

Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени

А. М. ГОРЦЕВ, Л. А. НЕЖЕЛЬСКАЯ
Томский государственный университет, Россия
e-mail:gam@fpmk.tsu.ru

The evaluation problem of the dead time duration in a semisynchronous double stochastic flow of events, which appears to be a mathematical model of informational flows circulating in the telecommunication networks, is considered. The results on the prolonged dead time are given.

Введение

В последние два десятилетия в связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий возникла важная сфера приложений теории массового обслуживания — проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, спутниковых сетей связи, телекоммуникационных сетей и т. п. Все это можно объединить термином — цифровые сети интегрального обслуживания (Integrated Service Digital Networks — ISDN). Это дало толчок к построению новых математических моделей входящих потоков событий, достаточно адекватно описывающих реальные информационные потоки, функционирующие в ISDN. Отметим, что одними из первых работ в этом направлении были статьи [1–3]. На практике параметры, определяющие входящий поток событий, изменяются со временем, при этом изменения обычно носят случайный характер, что приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. Потоки событий с зависящей от времени интенсивностью, являющиеся случайным процессом, можно разделить на два класса. К первому классу относятся потоки с интенсивностью, изменения которой являются непрерывным случайным процессом. Ко второму классу относятся потоки, у которых изменения интенсивности есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Последние (потоки с переключениями, или МС-потоки событий [1, 2]) — наиболее характерны для реальных телекоммуникационных сетей. В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на три типа:

- 1) синхронные потоки событий — потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий [4];
- 2) асинхронные потоки событий — потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий [5];

3) полусинхронные потоки событий — потоки, у которых для одного множества состояний справедливо определение первого типа, а для остальных состояний справедливо определение второго типа [6].

Подчеркнем, что синхронные, асинхронные и полусинхронные потоки возможно представить в виде моделей МАР-потоков событий (Markovian Arrival Process) [7] с определенными ограничениями на параметры последних [8].

При исследовании потоков событий могут быть выделены два класса задач: 1) задача фильтрации интенсивности потока (или задача оценивания состояний потока событий) [9]; 2) задача оценивания параметров потока [4–6].

В большинстве публикаций рассматриваются математические модели потоков событий, когда события доступны наблюдению. Однако на практике возникают ситуации, когда наступившее событие влечет за собой ненаблюдаемость последующих событий. Одним из искажающих факторов при этом выступает мертвое время регистрирующих приборов [10], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в период мертвого времени, недоступны наблюдению. В первом приближении можно считать, что этот период продолжается некоторое время T . Все устройства регистрации делятся на две группы. Первая группа — устройства с непродлевающимся мертвым временем, которое не зависит от наступления других событий в пределах его действия. Вторая группа — устройства регистрации с продлевающимся мертвым временем. В последнем случае мертвое время возникает после любого события, поступившего на вход устройства, вне зависимости от факта его регистрации. В настоящей работе рассматривается задача второго класса — задача оценивания длительности мертвого времени T полусинхронного потока событий при продлеваемом мертвом времени.

1. Постановка задачи

Рассматривается полусинхронный поток событий, изменение интенсивности которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \leq 1$). Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α . Очевидно, что в сделанных предположениях $\lambda(t)$ — марковский процесс.

После каждого зарегистрированного события потока наступает период ненаблюдаемости событий, фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного полусинхронного потока недоступны наблюдению. В то же время каждое из событий, произошедших в мертвое время, вызывает его продление на ту же величину T . По окончании общего периода ненаблюдаемости первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т. д. Вариант возникающей ситуации показан на рисунке.

Рассматривается стационарный режим функционирования потока событий, т. е. переходными процессами на интервале наблюдений (t_0, t) , где t_0 — начало наблюдений, t — окончание наблюдений, пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить

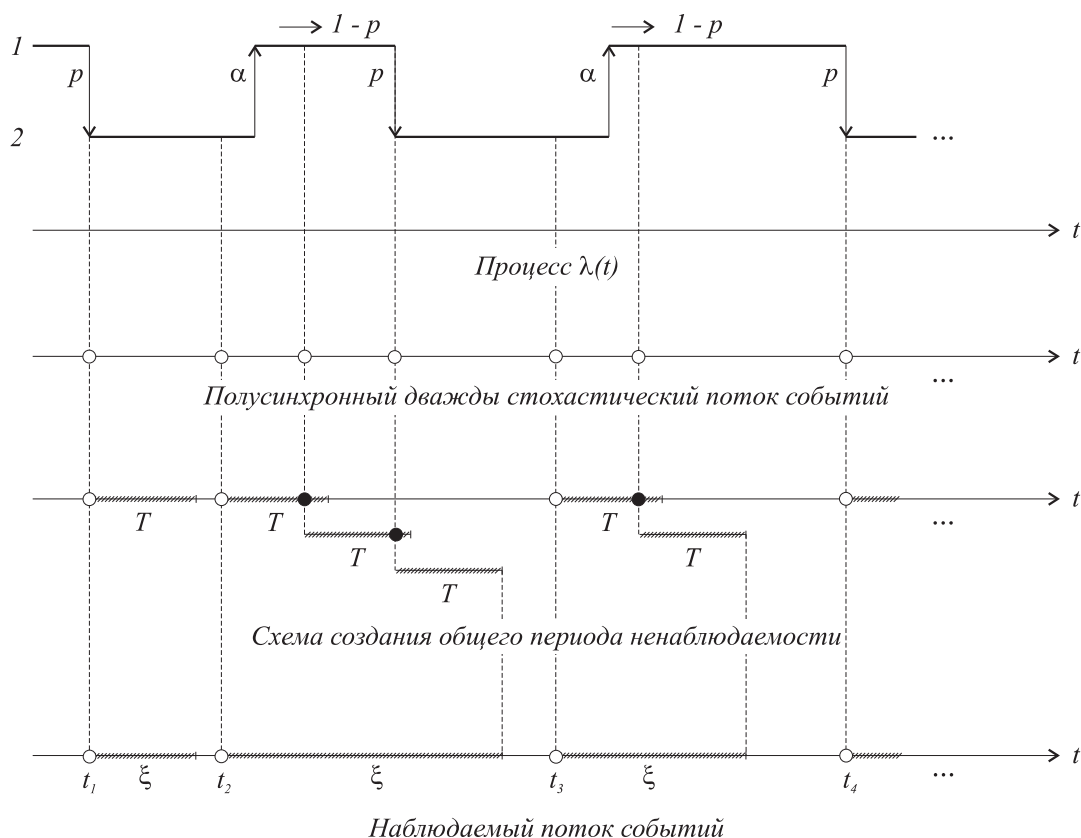
$t_0 = 0$. Так как процесс $\lambda(t)$ является ненаблюдаемым, то необходимо по моментам t_1, t_2, \dots оценить (в момент окончания наблюдений) длительность мертвого времени T .

2. Рекуррентность полусинхронного потока событий

Рассмотрим сначала случай $T = 0$. Тогда t_1, t_2, \dots есть последовательность моментов наступления событий полусинхронного потока. Нетрудно показать, что последовательность t_1, t_2, \dots образует вложенную цепь Маркова [11]. Обозначим $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ ($i = 1, 2, \dots$) — длительность i -го интервала между событиями потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей длительности i -го интервала $p(\tau_i) = p(\tau)$ для любого i . В силу этого момент t_i без потери общности можно положить равным нулю, или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$. Тогда

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \lambda_j p_{ij}(\tau), \quad (1)$$

где $\pi_i(0)$ — условная финальная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент $\tau = 0$ находится в i -м состоянии при условии, что в момент $\tau = 0$ событие потока наступило ($i = 1, 2$); $p_{ij}(\tau)$ — условная вероятность того, что в интервале $(0, \tau)$ нет событий потока



Формирование наблюдаемого потока событий в схеме с продлевающимся мертвым временем:

- 1, 2 — состояния случайного процесса $\lambda(t)$; штриховка — длительности мертвого времени;
- ξ — общая длительность периода ненаблюдаемости (общая длительность мертвого времени);
- t_1, t_2, \dots — моменты наступления событий в наблюдаемом потоке

и $\lambda(\tau) = \lambda_j$ при условии, что $\lambda(0) = \lambda_i$ ($i, j = 1, 2$).

Найдем явный вид вероятностей $p_{ij}(\tau)$. В силу определения полусинхронного потока $p_{12}(\tau) = 0$ для любых τ . Для остальных вероятностей $p_{ij}(\tau)$ нетрудно выписать систему дифференциальных уравнений, решая которую, находим

$$p_{11}(\tau) = e^{-\lambda_1\tau}, \quad p_{22}(\tau) = e^{-(\alpha+\lambda_2)\tau}, \quad p_{21}(\tau) = \frac{\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha} [e^{-(\alpha+\lambda_2)\tau} - e^{-\lambda_1\tau}]. \quad (2)$$

Отметим далее, что если процесс $\lambda(\tau)$ находится в первом состоянии, то после наступления события производится розыгрыш состояния процесса $\lambda(\tau)$ (т. е. событие наступает в момент $\tau = 0 - 0$, розыгрыш же состояния производится в момент, когда $\tau = 0 + 0$). Тогда, если $\pi_j(0 - 0)$ — условная финальная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ находится в j -м состоянии в момент $\tau = 0 - 0$ при условии, что в этот момент событие наступило, то вероятности $\pi_j(0) = \pi_j(0 + 0)$, $j = 1, 2$, выпишутся в виде

$$\pi_1(0) = (1 - p)\pi_1(0 - 0), \quad \pi_2(0) = \pi_2(0 - 0) + p\pi_1(0 - 0). \quad (3)$$

Так как моменты наступления событий образуют вложенную цепь Маркова, для вероятностей $\pi_j(0 - 0)$ имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \pi_1(0 - 0) &= (1 - p)\pi_1(0 - 0)\pi_{11} + \pi_2(0 - 0)\pi_{21} + p\pi_1(0 - 0)\pi_{21}, \\ \pi_2(0 - 0) &= \pi_2(0 - 0)\pi_{22} + p\pi_1(0 - 0)\pi_{22} + (1 - p)\pi_1(0 - 0)\pi_{12}, \\ \pi_1(0 - 0) + \pi_2(0 - 0) &= 1, \end{aligned} \quad (4)$$

где π_{ij} — переходная вероятность того, что за время, пройденное от момента $\tau = 0 - 0$ до наступления следующего события потока, процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i в состояние j . Переходные вероятности π_{ij} определяются в виде

$$\pi_{ij} = \lambda_j \int_0^\infty p_{ij}(\tau) d\tau \quad (i, j = 1, 2), \quad \pi_{12} = 0. \quad (5)$$

Подставляя (2) в (5) и используя (3), (4), получаем

$$\pi_1(0) = \frac{\alpha(1 - p)}{\alpha + p\lambda_2}, \quad \pi_2(0) = \frac{p(\alpha + \lambda_2)}{\alpha + p\lambda_2}. \quad (6)$$

Подставляя (2), (6) в (1), находим

$$p(\tau) = \gamma\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau} + (1 - \gamma)(\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha+\lambda_2)\tau}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\alpha + p\lambda_2} \left(1 - \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha} \right), \quad \tau \geq 0. \quad (7)$$

Пусть теперь (t_1, t_2) , (t_2, t_3) — два смежных интервала с соответствующими длительностями: $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда совместная плотность вероятностей $p(\tau_1, \tau_2)$ примет вид

$$p(\tau_1, \tau_2) = \lambda_1 \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) p_{i1}(\tau_1) \left[(1 - p)\lambda_1 p_{11}(\tau_2) + p \sum_{k=1}^2 \lambda_k p_{2k}(\tau_2) \right] +$$

$$+\pi_2(0)\lambda_2 p_{22}(\tau_1) \sum_{k=1}^2 \lambda_k p_{2k}(\tau_2), \quad (8)$$

где $\pi_i(0)$ определены формулами (6); $p_{ij}(\tau_1)$, $p_{jk}(\tau_2)$ — формулами (2) для $\tau = \tau_1$ либо $\tau = \tau_2$ ($i, j, k = 1, 2$). Подставляя их выражения в (8), находим

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) + \frac{(1-p)\lambda_2}{\alpha + \lambda_2} \gamma(1-\gamma) [\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_1} - (\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha + \lambda_2) \tau_1}] \times \\ \times [\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_2} - (\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha + \lambda_2) \tau_2}], \quad (9)$$

где γ , $p(\tau_j)$ определены в (7) для $\tau = \tau_j$, $j = 1, 2$.

Таким образом, из (9) следует, что полусинхронный поток является в общем случае коррелированным потоком. Для случая же $p = 1$ совместная плотность вероятностей (9) факторизуется. Так как последовательность моментов t_1, t_2, \dots есть вложенная цепь, нетрудно показать, что факторизуется и совместная плотность $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$. Последнее означает, что для случая $p = 1$ полусинхронный поток является рекуррентным [12].

3. Преобразование Лапласа плотности вероятностей общего периода ненаблюдаемости рекуррентного потока

Рассмотрим произвольный рекуррентный поток, плотность вероятностей временного интервала между событиями у которого есть $\tilde{p}(\tau)$. Отметим, что по построению схемы продлевающегося мертвого времени начало общего периода ненаблюдаемости жестко привязано к моменту t_i (см. рисунок). Вследствие этого моменты t_1, t_2, \dots будут по-прежнему образовывать вложенную цепь Маркова и рекуррентность наблюдаемого потока сохранится.

Найдем преобразование Лапласа $g_\xi(s)$ плотности вероятностей $p(\xi)$ общей длительности периода ненаблюдаемости в наблюдаемом потоке. Наблюдаемое событие создало период ненаблюдаемости T . Тогда $\xi = T$, если в течение этого времени событий потока не наступит. При этом вероятность того, что в интервале $(0, T)$ событий потока не наступит при условии, что в начальный момент времени интервала $(0, T)$ событие наступило, есть функция Пальма $\varphi_0(T) = \int_T^\infty \tilde{p}(x) dx$ [12]. Однократное продление периода ненаблюдаемости на какое-то время будет в том случае, если на бесконечно малом полуинтервале $[x_1, x_1 + dx_1)$ ($0 < x_1 < T$) наступит событие потока, а затем, после момента x_1 , в интервале длиной T событий потока больше не наступит. Вероятность описанной ситуации есть $\tilde{p}(x_1) dx_1 \varphi_0(T)$, при этом $\xi = x_1 + T$ ($T < \xi < 2T$). При двукратном продлении периода ненаблюдаемости должны наступить два события на бесконечно малых полуинтервалах $[x_1, x_1 + dx_1)$, $[x_1 + x_2, x_1 + x_2 + dx_2)$ ($0 < x_1 < T$, $0 < x_2 < T$), а затем, в интервале длиной T , событий потока больше не наступит. Вероятность описанной ситуации есть $\tilde{p}(x_1) dx_1 \tilde{p}(x_2) dx_2 \varphi_0(T)$, при этом $\xi = x_1 + x_2 + T$ ($T < \xi < 3T$). Аналогично рассматривается трехкратное, четырехкратное и тому подобное продление периода

ненаблюдаемости. Объединяя все эти случаи, находим

$$p(\xi) = \varphi_0(T)\delta(\xi - T) + \varphi_0(T) \int_0^T \delta(\xi - x_1 - T)\tilde{p}(x_1)dx_1 + \\ + \varphi_0(T) \int_0^T \int_0^T \delta(\xi - x_1 - x_2 - T)\tilde{p}(x_1)\tilde{p}(x_2)dx_1dx_2 + \dots,$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция. Переходя к преобразованию Лапласа плотности $p(\xi)$, получаем

$$g_\xi(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi}p(\xi)d\xi = \frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}} \sum_{n=0}^\infty \left[\int_0^T e^{-sx}\tilde{p}(x)dx \right]^n = \frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}} \left[1 - \int_0^T e^{-sx}\tilde{p}(x)dx \right]^{-1}. \quad (10)$$

В частности, математическое ожидание ξ определится в виде

$$\mathbf{E}(\xi) = -g'_\xi(s)|_{s=0} = T + \frac{1}{\varphi_0(T)} \int_0^T x\tilde{p}(x)dx, \quad (11)$$

где \mathbf{E} — здесь и далее оператор математического ожидания.

4. Преобразование Лапласа плотности вероятностей $p(\tau)$ для наблюдаемого потока

Так как полусинхронный поток в общем случае коррелированный, рассмотрим случай $p = 1$, при котором поток является рекуррентным. Подставляя в (7) $p = 1$, производя переобозначение $p(\tau)$ на $\tilde{p}(x)$, получаем $\tilde{p}(x)$ в виде

$$\tilde{p}(x) = \gamma\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1 - \gamma)(\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha + \lambda_2)x}, \quad \gamma = -\frac{\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha}, \quad x \geq 0. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), находим

$$g_\xi(s) = \frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}} \left(1 - \frac{\gamma\lambda_1}{\lambda_1 + s} [1 - e^{-(\lambda_1 + s)T}] - \frac{(1 - \gamma)(\alpha + \lambda_2)}{\alpha + \lambda_2 + s} [1 - e^{-(\alpha + \lambda_2 + s)T}] \right)^{-1}, \\ \varphi_0(T) = \gamma e^{-\lambda_1 T} + (1 - \gamma) e^{-(\alpha + \lambda_2)T}. \quad (13)$$

Математическое ожидание ξ находится подстановкой (12) в (11):

$$\mathbf{E}(\xi) = \frac{1}{\varphi_0(T)} \left[\frac{\gamma}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T}) + \frac{1 - \gamma}{\alpha + \lambda_2} (1 - e^{-(\alpha + \lambda_2)T}) \right].$$

Рассмотрим интервал времени между событиями в наблюдаемом потоке (t_i, t_{i+1}) длительности $\tau_i = t_{i+1} - t_i$. С другой стороны, длительность этого интервала равна $\tau = \xi + \eta$, где η — длительность интервала между моментом окончания общего периода ненаблюдаемости и моментом t_{i+1} . Индекс i при τ опущен, так как τ_i — независимые

случайные величины. В силу того что наблюдаемый поток является рекуррентным, величины ξ и η зависимы. Тогда плотность вероятностей интервала между событиями в наблюдаемом потоке запишется в виде

$$p(\tau) = \int_0^{\tau} p(\xi)p(\eta|\xi)d\xi = \int_0^{\tau} p(\xi)p(\tau - \xi|\xi)d\xi.$$

Найдем выражение для $p(\tau - \xi|\xi)$. Припишем моменту наступления события в наблюдаемом потоке момент $\tau = 0$. Рассмотрим интервал $(0, \tau) = (0, \xi + \eta)$. Зафиксируем ξ . Введем вероятности $p_{ij}(\tau - \xi)$ — условная вероятность того, что в интервале длительности $\eta = \tau - \xi$ не наступит событий наблюдаемого потока и $\lambda(\xi + \eta) = \lambda_j$ при условии, что $\lambda(\xi) = \lambda_i$ ($i, j = 1, 2$). По своему смыслу вероятности $p_{ij}(\tau - \xi)$ не отличаются от вероятностей $p_{ij}(\tau)$, введенных в (1). Тогда $p_{ij}(\tau - \xi)$ определяются формулами (2), в которых вместо τ нужно подставить $\tau - \xi$, и $p_{12}(\tau - \xi) = 0$.

Введем вероятности $P_i(\tau - \xi) = p_{i1}(\tau - \xi) + p_{i2}(\tau - \xi)$ — условная вероятность того, что в интервале (ξ, τ) событий наблюдаемого потока не произойдет при условии, что $\lambda(\xi) = \lambda_i$ ($i = 1, 2$). Тогда условная плотность вероятностей длительности интервала (ξ, τ) есть $p_i(\tau - \xi) = -P'_i(\tau - \xi)$ ($i = 1, 2$). Учитывая (2), находим

$$p_1(\tau - \xi) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau - \xi)},$$

$$p_2(\tau - \xi) = -\frac{\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha} \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau - \xi)} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha} (\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau - \xi)}, \quad \tau \geq \xi. \quad (14)$$

Введем вероятности $\pi_i(\tau|\xi)$ — условная вероятность того, что $\lambda(\tau) = \lambda_i$ ($i = 1, 2$) при условии, что в момент $\tau = 0$ событие наступило и наступило мертвое время длительности ξ . Тогда

$$p(\tau - \xi|\xi) = \pi_1(\tau = \xi|\xi)p_1(\tau - \xi) + \pi_2(\tau = \xi|\xi)p_2(\tau - \xi). \quad (15)$$

Выписав систему дифференциальных уравнений для $\pi_i(\tau|\xi)$ и решив ее, находим

$$\pi_1(\tau|\xi) = A_1(\xi) + A_2(\xi)e^{-(\alpha + \lambda_1)\tau}, \quad \pi_2(\tau|\xi) = \frac{\lambda_1}{\alpha} A_1(\xi) - A_2(\xi)e^{-(\alpha + \lambda_1)\tau}, \quad (16)$$

где $A_1(\xi), A_2(\xi)$ — константы, которые определяются из граничных условий

$$\pi_1(0|\xi) = A_1(\xi) + A_2(\xi), \quad \pi_2(0|\xi) = \frac{\lambda_1}{\alpha} A_1(\xi) - A_2(\xi). \quad (17)$$

В (17) $\pi_i(0|\xi)$ — условная финальная вероятность того, что $\lambda(0) = \lambda_i$ ($i = 1, 2$) при условии, что в момент $\tau = 0$ событие наступило и наступило мертвое время длительности ξ ($\pi_1(0|\xi) + \pi_2(0|\xi) = 1$). Вероятности $\pi_i(0|\xi)$ по своему смыслу не отличаются от вероятностей $\pi_i(0)$, введенных в (1) ($i = 1, 2$). Вследствие этого для вероятностей $\pi_i(0|\xi)$ справедливы формулы (3), в которых $p = 1$, и вместо $\pi_i(0)$, $\pi_i(0 - 0)$ нужно подставить $\pi_i(0|\xi)$, $\pi_i(0 - 0|\xi)$ ($i = 1, 2$). Тогда $\pi_1(0|\xi) = 0$, $\pi_2(0|\xi) = 1$. Подставляя последние в (17), находим $A_1(\xi) = \alpha(\alpha + \lambda_1)^{-1}$, $A_2(\xi) = -\alpha(\alpha + \lambda_1)^{-1}$. Тогда (16) примет вид

$$\pi_1(\tau) = \pi_1 - \pi_1 e^{-(\alpha + \lambda_1)\tau}, \quad \pi_2(\tau) = \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha + \lambda_1)\tau}, \quad (18)$$

где $\pi_1 = \alpha(\alpha + \lambda_1)^{-1}$, $\pi_2 = \lambda_1(\alpha + \lambda_1)^{-1}$ — стационарные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ [6]. Подставляя (14) и (18) (в (18) $\tau = \xi$) в (15), получаем

$$p(\tau - \xi|\xi) = \Gamma(\xi)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-\xi)} + [1 - \Gamma(\xi)](\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha+\lambda_2)(\tau-\xi)}, \quad \tau \geq \xi,$$

$$\Gamma(\xi) = -\frac{\alpha(\alpha + \lambda_2)}{(\alpha + \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)} \left[1 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\alpha + \lambda_2} e^{-(\alpha+\lambda_1)\xi} \right]. \quad (19)$$

Положив в (19) $\xi = 0$, получаем совпадение с формулой (12).

Преобразование Лапласа плотности вероятностей $p(\tau)$ примет вид

$$g_\tau(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} p(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-s\xi} p(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-s\eta} p(\eta|\xi) d\xi,$$

где $\eta = \tau - \xi$. Подставляя сюда (19), в котором $\tau - \xi = \eta$, находим

$$g_\tau(s) = \frac{\alpha + \lambda_2}{\alpha + \lambda_2 + s} \int_0^\infty e^{-s\xi} p(\xi) d\xi + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} - \frac{\alpha + \lambda_2}{\alpha + \lambda_2 + s} \right) \int_0^\infty e^{-s\xi} \Gamma(\xi) p(\xi) d\xi. \quad (20)$$

Подставляя в (20) $\Gamma(\xi)$ из (19), учитывая (10), находим

$$g_\tau(s) = \frac{\alpha + \lambda_2}{\alpha + \lambda_2 + s} \left[1 - \frac{\alpha s}{(\alpha + \lambda_1)(\lambda_1 + s)} \right] g_\xi(s) - \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2) s g_\xi(\alpha + \lambda_1 + s)}{(\alpha + \lambda_1)(\lambda_1 + s)(\alpha + \lambda_2 + s)}, \quad (21)$$

где $g_\xi(s)$ определена формулой (13); $g_\xi(\alpha + \lambda_1 + s)$ также определена формулой (13), в которой вместо s нужно поставить $(\alpha + \lambda_1 + s)$.

5. Построение оценки длительности мертвого времени

Выражение (21) позволяет получить аналитический вид начальных моментов:

$$\mathbf{E}(\tau^m) = \int_0^\infty \tau^m p(\tau) d\tau = (-1)^m g_\tau^{(m)}(s)|_{s=0}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Вследствие этого для оценки четырех неизвестных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, T$ наблюдаемого потока событий можно использовать метод моментов [13]. Этот метод дает оценки, обладающие достаточно хорошими свойствами при больших выборках наблюдений.

Введем статистики $C_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i^m$, $m = \overline{1, 4}$, считая, что наблюдалось $n + 1$ событий потока в моменты t_1, \dots, t_{n+1} . Так как τ_i одинаково распределены и наблюдаемый поток рекуррентный, то $\mathbf{E}(C_m) = \mathbf{E}(\tau^m)$ и статистики C_m сходятся почти наверное к $\mathbf{E}(\tau^m)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для оценки неизвестных параметров имеем уравнения моментов: $\mathbf{E}(\tau^m) = C_m$, $m = \overline{1, 4}$, где $\mathbf{E}(\tau^m)$ определен в (22).

Предположим, что $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ известны. Тогда для оценки \hat{T} длительности мертвого времени T имеем уравнение: $\mathbf{E}(\tau) = C_1$. Беря производную от (21) по s в точке $s = 0$, преобразовывая уравнение $\mathbf{E}(\tau) = C_1$, получаем уравнение для оценки \hat{T} :

$$\frac{1 - \lambda(\gamma_1 e^{-\lambda_1 T} + \gamma_2 e^{-(\alpha+\lambda_2)T})}{\lambda(\gamma e^{-\lambda_1 T} + (1 - \gamma) e^{-(\alpha+\lambda_2)T})} +$$

$$+a \frac{\gamma e^{-h_1 T} + (1-\gamma) e^{-h_2 T}}{1 - \frac{\gamma \lambda_1}{h_1} (1 - e^{-h_1 T}) - \frac{(1-\gamma)(\alpha + \lambda_2)}{h_2} (1 - e^{-h_2 T})} + b = C_1,$$

где

$$a = \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1(\alpha + \lambda_1)(\alpha + \lambda_2)}, \quad b = \frac{\lambda_1^2 + \alpha(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha)}{\lambda_1(\alpha + \lambda_1)(\alpha + \lambda_2)}, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma}{\lambda_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{\gamma}{\alpha + \lambda_2}, \quad h_1 = 2\lambda_1 + \alpha, \quad h_2 = 2\alpha + \lambda_1 + \lambda_2, \quad \lambda = \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2. \quad (23)$$

Здесь величина γ определена в (12); π_1, π_2 определены в (18); $0 < T \leq \tau_{\min}$, $\tau_{\min} = \min \tau_i$ ($i = \overline{1, n}$).

Решение уравнения (23) возможно только численно. Можно показать, что левая часть (23) (обозначим ее через $f(T)$) есть возрастающая функция переменной T ($T > 0$). Тогда (23) либо имеет единственное решение, либо решения не имеет. Последнее возможно, если $f(0) > C_1$; тогда в качестве оценки \hat{T} естественно выбрать $\hat{T} = 0$. Если же $f(0) < C_1$, то возможны два варианта:

- 1) корень уравнения (23) попадает в полуинтервал $(0, \tau_{\min}]$; тогда этот корень и есть \hat{T} ;
- 2) корень уравнения (23) больше, чем τ_{\min} , тогда $\hat{T} = \tau_{\min}$.

6. Результаты численных экспериментов

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления оценки \hat{T} . Программа расчета реализована на языке С. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование полусинхронного потока событий и моделирование схемы создания продлевающегося мертвого времени для формирования статистики C_1 . Второй этап расчета — вычисление оценки \hat{T} , т. е. численное решение уравнения (23).

С целью установления свойств получаемой оценки \hat{T} проведено четыре серии экспериментов. В первой серии при $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\alpha = 0.01$, $p = 1$ имитировалось $N = 100$ реализаций наблюдаемого потока для каждого значения длительности мертвого времени T ед. времени ($T = 1, T = 3, T = 5, T = 7, T = 9$). Количество наблюдаемых интервалов τ_i для каждой реализации равнялось $n = 100$. Для любой реализации вычислялась оценка \hat{T} (методом Ньютона решалось уравнение (23), при этом точность отыскания корня $\varepsilon = 0.0001$). После чего вычислялись выборочные средние, выборочные дисперсии, верхняя и нижняя границы доверительных интервалов с доверительной вероятностью 0.95:

$$\hat{T} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{T}_j, \quad \hat{D} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\hat{T}_j - \hat{T})^2, \quad \bar{D} = \hat{T} + 1,96\sqrt{\frac{\hat{D}}{N}}, \quad \underline{D} = \hat{T} - 1,96\sqrt{\frac{\hat{D}}{N}},$$

где \hat{T}_j — оценка длительности мертвого времени, полученная в j -й реализации; \bar{D} — верхняя, \underline{D} — нижняя границы доверительных интервалов. Кроме того, вычислялось выборочное среднеквадратичное отклонение оценки от истинного значения T , известного из исходных данных имитационного моделирования:

$$\hat{V} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\hat{T}_j - T)^2.$$

В табл. 1 приведены результаты первой серии статистического эксперимента.

Вторая, третья и четвертая серии экспериментов отличаются от первой серии только числом n . Во второй серии экспериментов $n = 500$, в третьей — $n = 1000$, в четвертой — $n = 1500$. Результаты статистического эксперимента для этих серий приведены соответственно в табл. 2–4.

Таблица 1. Первая серия экспериментов

T	1	3	5	7	9
\overline{D}	1.182	3.580	6.256	23.191	109.03
\widehat{T}	0.988	2.991	5.226	19.374	91.089
\underline{D}	0.793	2.402	4.197	15.558	73.146
\widehat{V}	0.0011	0.0063	1.8875	424.99	13390

Таблица 2. Вторая серия экспериментов

T	1	3	5	7	9
\overline{D}	1.188	3.585	5.980	8.738	28.237
\widehat{T}	0.992	2.995	4.996	7.300	53.590
\underline{D}	0.797	2.405	4.011	5.862	18.943
\widehat{V}	0.0002	0.0009	0.0018	3.397	485.38

Таблица 3. Третья серия экспериментов

T	1	3	5	7	9
\overline{D}	1.190	3.586	5.979	8.352	15.905
\widehat{T}	0.994	2.996	4.995	6.997	13.288
\underline{D}	0.798	2.406	4.011	5.603	10.670
\widehat{V}	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	90.494

Таблица 4. Четвертая серия экспериментов

T	1	3	5	7	9
\overline{D}	1.1910	3.5840	5.9810	8.3360	11.923
\widehat{T}	0.9960	2.9940	4.9970	6.9640	9.969
\underline{D}	0.7990	2.4050	4.0130	5.5920	8.005
\widehat{V}	0.0001	0.0003	0.0006	0.0019	14.776

Анализ результатов показывает, что имеет место смещение оценок \widehat{T} относительно истинных значений T . Это смещение сильно зависит от длительности мертвого времени T и количества n наблюдаемых интервалов τ_i . С увеличением T , кроме того, имеет место тенденция к расширению доверительных интервалов. Это естественно, так как с увеличением T увеличивается потеря событий на общем периоде ненаблюдаемости, что влечет за собой снижение качества оценивания. Последнее демонстрируется поведением \widehat{V} . С увеличением же n , наоборот, качество оценки улучшается.

Заключение

Полученные результаты показывают возможность оценивания длительности мертвого времени по результатам текущих наблюдений за потоком событий для приборов с продлевающимся мертвым временем (оценки \widehat{T} при больших n достаточно близко лежат от истинных значений T).

Явный вид преобразования Лапласа (21) позволяет выписать уравнения моментов и для ситуаций, когда априорно задана только часть параметров полусинхронного потока. Самый неблагоприятный случай — если параметры λ_1 , λ_2 , α потока неизвестны. Очевидно, что в этом случае система из четырех уравнений моментов будет нетривиальна и ее решение сопряжено со значительными трудностями.

Список литературы

- [1] БАШАРИН Г.П., КОКОТУШКИН В.А., НАУМОВ В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.

- [2] БАШАРИН Г.П., КОКОТУШКИН В.А., НАУМОВ В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
- [3] NEUTS M.F. A versatile Markov point process // J. of Applied Probability. 1979. Vol. 16. P. 764–779.
- [4] ГОРЦЕВ А.М., НЕЖЕЛЬСКАЯ Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8–16.
- [5] ВАСИЛЬЕВА Л.А., ГОРЦЕВ А.М. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 69–79.
- [6] ГОРЦЕВ А.М., НЕЖЕЛЬСКАЯ Л.А. Оценивание периода мертвого времени и параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий // Измерительная техника. 2003. № 6. С. 7–13.
- [7] LUCANTONI D.M., NEUTS M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. Vol. 10. P. 575–598.
- [8] ВАСИЛЕВСКАЯ Т.П., ЗАВГОРОДНЯЯ М.Е., ШМЫРИН И.С. О соотношении моделей МАР-потока событий и асинхронного, полусинхронного и синхронного дважды стохастических потоков событий // Вестник Томского гос. ун-та. 2004. № 9(II). С. 138–144.
- [9] БУШЛАНОВ И.В., ГОРЦЕВ А.М. Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2004. № 9. С. 40–51.
- [10] АПАНАСОВИЧ В.В., КОЛЯДА А.А., ЧЕРНЯВСКИЙ А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск: Изд-во “Университетское”, 1988. 254 с.
- [11] ИВЧЕНКО Г.И., КАШТАНОВ В.А., КОВАЛЕНКО И.Н. Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982. 256 с.
- [12] ХИНЧИН А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963. 235 с.
- [13] КРАМЕР Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.

*Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.,
в переработанном виде — 16 октября 2007 г.*