полученная конечно-элементная матрица, \mathbf{F}_r — вектор правой части. Спектральные свойства матрицы M для изотропной среды известны. Матрица M симметричная и положительно определенная, т. е. все собственные числа матрицы вещественные и положительные. В случае присутствия тензорного коэффициента электропроводности спектральные свойства матрицы M изменяются.

Были построены конечно-элементные матрицы M и исследованы их спектральные свойства для следующих вариантов тензорной электропроводности: тензоры I–IV типов для значений углов θ , равных 0, 30, 60, 90°. Построенные конечно-элементные матрицы соответствуют параллелепипеидальной сетке в 1000 элементов, число неизвестных 3630. Вычисление собственных значений производилось в среде MATLAB.

Для тензора I типа наблюдалось ухудшение спектральных свойств матрицы M при увеличении угла θ . Для $\theta = 0^\circ$ собственные значения вещественные, положительные и

делятся на три спектральных пятна. Для $\theta = 30^\circ$ появляются комплексно-сопряженные собственные значения. Действительные части собственных значений также делятся на три спектральных пятна (рис. 3). При значении $\theta = 60^\circ$ увеличивается число комплексно-сопряженных собственных значений. Спектральные пятна в целом сохраняются, но наблюдается перераспределение внутри спектральных групп. Для $\theta = 90^\circ$ число комплексно-сопряженных собственных значений несколько меньше, чем для $\theta = 60^\circ$ (табл. 3). Второе спектральное пятно становится растянутым и соприкасается с третьей группой собственных значений. Подобное поведение спектральных характеристик конечно-элементной матрицы M приводит к невозможности получить решение системы (17) итерационным решателем для $\theta = 60^\circ, 90^\circ$.

Для тензора II типа также наблюдалось ухудшение спектральных свойств матрицы M при увеличении угла θ . Для $\theta = 0^\circ$ в спектре присутствует небольшое количество комплексно-сопряженных чисел, значения мнимой части которых близко к нулю. Действительные части собственных значений также делятся на три спектральных пятна (рис. 3). Для $\theta = 30^\circ$ резко увеличиваются количество комплексно-сопряженных

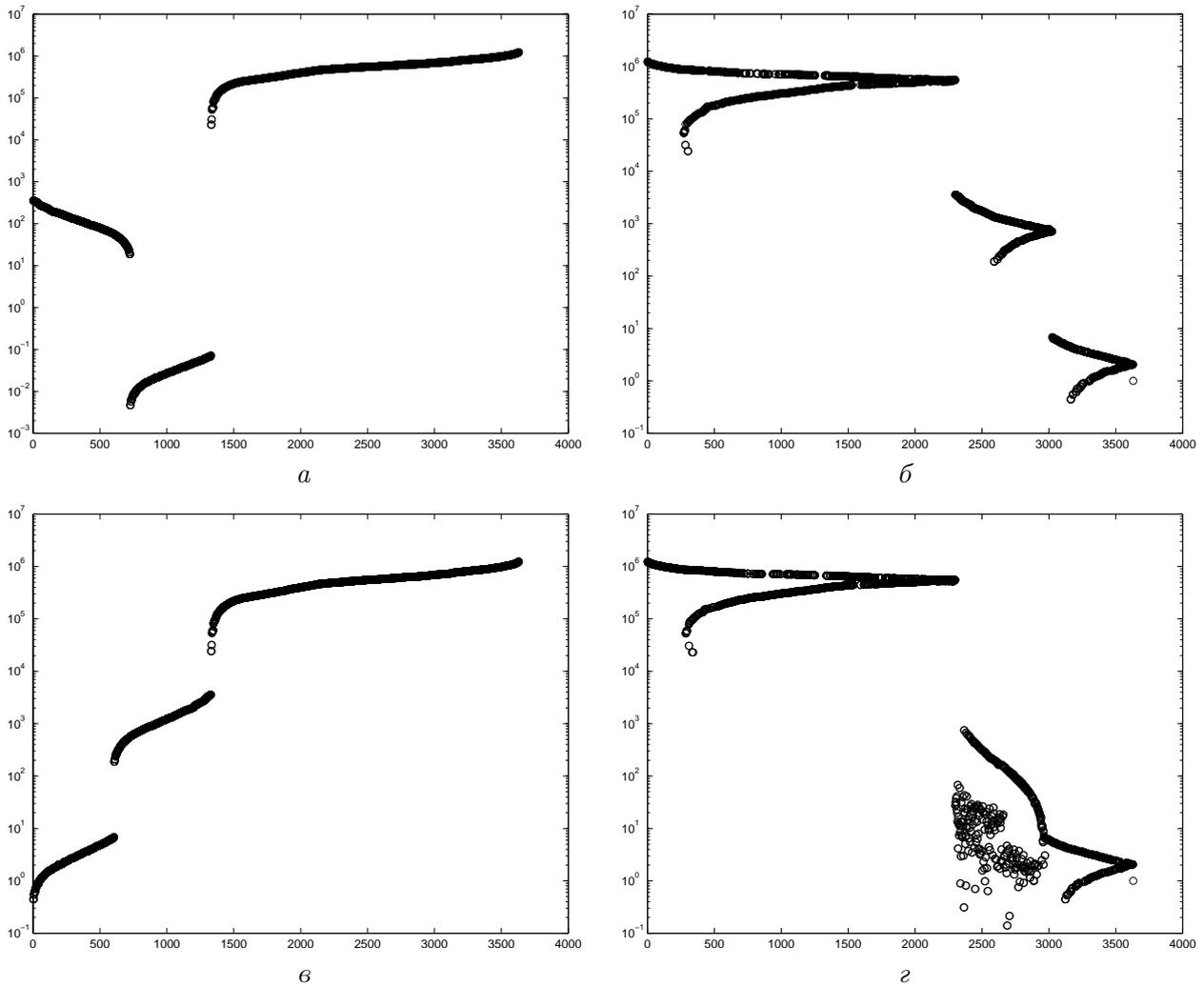


Рис. 3. Примеры конфигураций спектральных пятен для различных тензоров: a — тензор I типа ($\theta = 0$), $б$ — тензор II типа ($\theta = 0$), $в$ — тензор III типа ($\theta = 0$), $г$ — тензор II типа ($\theta = 90$)

собственных значений и величина мнимой части. При значении $\theta = 60^\circ$ возрастает амплитуда мнимой части комплексно-сопряженных собственных значений. Структура спектральных пятен в целом сохраняется, но наблюдается перераспределение внутри спектральных групп. Для $\theta = 90^\circ$ число комплексно-сопряженных собственных значений увеличивается при неизменной амплитуде мнимой части комплексно-сопряженных собственных значений (табл. 3). Второе спектральное пятно становится растянутым и соприкасается с третьей группой собственных значений. Подобное поведение спектральных характеристик конечно-элементной матрицы M приводит к невозможности получить решение системы (17) итерационным решателем только для $\theta = 90^\circ$.

Для тензора III типа спектральные свойства матрицы M при увеличении угла θ также подвержены изменениям. Для $\theta = 0^\circ$ собственные значения матрицы вещественные и положительные. Спектр матрицы образует три спектральных пятна, структура пятен отличается от структур, характерных для тензоров I и II типов (рис. 3). Для $\theta = 30^\circ$ резко увеличивается количество комплексно-сопряженных собственных значений. Количество комплексно-сопряженных собственных значений больше, чем у аналогичной матрицы с тензором II типа (табл. 3). При значении $\theta = 60^\circ$ возрастает амплитуда мнимой части комплексно-сопряженных собственных значений. Спектральные пятна в целом сохраняются, но наблюдается перераспределение внутри спектральных групп. Для $\theta = 90^\circ$ число комплексно-сопряженных собственных значений увеличивается при неизменной амплитуде мнимой части комплексно-сопряженных собственных значений. Второе спектральное пятно объединяется с третьей группой собственных значений. Подобное поведение спектральных характеристик конечно-элементной матрицы M также приводит к невозможности получить решение системы (17) итерационным решателем только для $\theta = 60^\circ, 90^\circ$.

Тензор IV типа сохраняет такие же спектральные свойства конечно-элементной матрицы M , как и конечно-элементная матрица, построенная для скалярного (изотропно-

Т а б л и ц а 3. Количество вещественных и комплексных собственных значений конечно-элементной матрицы M для тензоров различных типов

Тип тензора	Угол θ	Количество собственных значений	
		вещественных	комплексных
I	0	3630	0
	30	3296	334
	60	3240	390
	90	3320	310
II	0	3582	48
	30	2990	640
	60	2834	796
	90	2744	886
III	0	3630	0
	30	2704	926
	60	2548	1082
	90	2158	1472
IV	0	3630	0
	30	3630	0
	60	3630	0
	90	3630	0

го) коэффициента электропроводности. Собственные значения матрицы с тензором IV типа не зависят от изменений угла θ и всегда остаются вещественными и положительными (табл. 3).

4. Вычислительный эксперимент

Моделируется электрическое поле от локального источника типа петля. Расчетная область $\Omega = \bigcup_{i=1}^2 \Omega_i$, где Ω_1 — воздух (слабопроводящая среда), Ω_2 — земля, являющаяся анизотропной проводящей средой. Проводимость в воздухе $10^{-6} \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}$, в земле $\sigma_x = 0.1 \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}$, $\sigma_y = 0.1 \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}$, $\sigma_z = 0.05 \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}$. Источником поля является петля с током $J = e^{at}$ А, радиус 0.2 м. Петля находится на поверхности земли, центр петли — в точке (0,0,0). Моделирование проводилось для четырех характерных положений угла θ : 0, 30, 60 и 90° для тензоров

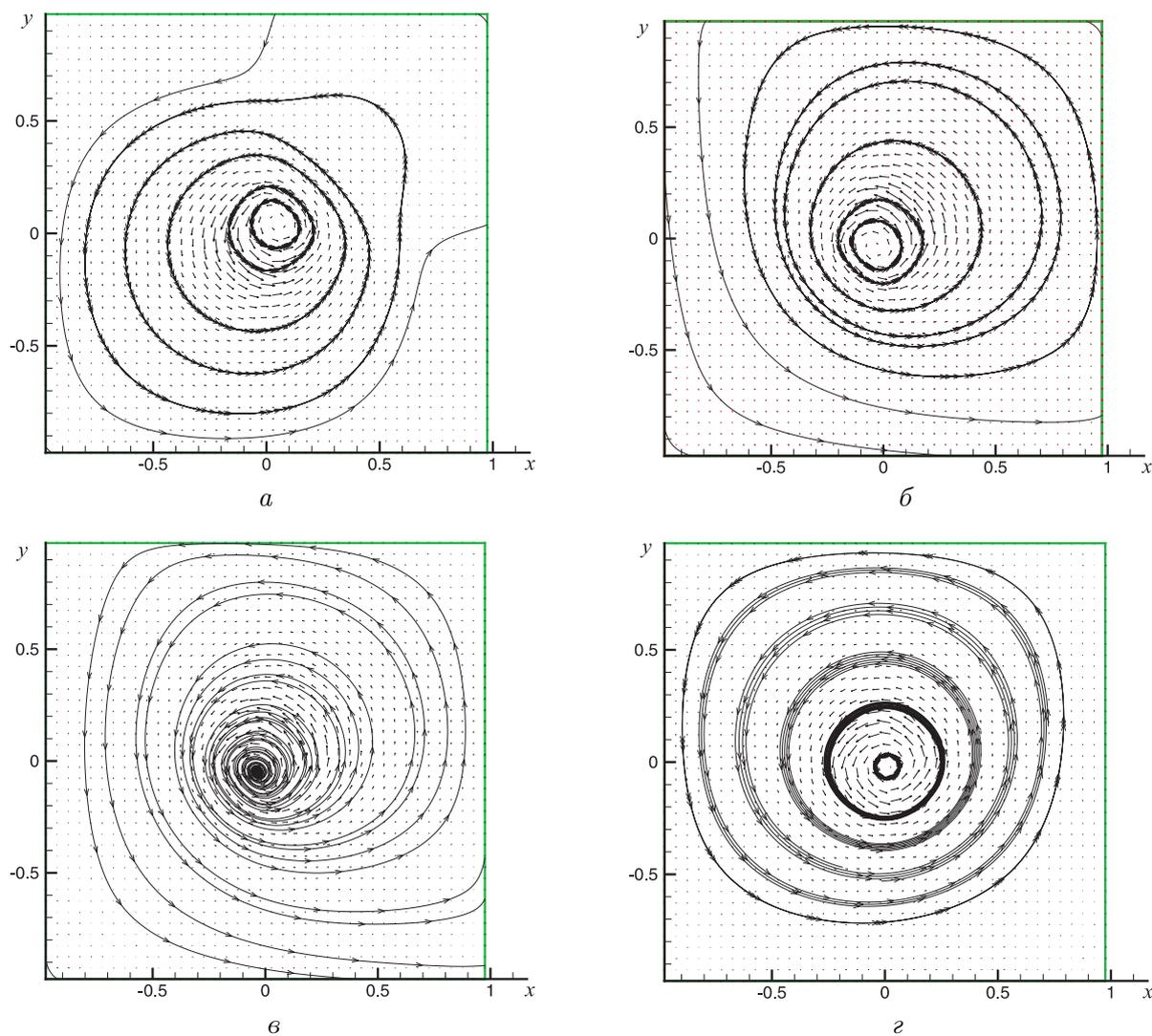


Рис. 4. Электрическое поле в плоскости $z = 0.1$ м в воздухе на расстоянии 0.05 м от петли ($\theta = 30$): а — тензор I типа, б — тензор II типа, в — тензор III типа, г — тензор IV типа

I–IV типов.

Силловые линии электрического поля от локального источника в однородной среде представляют собой замкнутые concentрические окружности. Для петли, лежащей в плоскости $z = 0$, компонента поля E_z должна быть равна нулю.

Для тензора I типа получено решение для углов 0 и 30° , для углов 60 и 90° тензор σ становится отрицательно определенным, что привело к нефизичным решениям и расходимости итерационного процесса при решении системы линейных алгебраических уравнений (16). При $\theta = 0^\circ$ тензор становится диагональным. В этом случае картина поля в плоскости $z = 0.1$ м в воздухе над петлей характерна для поля от локального источника типа “петля”. Величина компоненты E_z — порядка 10^{-8} . Для $\theta = 30^\circ$ картина поля в плоскости меняется. Силловые линии (E_x, E_y) остаются замкнутыми, но перестают быть concentрическими окружностями (рис. 4). Величина компоненты E_z

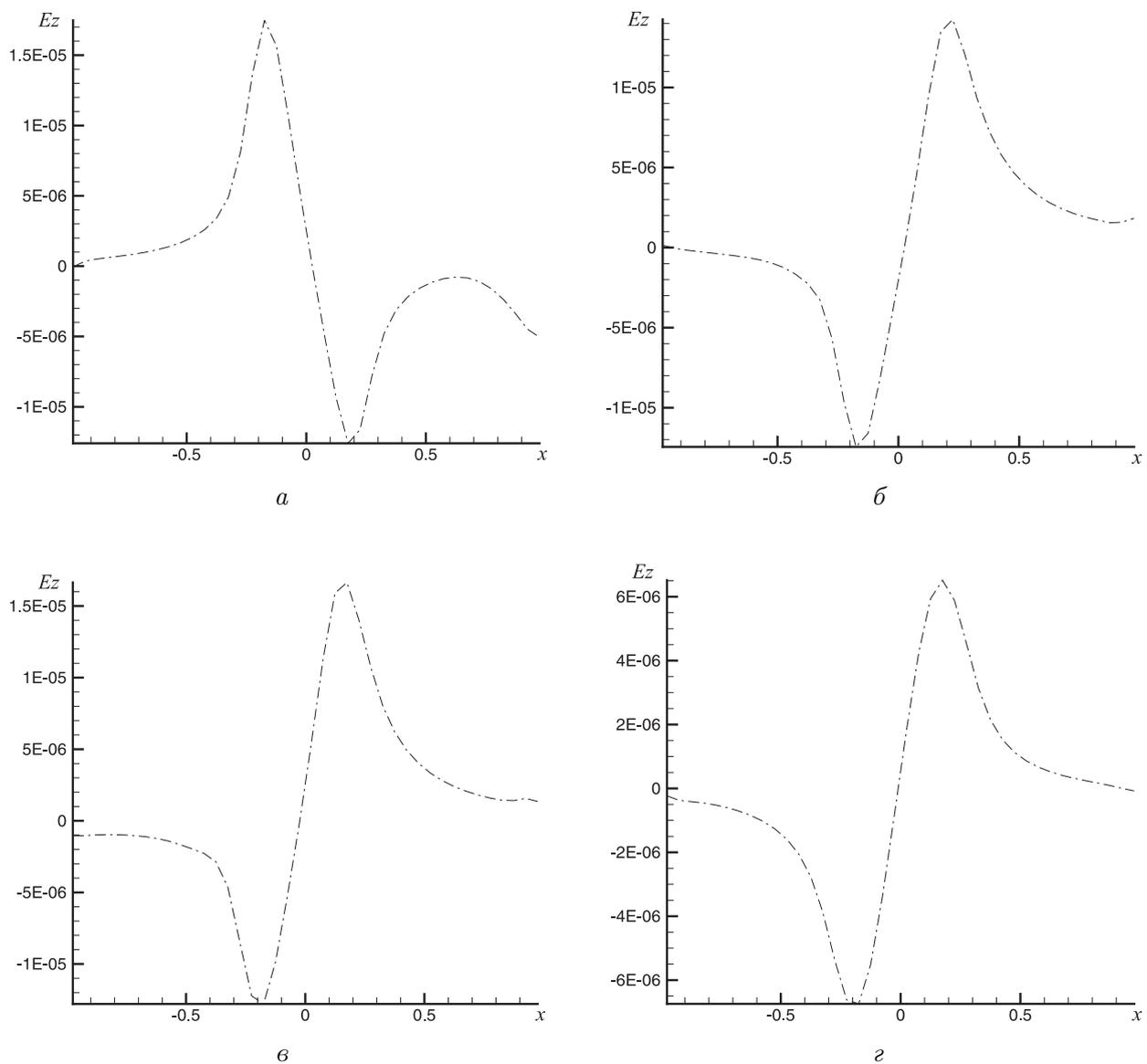


Рис. 5. Профиль $y = 0$, $z = 0$ ($\theta = 30^\circ$): а — тензор I типа, б — тензор II типа, в — тензор III типа, г — тензор IV типа

возрастает до порядка 10^{-5} (рис. 5).

Для тензора II типа рассчитано электрическое поле для углов 0, 30 и 60°. Картина поля в плоскости над петлей для $\theta = 0$ подобна полученной для тензора I типа. Компонента E_z имеет порядок 10^{-8} . Силовые линии деформируются и вытягиваются вдоль диагонали области тем сильнее, чем больше угол θ (см. рис. 4 и 6). Величина компоненты E_z возрастает с ростом угла с 10^{-5} до $3 \cdot 10^{-5}$ (см. рис. 5 и 6).

Для тензора III типа вычислены значения электрического поля для углов 0 и 30°. Картина поля в плоскости над петлей для $\theta = 0$ подобна полученной для тензоров I и II типов. Картина поля для тензора III типа ($\theta = 30^\circ$) отличается от картины поля для первых двух типов тензоров, силовые линии поля перестают быть замкнутыми и “раскручиваются” по спирали от центра петли (см. рис. 4). Компонента E_z имеет тот

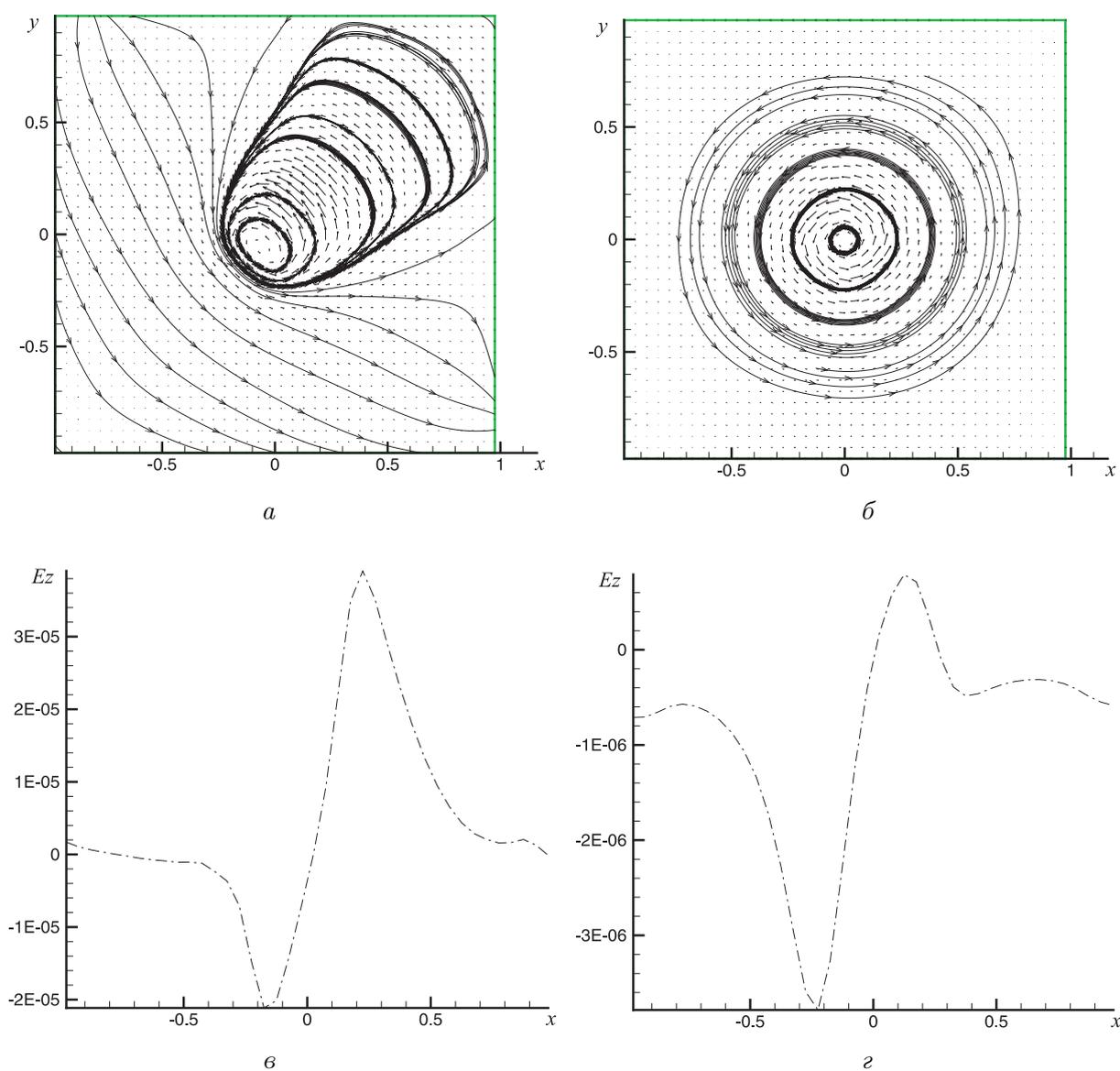


Рис. 6. Электрическое поле в плоскости $z = 0.1$ м в воздухе на расстоянии 0.05 м от петли ($\theta = 60^\circ$): a – тензор II типа, b – тензор IV типа; профиль $y = 0, z = 0$: v – тензор II типа, z – тензор IV типа

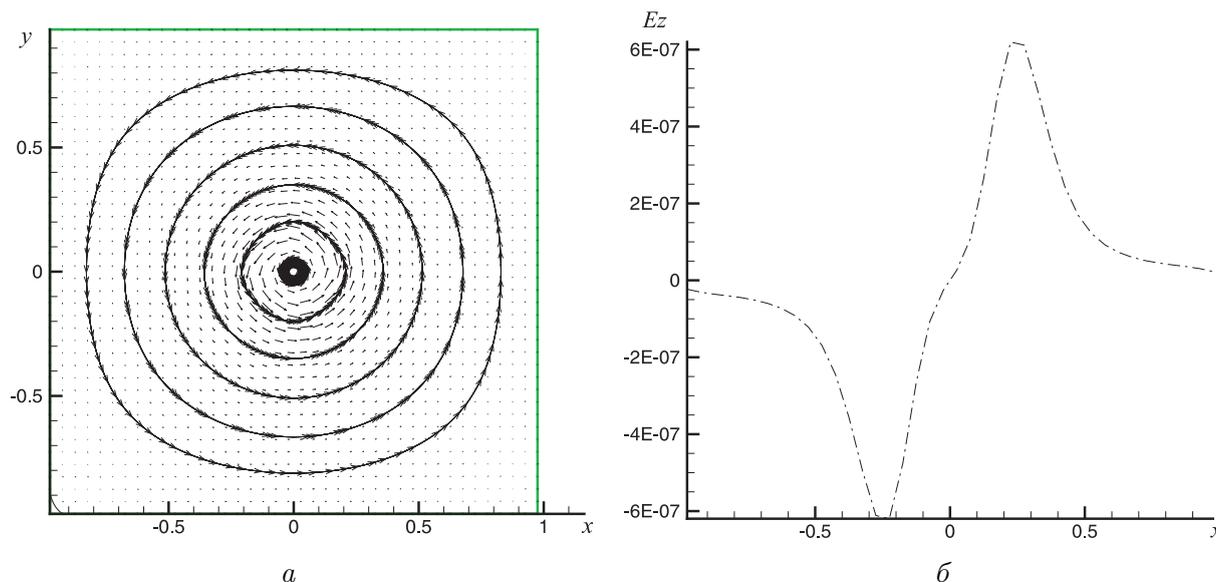


Рис. 7. Электрическое поле в плоскости $z = 0.1$ м в воздухе на расстоянии 0.05 м от петли ($\theta = 90^\circ$) для тензора IV типа (а) и профиль $y = 0, z = 0$ (б)

же порядок, что и для тензора II типа (см. рис. 5).

Для тензора IV типа задача (16) разрешима для всех характерных значений θ . Силовые линии во всех случаях замкнуты окружностями. Компонента E_z отсутствует для $\theta = 0^\circ$, для $\theta = 30$ и 60° значения компоненты E_z на порядок меньше компонент E_x, E_y и на два порядка меньше для $\theta = 90^\circ$ (см. рис. 4–7).

Заключение

Для задач геофизики были сформулированы четыре типа тензоров, описывающих электрическую проводимость залегающей под углом θ к дневной поверхности тонкослойной среды. Были исследованы свойства предложенных тензоров с точки зрения физичности представления электрической проводимости среды. Из рассмотренных типов тензоров только тензор IV типа удовлетворяет свойству положительной определенности электрической проводимости. Для тензоров I–III типов свойство положительной определенности не сохраняется при изменении угла θ в пределах от 0 до 90° . Изучено влияние тензорной электропроводности на спектральные свойства конечно-элементной матрицы. При нарушении свойства положительной определенности тензора среди собственных значений конечно-элементной матрицы появляются комплексные собственные значения, что приводит к расходимости итерационного процесса. Проведен ряд вычислительных экспериментов, которые показали нефизичность результатов моделирования электрического поля для тензоров I–III типов.

Список литературы

- [1] ZHU J., DORMAN J. Two-dimensional, three-component wave propagation in a transversely isotropic medium with arbitrary-orientation-finite-element modeling // Geophysics. 2000. Vol. 65, N 3. P. 934–942.

- [2] ПОТЕХИН А.И. Излучение и распространение электромагнитных волн в анизотропной среде. М.: Наука, 1971.
- [3] АБРАМОВ А.А. Введение в тензорный анализ и риманову геометрию. М.: Физматлит, 2004.
- [4] MA ZH., CROSKY C.L., HOLE L.C. The electrodynamic responses of the atmosphere and ionosphere to the lightning discharge // *J. of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. 1998. Vol. 60. P. 845–861.
- [5] ОРЛОВСКАЯ Н.В., ШУРИНА Э.П., ЭПОВ М.И. Моделирование электромагнитных полей в среде с анизотропной электропроводностью // *Вычисл. технологии*. 2006. Т. 11, № 3. С. 99–116.
- [6] NEDELEC J.C. Mixed finite elements in R^3 // *Numerische Mathematik*. 1980. Vol. 35, N 3. P. 315–341.
- [7] NEDELEC J.C. A new family of mixed finite elements in R^3 // *Numerische Mathematik*. 1986. Vol. 50. P. 57–81.

Поступила в редакцию 23 июля 2007 г.