

## Движение бинарной смеси в горизонтальной цилиндрической трубе\*

В. К. АНДРЕЕВ, Н. Л. СОБАЧКИНА

*Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия  
e-mail: andr@icm.krasn.ru*

Stationary and transient solutions to the problem of creeping motions of a binary mixture in a horizontal cylindrical tube are obtained. It was shown that a non stationary regime evolves into stationary solution when time tends to infinity. At the first instance, the stationary solutions of the problem were investigated in the limit of quite small Reynolds numbers.

### 1. Основные уравнения и граничные условия

Как известно, наличие в жидкости градиентов плотности приводит к тому, что потенциальная энергия гравитации может перейти в энергию движения под действием силы плавучести. Разности плотности могут вызываться как нагревом, так и разностью концентраций в жидких смесях. При этом многие процессы описываются уравнениями термодиффузии

$$\rho_0(\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u}) + \nabla p = \mu\Delta\mathbf{u} + \rho(T, C)\mathbf{g}; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad (2)$$

$$T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \chi\Delta T; \quad (3)$$

$$C_t + \mathbf{u} \cdot \nabla C = d\Delta C + \alpha d\Delta T, \quad (4)$$

где (модель Обербека—Буссинеска)

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_1 T - \beta_2 C); \quad (5)$$

$\mathbf{u}$  — скорость смеси;  $p$  — давление;  $T, C$  — отклонение температуры и концентрации от некоторых средних значений  $T_0, C_0$ ;  $\mathbf{g} = (-g, 0, 0)$  — ускорение силы тяжести;  $\mu, \chi, d, \alpha, \rho_0$  — положительные постоянные: динамическая вязкость, температуропроводность, коэффициенты диффузии, термодиффузии и средней плотности соответственно;  $\beta_1, \beta_2$  — положительные постоянные коэффициенты теплового и концентрационного расширения смеси;  $x, y, z$  — декартовы координаты. В уравнении (5) стоит знак минус при  $\beta_2 C$ , поскольку  $C$  — концентрация легкого компонента.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00836, грант НШ 5873.2006.1).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2008.

Введем модифицированное давление  $\bar{p} = p - \rho_0 g x$  ( $\bar{p}$  представляет собой отклонение давления от гидростатического), тогда уравнение импульса (1) с учетом уравнения состояния (5) переписывается в виде

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \bar{p} = \nu \Delta \mathbf{u} + g(\beta_1 T + \beta_2 C), \quad (6)$$

где  $\nu = \mu/\rho_0$  — кинематическая вязкость бинарной смеси. Система уравнений (2)–(4) и (6) допускает оператор [1]  $-\partial_z + \rho_0 g x(\beta_1 A + \beta_2 B) \partial \bar{p} + A \partial_T + B \partial_C$ ,  $A > 0$ ,  $B$  — постоянные. Тогда инвариантные относительно этого оператора решения указанной системы имеют представления

$$\mathbf{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t)), \quad (7)$$

$$\bar{p} = -(A\beta_1 + \beta_2 B)g\rho_0 xz + q(x, y, t), \quad T = -Az + \theta(x, y, t), \quad C = -Bz + c(x, y, t),$$

причем функции  $u, v, w, q, \theta, c$  будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений с тремя независимыми переменными  $x, y, t$ .

Следует отметить, что в работе Р.В. Бириха [2] были построены точные *стационарные решения* вида (7) для уравнений вязкой теплопроводной жидкости, в которых  $u = v = 0$ , а  $w, \theta, q$  зависят лишь от переменной  $x$ , являясь полиномами третьей, пятой и шестой степени соответственно. Одно из решений описывает течение в полосе  $h < x < 0$ , обе границы которой суть твердые стенки, а во втором решении верхняя граница полосы является свободной, подверженной действию терموкапиллярных сил.

Решения вида (7) — обобщение решений Бириха — удобно интерпретировать как движение бинарной смеси в горизонтальной цилиндрической трубе, имеющей сечение  $\Omega$  с характерным диаметром  $h = \text{const}$ . Основными критериями подобия в этой задаче являются число Грассгофа  $G$ , число Прандтля  $Pr$ , число Шмидта  $Sc$ , параметры термодиффузии  $\varepsilon, \varepsilon_1$ , определяемые формулами

$$G = \frac{A\beta_1 g h^4}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Sc = \frac{\nu}{d}, \quad \varepsilon = -\frac{\alpha\beta_2}{\beta_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\chi\beta_2 B}{d\beta_1 A}. \quad (8)$$

**Замечание 1.** На самом деле  $\varepsilon_1 = Sc Ra_c (Pr Ra)^{-1}$ , где  $Ra = g\beta_1 A h^4 (\nu\chi)^{-1}$ ,  $Ra_c = g\beta_2 B h^4 (\nu d)^{-1}$  — тепловое и концентрационные числа Рэлея.

Выберем в качестве характерного масштаба длины  $h$ , времени — величину  $h^2/\nu$  и перейдем к новым искомым функциям  $u', v', w', q', \theta', c'$  по формулам

$$u = \frac{\nu}{h} Pr G^2 u', \quad v = \frac{\nu}{h} Pr G^2 v', \quad w = \frac{\nu}{h} G w', \quad q = \rho_0 \beta_1 g A h^2 Pr G q', \quad (9)$$

$$\theta = A h Pr G \theta', \quad c = \frac{A \beta_1 h Pr G c'}{\beta_2}.$$

В (9) новые искомые функции зависят от безразмерных переменных  $x' = x/h$ ,  $y' = y/h$ ,  $t' = \nu t/h^2$ . Подстановка (7), (9) в (2)–(4) и (6) приводит к системе уравнений (штрихи для удобства опущены)

$$u_t + \lambda(uu_x + vu_y) = -q_x + \Delta_2 u + \theta + c,$$

$$v_t + \lambda(uv_x + vv_y) = -q_y + \Delta_2 v,$$

$$w_t + \lambda(uw_x + vw_y) = -x + \Delta_2 w, \quad (10)$$

$$u_x + v_y = 0, \quad Pr \theta_t + \lambda Pr (u\theta_x + v\theta_y) - w = \Delta_2 \theta,$$

$$Sc c_t + \lambda Sc (uc_x + vc_y) - \varepsilon_1 w = \Delta_2 c - \varepsilon \Delta_2 \theta,$$

где  $\lambda = \text{Pr} G^2$ ,  $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  — оператор Лапласа.

Без учета эффектов термодиффузии ( $c = 0$  и в (10) отсутствует последнее уравнение для концентрации) *ползущее стационарное решение* ( $\lambda = 0$ ) системы (10) найдено в работе В.В. Пухначева [3] для круглой цилиндрической трубы. Ниже также ограничимся этой геометрией, так что  $h$  в исходной задаче есть радиус поперечного сечения трубы.

Перейдем к цилиндрическим координатам  $r, \varphi, z$ , направив координату  $z$  по оси трубы. Тогда система (10) — уравнения движения, энергии и переноса примеси в безразмерных переменных — примет вид

$$\begin{aligned} u_t + \lambda \left( uu_r + \frac{v}{r} u_\varphi - \frac{v^2}{r} \right) &= -q_r + \Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2v_\varphi}{r^2} + (\theta + c) \cos \varphi, \\ v_t + \lambda \left( uv_r + \frac{v}{r} v_\varphi + \frac{uv}{r} \right) &= -\frac{1}{r} q_\varphi + \Delta v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} u_\varphi - (\theta + c) \sin \varphi, \\ w_t + \lambda \left( uw_r + \frac{v}{r} w_\varphi \right) &= -r \cos \varphi + \Delta w, \\ u_r + \frac{1}{r} u + \frac{1}{r} v_\varphi &= 0, \\ \text{Pr} \theta_t + \lambda \text{Pr}(u\theta_r + v\theta_\varphi) - w &= \Delta \theta, \\ \text{Sc} c_t + \lambda \text{Sc}(uc_r + vc_\varphi) - \varepsilon_1 w &= \Delta c - \varepsilon \Delta \theta, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $u, v, w$  — проекции вектора скорости на оси  $r, \varphi, z$  цилиндрической системы координат (обозначения для проекций скоростей прежние),  $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial^2/\partial \varphi^2$  — оператор Лапласа в полярной системе координат.

Перейдем к постановке начально-краевой задачи: найти решение  $u, v, w, \theta, c, q$  системы (11) в цилиндре  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} u &= u_0(r, \varphi), \quad v = v_0(r, \varphi), \quad w = w_0(r, \varphi), \quad \theta = \theta_0(r, \varphi), \\ c &= c_0(r, \varphi), \quad q = q_0(r, \varphi) \quad \text{при } t = 0, \quad 0 < r < 1; \end{aligned} \quad (12)$$

условиям прилипания для скоростей на твердой стенке

$$u = v = w = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad t > 0; \quad (13)$$

условиям для “температуры” и “концентрации” на стенке

$$\theta_r = 0, \quad c_r - \varepsilon \theta_r = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad t > 0; \quad (14)$$

условиям ограниченности функций  $u, w, \theta, c, q$  при  $r = 0$

$$|u| < \infty, \quad |v| < \infty, \quad |w| < \infty, \quad |\theta| < \infty, \quad |c| < \infty, \quad |q| < \infty. \quad (15)$$

Введем функцию тока  $\psi(r, \varphi)$ , связанную с  $u$  и  $v$  соотношениями  $u = r^{-1}\psi_\varphi$ ,  $v = -\psi_r$ . Тогда система (11) перепишется в виде

$$\Delta \psi_t + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial(\Delta \psi, \psi)}{\partial(r, \varphi)} = \Delta \Delta \psi + (\theta_r + c_r) \sin \varphi + \frac{1}{r} (\theta_\varphi + c_\varphi) \cos \varphi; \quad (16)$$

$$w_t + \frac{\lambda}{r} (\psi_\varphi w_r - \psi_r w_\varphi) = \Delta w - r \cos \varphi; \quad (17)$$

$$\text{Pr} \theta_t + \frac{\lambda \text{Pr}}{r} (\psi_\varphi \theta_r - \psi_r \theta_\varphi) - w = \Delta \theta; \quad (18)$$

$$\text{Sc} c_t + \frac{\lambda}{r} \text{Sc} (\psi_\varphi c_r - \psi_r c_\varphi) - \varepsilon_1 w = \Delta c - \varepsilon \Delta \theta, \quad (19)$$

где

$$\frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(r, \varphi)} = (\Delta\psi)_r \psi_\varphi - (\Delta\psi)_\varphi \psi_r, \quad \Delta\psi = \psi_{rr} + \frac{1}{r} \psi_r + \frac{1}{r^2} \psi_{\varphi\varphi}.$$

Начальные и граничные условия преобразуются так:

$$w = w_0(r, \varphi), \quad \psi = \psi_0(r, \varphi), \quad \theta = \theta_0(r, \varphi), \quad c = c_0(r, \varphi) \quad \text{при } t = 0; \quad (20)$$

$$\psi = 0, \quad \psi_r = 0, \quad \theta_r = 0, \quad c_r - \varepsilon \theta_r = 0 \quad \text{при } r = 1; \quad (21)$$

$$\frac{1}{r} \psi_\varphi, \psi_r, w, \theta, c \quad \text{ограничены при } r = 0. \quad (22)$$

Таким образом, решаем задачу (16)–(22) с неизвестными  $\psi, w, \theta, c$ , причем  $t \geq 0, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

## 2. Стационарные ползущие движения в случае теплоизолированной стенки

Представляет интерес стационарная задача для системы (16)–(22), в которой  $w_t = \psi_t = \theta_t = c_t = 0$ , тогда начальные условия (20) не ставятся. Пусть на границе условие для “температуры” имеет вид из (21):  $\theta_r = 0$ . Будем рассматривать ползущее движение, т. е. в системе (16)–(19) положим  $\lambda = 0$ . Из (17) следует, что  $\Delta w = r \cos \varphi$ . Решение этого уравнения ищем в виде  $w = W(r) \cos \varphi$ . После подстановки получаем уравнение на  $W(r)$ :

$$W'' + \frac{1}{r} W' - \frac{1}{r^2} W = r.$$

Используя условие ограниченности (15) для  $w$  при  $r = 0$ , находим

$$W = \frac{1}{8} r^3 + cr,$$

или

$$w = \left( \frac{1}{8} r^3 + cr \right) \cos \varphi.$$

Из граничного условия  $w = 0$  при  $r = 1$  определим постоянную  $c = -1/8$ . Итак,

$$w = \frac{1}{8} (r^3 - r) \cos \varphi. \quad (23)$$

Далее находим  $\theta(r, \varphi)$  из уравнения (18). Полагая  $\theta = T(r) \cos \varphi$ , после некоторых вычислений получим

$$\theta = -\frac{(r^5 - 3r^3 + 4r)}{2^6 \cdot 3} \cos \varphi. \quad (24)$$

Распределение “концентрации” теперь найдется из (19):

$$c = -\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon)(r^5 - 3r^3 + 4r)}{2^6 \cdot 3} \cos \varphi. \quad (25)$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \theta_r &= -\frac{\cos \varphi}{2^6 \cdot 3} (5r^4 - 9r^2 + 4), & \theta_\varphi &= \frac{\sin \varphi}{2^6 \cdot 3} (r^5 - 3r^3 + 4r), \\ c_r &= -\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon) \cos \varphi}{2^6 \cdot 3} (5r^4 - 9r^2 + 4), & c_\varphi &= \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon) \sin \varphi}{2^6 \cdot 3} (r^5 - 3r^3 + 4r), \end{aligned}$$

найдем правую часть в уравнении (16):

$$(\theta_r + c_r) \sin \varphi + \frac{1}{r} (\theta_\varphi + c_\varphi) \cos \varphi = -\frac{\sin 2\varphi}{2^6 \cdot 3} (2r^4 - 3r^2)(1 + \varepsilon + \varepsilon_1).$$

Положив  $\Delta\psi = z$ , приходим к уравнению

$$\Delta z = \frac{\sin 2\varphi}{2^6 \cdot 3} (2r^4 - 3r^2)(1 + \varepsilon + \varepsilon_1),$$

решение которого ищем в виде  $z = Z(r) \sin 2\varphi / (2^6 \cdot 3)$ . Уравнение на  $Z(r)$  имеет вид

$$Z'' + \frac{1}{r} Z' - \frac{4}{r^2} Z = -(3r^2 - 2r^4)(1 + \varepsilon + \varepsilon_1).$$

Значит, надо искать  $Z(r)$  в виде полинома шестой степени. После некоторых вычислений получим

$$Z = \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{16} r^6 - \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{4} r^4 + ar^2,$$

или

$$z = \left[ \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{16} r^6 - \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{4} r^4 + ar^2 \right] \frac{\sin 2\varphi}{2^6 \cdot 3}.$$

Поэтому для  $\psi(r, \varphi)$  имеем уравнение

$$\Delta\psi = \left[ \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{16} r^6 - \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{4} r^4 + ar^2 \right] \frac{\sin 2\varphi}{2^6 \cdot 3}.$$

Вновь, полагая  $\psi = \Psi(r) \sin 2\varphi / (2^6 \cdot 3)$ , получим уравнение на  $\Psi(r)$ :

$$\Psi'' + \frac{1}{r} \Psi' - \frac{4}{r^2} \Psi = \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{16} r^6 - \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{4} r^4 + ar^2.$$

Решение ищется в виде полинома восьмой степени, и для  $\psi(r, \varphi)$  находим представление с учетом ограниченности (22)

$$\psi(r, \varphi) = \frac{\sin 2\varphi}{2^6 \cdot 3} \left[ \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{16 \cdot 60} r^8 - \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{4 \cdot 32} r^6 + \frac{a}{12} r^4 + br^2 \right]$$

с точностью до двух постоянных  $a, b$ . Они определяются из граничных условий (21), откуда  $a = 3(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)/20$ ,  $b = -11(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)/(2 \cdot 3 \cdot 5)$ . Окончательно функция тока имеет вид

$$\psi(r, \varphi) = \frac{\sin 2\varphi}{2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5} (1 + \varepsilon + \varepsilon_1)(2r^8 - 15r^6 + 24r^4 - 11r^2). \quad (26)$$

Для  $q$  имеем представление из первых двух уравнений системы (11):

$$q = \frac{r^2(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5} [10(2r^4 - 9r^2 + 24) + 3(5r^4 - 20r^2 + 9) \cos 2\varphi]. \quad (27)$$

Если  $\varepsilon = -\varepsilon_1$ , то получим решение Пухначева без учета концентрации [3]. Если  $\varepsilon = -1 - \varepsilon_1$ , то  $\psi(r, \varphi) = 0$  и, следовательно,  $u = v = 0$ ,  $q = 0$ , а  $w = w(r, \varphi)$ ,  $\theta = \theta(r, \varphi)$ ,  $c = c(r, \varphi)$  определяются по формулам (23)–(25).

### 3. Стационарные ползущие движения при заданной температуре стенки

Рассмотрим случай стационарного движения, когда на границе условие для функции  $\theta$  при  $r = 1$  имеет вид

$$\theta = A \cos \varphi, \quad (28)$$

где  $A$  — заданная постоянная.

Функция  $w(r, \varphi)$  по-прежнему дается формулой (23). Из уравнения (18) и условия (28) восстанавливаем “температуру”

$$\theta = -\frac{[r^5 - 3r^3 + (2 - 192A)r] \cos \varphi}{2^6 \cdot 3}. \quad (29)$$

Из уравнения (19) и граничного условия (22) находим “концентрацию”

$$c = -\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon)}{2^6 \cdot 3} \left[ r^5 - 3r^3 + \frac{(4 - 2\varepsilon(96A - 1))}{1 + \varepsilon} r \right] \cos \varphi. \quad (30)$$

Правая часть в уравнении (16) равна

$$(\theta_r + c_r) \sin \varphi + \frac{1}{r} (\theta_\varphi + c_\varphi) \cos \varphi = -\frac{\sin 2\varphi}{2^6 \cdot 3} (2r^4 - 3r^3)(1 + \varepsilon + \varepsilon_1).$$

Таким образом, выражение для функции тока имеет такое же представление, как и в (27).

Вычислим массовый расход смеси через поперечное сечение трубы:

$$Q = \rho \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Omega,$$

где  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{n}$  — вектор нормали,  $\Omega$  — поперечное сечение трубы.

Поскольку  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = w$ , то

$$Q = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} wr dr d\varphi,$$

где  $w$  задается в размерных переменных в виде

$$w = \frac{\nu}{h} G \frac{1}{8} (r^3 - r) \cos \varphi,$$

поэтому  $Q = 0$ . Следовательно, расход смеси через поперечное сечение трубы равен нулю. Это равенство, аналогичное условию замкнутости потока, позволяет надеяться

на то, что решения вида (7) хорошо аппроксимируют стационарное течение вдали от торцов длинного горизонтального цилиндра, вызванное линейным распределением температуры и концентрации вдоль его боковой поверхности. Таким образом, обобщение решений Бириха будет приближенно описывать движение смеси в центральной части цилиндра. В верхней половине трубы смесь движется в отрицательном направлении оси  $z$ , а в нижней — в положительном, это следует из (23). Так как  $w$  указывает направление движения смеси:  $w > 0$  — в нижней половине трубы, поскольку  $\cos \varphi < 0$ ,  $w < 0$  — в верхней половине ( $\cos \varphi > 0$ ). Здесь учтено, что  $r^3 - r < 0$  при  $0 < r < 1$ .

#### 4. Нестационарные ползущие движения

Решаем нестационарную задачу (16)–(22) для ползущих движений ( $\lambda = 0$ ). Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (17) с условиями (10)–(12). Решение ищем в виде

$$w = W(r, t) \cos \varphi. \quad (31)$$

После подстановки в уравнение (17) приходим к задаче

$$W_t = W_{rr} + \frac{1}{r} W_r - \frac{1}{r^2} W - r; \quad (32)$$

$$W|_{t=0} = 0; \quad (33)$$

$$W|_{r=1} = 0; \quad (34)$$

$$|W| < \infty \quad \text{при } r = 0. \quad (35)$$

Решение задачи (32)–(35) ищется по методу Фурье решения краевых задач для параболических уравнений. Итак, получим

$$w = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(\mu_n^{(1)})^2} [\exp(-(\mu_n^{(1)})^2 t) - 1] J_1(\mu_n^{(1)} r) \right] \cos \varphi, \quad (36)$$

где  $c_n = (\mu_n^{(1)})^{-1} J_2(\mu_n^{(1)}) / \|J_1(\mu_n^{(1)} r)\|^2$  — коэффициенты ряда Фурье [4],  $J_1(\mu)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка,  $\mu_n^{(1)}$  — ее нули.

Затем решаем начально-краевую задачу для уравнения (18) с условиями (20)–(22) по методу Фурье. В результате находим выражение для “температуры”

$$\theta = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(\mu_n^{(1)})^4} \left[ -\frac{\text{Pr}}{1 - \text{Pr}} \exp\left(-\frac{(\mu_n^{(1)})^2 t}{\text{Pr}}\right) + \frac{1}{1 - \text{Pr}} \exp(-(\mu_n^{(1)})^2 t) - 1 \right] J_1(\mu_n^{(1)} r) \right\} \cos \varphi, \quad \text{Pr} \neq 1. \quad (37)$$

Далее решаем начально-краевую задачу для уравнения (19) с условиями (20)–(22). В результате находим “концентрацию” ( $\text{Sc} \neq 1$ )

$$c = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(\mu_n^{(1)})^4} \left[ -\frac{\text{Sc}(\varepsilon_1 + \varepsilon)}{1 - \text{Sc}} \exp\left(-\frac{(\mu_n^{(1)})^2 t}{\text{Sc}}\right) + \frac{\varepsilon_1}{1 - \text{Sc}} \exp(-(\mu_n^{(1)})^2 t) - \frac{\varepsilon \text{Pr}}{(1 - \text{Pr})(1 - \text{Sc})} \right] \right\} \times$$

$$\times \exp \left( -\frac{(\mu_n^{(1)})^2 t}{\text{Pr}} \right) + \frac{\varepsilon}{(1 - \text{Pr})(1 - \text{Sc})} \exp(-(\mu_n^{(1)})^2 t) - (\varepsilon_1 + \varepsilon) \left] J_1(\mu_n^{(1)} r) \right\} \cos \varphi.$$

Рассмотрим теперь случай, когда числа Прандтля и Шмидта равны единице, т. е.  $\text{Pr} = \text{Sc} = 1$ . Функция  $w(r, \varphi)$  здесь также дается формулой (37), а задача для “температуры”  $\theta(r, \varphi, t)$  будет иметь вид

$$\theta_t - w = \Delta \theta; \quad \theta|_{t=0} = 0; \quad \theta_r|_{r=1} = 0; \quad |\theta| < \infty \quad \text{при } r = 0.$$

Решение этой задачи ищется по методу Фурье и имеет представление

$$\theta = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(\mu_n^{(1)})^4} (e^{-(\mu_n^{(1)})^2 t} + t(\mu_n^{(1)})^2 e^{-(\mu_n^{(1)})^2 t} - 1) J_1(\mu_n^{(1)} r) \right] \cos \varphi. \quad (38)$$

Здесь  $c_n$  такие же, как и в формулах (36), (37). Аналогично, задача для  $c(r, \varphi, t)$  при  $\lambda = 0$  имеет вид

$$c_t - \varepsilon_1 w = \Delta c - \varepsilon \Delta \theta; \quad c|_{t=0} = 0; \quad c_r - \varepsilon \theta_r = 0 \quad \text{при } r = 1; \quad |c| < \infty \quad \text{при } r = 0.$$

Значит, “концентрация” имеет распределение

$$c = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{c_n}{(\mu_n^{(1)})^4} (\varepsilon_1 + \varepsilon) e^{-(\mu_n^{(1)})^2 t} + \frac{t c_n}{(\mu_n^{(1)})^2} (\varepsilon_1 + \varepsilon) e^{-(\mu_n^{(1)})^2 t} + \frac{t^2 \varepsilon c_n}{2} e^{-(\mu_n^{(1)})^2 t} - \frac{c_n}{(\mu_n^{(1)})^2} (\varepsilon_1 + \varepsilon) \right] J_1(\mu_n^{(1)}) \right\} \cos \varphi. \quad (39)$$

Получаем следующий результат: нестационарное решение для  $w, c, \theta$  при  $t \rightarrow \infty$  стремится к стационарному решению задачи о ползущем движении. Таким образом, при больших временах нестационарное решение выходит на стационарный режим, причем и при  $\text{Pr} = \text{Sc} = 1$  также получаем выход на стационарное решение задачи.

Отметим, что характерной особенностью обсуждаемого класса течений является возможность переноса ими пассивной примеси на большие расстояния вдоль трубы при совместном действии продольного градиента температуры и поперечной силы тяжести (при этом величина последней может быть очень малой). Оценку величины продольной скорости можно получить из формулы  $w = \nu h^{-1} G w'$ , где  $w'$  имеет порядок единицы; тогда  $w \sim A \beta_1 g h^3 / \nu$ . Полагая  $h = 5$  см,  $\nu = 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с,  $\beta_1 = 0.4 \cdot 10^{-3}$  К<sup>-1</sup>,  $A = 1$  К/см,  $g = 0.2$  см/с<sup>2</sup>, приходим к оценке  $w \sim 1$  см/с.

## 5. Первое приближение

Рассмотрим стационарную задачу (16)–(22) при достаточно малых значениях параметра  $\lambda$ . Ее решение можно представить формальными рядами

$$\psi(r, \varphi) = \psi_0(r, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \psi_{k+1}(r, \varphi),$$

$$w(r, \varphi) = w_0(r, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} w_{k+1}(r, \varphi),$$



$$\theta(r, \varphi) = \theta_0(r, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \theta_{k+1}(r, \varphi), \quad (40)$$

$$c(r, \varphi) = c_0(r, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} c_{k+1}(r, \varphi),$$

где  $\psi^0, w^0, c^0$  есть решение соответствующих задач при  $\lambda = 0$  (например,  $\psi^0, w^0, c^0$  определяются формулами (26), (23)–(25)), а функции  $\Psi_{k+1}, w_{k+1}, \theta_{k+1}, c_{k+1}$  — последовательно как решение *линейных* задач

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\psi_{k+1} + \left( \frac{\partial\theta_{k+1}}{\partial r} + \frac{\partial c_{k+1}}{\partial r} \right) \sin\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial\theta_{k+1}}{\partial\varphi} + \frac{\partial c_{k+1}}{\partial\varphi} \right) \cos\varphi = \\ = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^k \frac{\partial(\Delta\psi_j, \psi_{k-j})}{\partial(r, \varphi)}; \end{aligned} \quad (41)$$

$$\Delta w_{k+1} = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^k \frac{\partial(\psi_j, w_{k-j})}{\partial(r, \varphi)}; \quad (42)$$

$$\Delta\theta_{k+1} + w_{k+1} = \frac{\text{Pr}}{r} \sum_{j=0}^k \frac{\partial(\psi_j, \theta_{k-j})}{\partial(r, \varphi)}; \quad (43)$$

$$\Delta c_{k+1} - \varepsilon\Delta\theta_{k+1} + \varepsilon_1 w_{k+1} = \frac{\text{Sc}}{r} \sum_{j=0}^k \frac{\partial(\psi_j, c_{k-j})}{\partial(r, \varphi)}. \quad (44)$$

Граничные условия для  $\psi_{k+1}, w_{k+1}, \theta_{k+1}, c_{k+1}$  остаются прежними: (21)–(22).

Найдем первое приближение, т. е. положим в (40)–(44)  $k = 0$ . Тогда задача о нахождении  $\psi_1, w_1, \theta_1, c_1$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\psi_1 + \left( \frac{\partial\theta_1}{\partial r} + \frac{\partial c_1}{\partial r} \right) \sin\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial c_1}{\partial\varphi} \right) \cos\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial(\Delta\psi_0, \psi_0)}{\partial(r, \varphi)}, \\ \Delta w_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi_0, w_0)}{\partial(r, \varphi)}, \quad \Delta\theta_1 + w_1 = \frac{\text{Pr}}{r} \frac{\partial(\psi_0, \theta_0)}{\partial(r, \varphi)}, \\ \Delta c_1 - \varepsilon\Delta\theta_1 + \varepsilon_1 w_1 = \frac{\text{Sc}}{r} \frac{\partial(\psi_0, c_0)}{\partial(r, \varphi)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Согласно (23)–(26),

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi_0, w_0)}{\partial(r, \varphi)} = \frac{\cos\varphi(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5} \times \\ \times [8r^{10} - 53r^8 + 93r^6 - 59r^4 + 11r^2 + \cos 2\varphi(-2r^{10} + 6r^8 - 6r^6 + 2r^4)]; \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi_0, \theta_0)}{\partial(r, \varphi)} = -\frac{\cos\varphi(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5} [8r^{12} - 69r^{10} + 215r^8 - \\ - 335r^6 + 225r^4 - 44r^2 + \cos 2\varphi(2r^{12} - 24r^{10} + 48r^8 + 4r^6 - 30r^4)]; \end{aligned} \quad (47)$$

$$\frac{\partial(\psi_0, c_0)}{\partial(r, \varphi)} = -\frac{\cos \varphi(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)(\varepsilon + \varepsilon_1)}{2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5} [8r^{12} - 69r^{10} + 215r^8 - 335r^6 + 225r^4 - 44r^2 + \cos 2\varphi(2r^{12} - 24r^{10} + 48r^8 + 4r^6 - 30r^4)]; \quad (48)$$

$$\frac{\partial(\Delta\psi_0, \psi_0)}{\partial(r, \varphi)} = -\frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)^2 \sin 4\varphi}{2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5} \left( -\frac{1}{4}r^{13} + 2r^{11} - \frac{63}{5}r^9 + \frac{25}{4}r^7 - \frac{17}{10}r^5 \right). \quad (49)$$

Подставляя выражения (46)–(49) в (45), получим уравнения для определения  $w_1$ ,  $\theta_1$ ,  $c_1$ ,  $\psi_1$ . Решая их, найдем следующие представления:

$$w_1 = \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1) \cos \varphi}{2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5} \left[ \frac{1}{15}r^{11} - \frac{53}{80}r^9 + \frac{31}{16}r^7 - \frac{59}{24}r^5 + \frac{11}{8}r^3 - \frac{31}{120}r + \cos 2\varphi \left( -\frac{1}{60}r^{11} + \frac{3}{40}r^9 - \frac{1}{8}r^7 + \frac{1}{12}r^5 - \frac{1}{60}r \right) \right]; \quad (50)$$

$$\theta_1 = -\frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon_1) \cos \varphi}{2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5} \left[ \frac{1}{2520}r^{13} - \frac{53}{9600}r^{11} + \frac{31}{1280}r^9 - \frac{59}{1152}r^7 + \frac{11}{192}r^5 - \frac{31}{360}r^3 + \frac{87}{134400}r + \cos 2\varphi \left( -\frac{1}{10080}r^{13} + \frac{1}{1600}r^{11} - \frac{1}{640}r^9 + \frac{1}{576}r^7 - \frac{1}{480}r^3 + \frac{23}{5600}r \right) \right] - \frac{\text{Pr} \cos \varphi(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5} \left[ \frac{1}{21}r^{13} - \frac{23}{40}r^{11} + \frac{43}{16}r^9 - \frac{335}{48}r^7 + \frac{225}{24}r^5 - \frac{11}{2}r^3 - \frac{1}{420}r + \cos 2\varphi \left( \frac{1}{84}r^{13} - \frac{1}{5}r^{11} + \frac{3}{5}r^9 + \frac{1}{12}r^7 - \frac{5}{4}r^3 - \frac{79}{420}r \right) \right]; \quad (51)$$

$$c_1 = -\frac{(\varepsilon + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon + \varepsilon_1) \cos \varphi}{2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5} \left[ \frac{1}{2520}r^{13} - \frac{53}{9600}r^{11} + \frac{31}{1280}r^9 - \frac{59}{1152}r^7 + \frac{11}{192}r^5 - \frac{31}{960}r^3 + \frac{877}{134400}r + \cos 2\varphi \left( -\frac{1}{10080}r^{13} + \frac{1}{1600}r^{11} - \frac{1}{640}r^9 + \frac{1}{576}r^7 - \frac{1}{480}r^3 + \frac{23}{5600}r \right) \right] - \frac{\text{Pr} \cos \varphi(1 + \varepsilon + \varepsilon_1) \cdot \varepsilon}{2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5} \left[ \frac{1}{21}r^{13} - \frac{23}{40}r^{11} + \frac{43}{16}r^9 - \frac{335}{48}r^7 + \frac{225}{24}r^5 - \frac{11}{2}r^3 - \frac{1}{420}r + \cos 2\varphi \left( \frac{1}{84}r^{13} - \frac{1}{5}r^{11} + \frac{3}{5}r^9 + \frac{1}{12}r^7 - \frac{5}{4}r^3 - \frac{79}{420}r \right) \right] - \frac{\text{Sc} \cos \varphi(\varepsilon + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5} \left[ \frac{1}{21}r^{13} - \frac{23}{40}r^{11} + \frac{43}{16}r^9 - \frac{335}{48}r^7 + \frac{225}{24}r^5 - \frac{11}{2}r^3 - \frac{1}{420}r + \cos 2\varphi \left( \frac{1}{84}r^{13} - \frac{1}{5}r^{11} + \frac{3}{5}r^9 + \frac{1}{12}r^7 - \frac{5}{4}r^3 - \frac{79}{420}r \right) \right]. \quad (52)$$

Найденные решения удовлетворяют и граничным условиям (21), (22). Итак, решение стационарной задачи при достаточно малых  $\lambda$  в первом приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(r, \varphi) &= \psi_0(r, \varphi) + \lambda\psi_1(r, \varphi), & w(r, \varphi) &= w_0(r, \varphi) + \lambda w_1(r, \varphi), \\ \theta(r, \varphi) &= \theta_0(r, \varphi) + \lambda\theta_1(r, \varphi), & c(r, \varphi) &= c_0(r, \varphi) + \lambda c_1(r, \varphi). \end{aligned} \quad (53)$$

Рассматриваемое в задаче (16)–(22) при  $\lambda = 0$  течение имеет плоскости симметрии  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Область течения  $x^2 + y^2 < 1$ ,  $z \in \mathcal{R}$  разбивается плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$

на четыре части, каждая из которых заполнена вложенными друг в друга цилиндрическими поверхностями тока  $\psi(x, y) = \text{const}$ ,  $z \in \mathcal{R}$ . Траектории жидких частиц имеют спиральный характер. В верхней половине трубы смесь движется в отрицательном направлении оси  $z$ , а в нижней — в положительном (рис. 1). Поясним, что рисунки изображены в декартовых координатах, вертикальная ось — ось  $z$ , в направлении которой происходит движение смеси. Масштаб по координатным осям выбирается следующим образом:

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad -\infty \leq z \leq \infty.$$

Приведем пример численного расчета профилей скорости, распределения “температуры” и “концентрации” для различных значений суммы параметров  $\varepsilon + \varepsilon_1$ . При отсутствии термодиффузии ( $\varepsilon + \varepsilon_1 = 0$ ) жидкость поднимается вверх около нагретой стенки и опускается вниз около холодной. В этом случае отсутствуют неоднородности “концентрации” ( $c = 0$ ). Если  $\varepsilon + \varepsilon_1 > 0$ , то происходит нормальная термодиффузия и легкий компонент диффундирует в сторону нагретой границы. При  $\varepsilon + \varepsilon_1 = -1$  функция тока обращается в ноль, наступает механическое равновесие. Дальнейшее уменьшение суммы параметров  $\varepsilon + \varepsilon_1$  приводит к аномальной термодиффузии: легкие компоненты

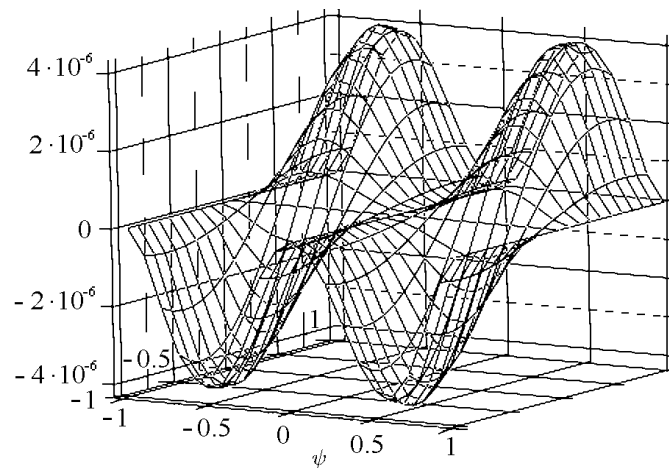


Рис. 1. Поведение функции тока  $\psi$

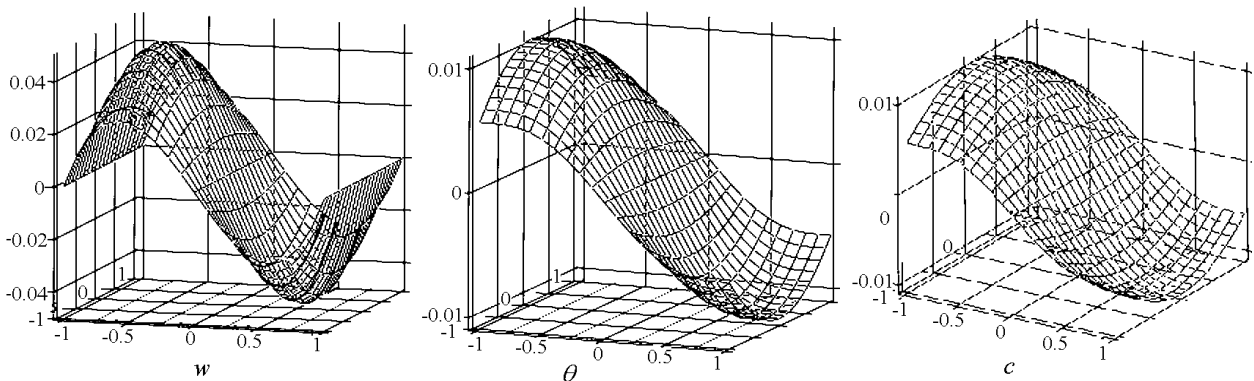
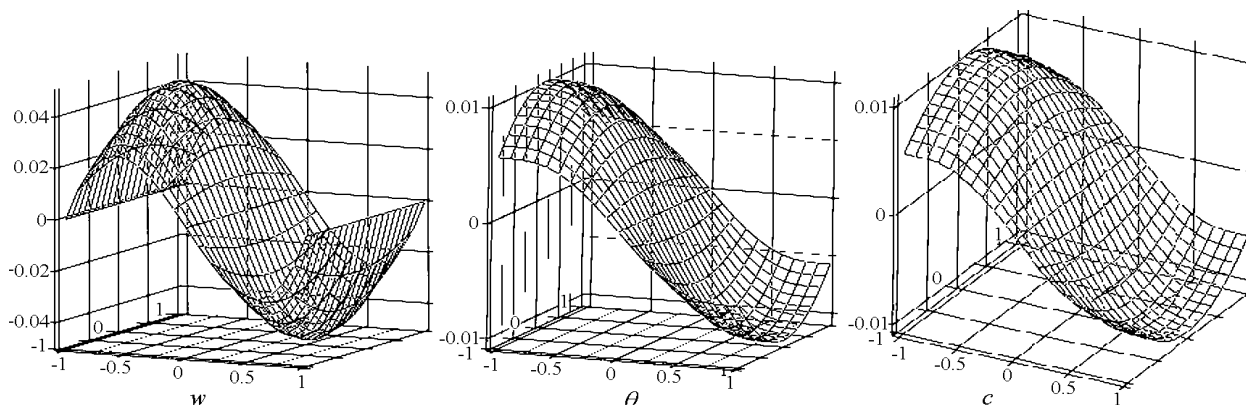


Рис. 2. Поведение функций  $w$ ,  $\theta$ ,  $c$  при  $\lambda = 0$

Рис. 3. Поведение функций  $w$ ,  $\theta$ ,  $c$  при  $\lambda = 10^{-3}$ 

стремятся в сторону холодной границы, а тяжелые оказываются в областях с повышенной температурой (рис. 2).

Указанная четырехъячеистая структура, которой обладает решение задачи (16)–(22) при  $\lambda = 0$ , сохраняется и в решении нелинейной стационарной задачи для той же системы при достаточно малых  $\lambda \neq 0$ .

Так, на рис. 3 показано, что движение смеси в цилиндре не меняется. Происходит расширение области, в которой движутся жидкие частицы, на величину порядка  $\lambda$ , т. е. спираль, по которой перемещаются частицы, расширяется на эту величину. Что касается функций  $\theta$  и  $c$ , то их максимальные значения уменьшаются на величину порядка  $\lambda$ .

## Список литературы

- [1] Андреев В.К., Рыжков И.И. Групповая классификация и точные решения уравнений термодиффузии // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 4, № 4. С. 508–517.
- [2] Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. №3. С. 63–74.
- [3] Пухначев В.В. Теоретико-групповая природа решения Бириха и его обобщения // Сб. тр. междунар. конф. “Симметрия и дифференциальные уравнения”. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2000. С. 180–183.
- [4] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2003. 398 с.

*Поступила в редакцию 11 июля 2007 г.,  
в переработанном виде — 21 сентября 2007 г.*