

# АЛГОРИТМ РАСЧЕТА КОНТАКТНЫХ ГРАНИЦ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО СОУДАРЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ\*

Н. Т. Югов, Н. Н. Белов, М. В. Хабибуллин, С. В. Старенченко

*НИИ прикладной математики и механики  
при Томском государственном университете, Россия*

A universal (for 2D and 3D cases) algorithm of calculating contact boundaries for the solution of the high-speed collision of deformable solids is presented in detail which enables one to allow for sliding one solid past the other and not only for the process of penetration, but also for ricocheting. Taking three-dimensional calculations of slant collision of a cylinder with an obstacle by way of example, the influence of the algorithmic friction coefficient on the way the colliding bodies are deformed is shown.

При решении задач соударения деформируемых твердых тел возникает нетривиальный вопрос о расчете контактных границ взаимодействующих тел, особенно актуальный при численной реализации трехмерных задач. Правильное решение данного вопроса позволяет существенно расширить вычислительные возможности программ и рассчитывать соударение пространственных тел различной конфигурации.

Математическая постановка трехмерной задачи о наклонном соударении цилиндрического ударника с преградой конечной толщины, а также основные соотношения модифицированного метода конечных элементов приводились неоднократно [1–3], и поэтому мы на них останавливаться не будем. Рассмотрим более детально алгоритм расчета подвижных контактных поверхностей взаимодействующих тел, который в зависимости от алгоритмического коэффициента трения обеспечивает реализацию граничных условий от прилипания до чистого скольжения [4, 5].

Первый шаг процесса состоит в определении главной и ведомой поверхностей, составляемых из треугольных плоскостей, поскольку трехмерные элементы — тетраэдры. Обозначим главной поверхностью поверхность преграды, ведомой — ударника. Данная техника расчета граничных условий показана на рис. 1, где треугольная плоскость определяется узлами  $i$ ,  $j$  и  $k$ , а ось  $z$  направлена вертикально вверх. Отметим, что применяемые в методе основные принципы не зависят от ориентации координатных осей. Предположим также, что ведомая поверхность в начальный момент времени выше главной поверхности.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №98-01-00293.

© Н. Т. Югов, Н. Н. Белов, М. В. Хабибуллин, С. В. Старенченко, 1998.

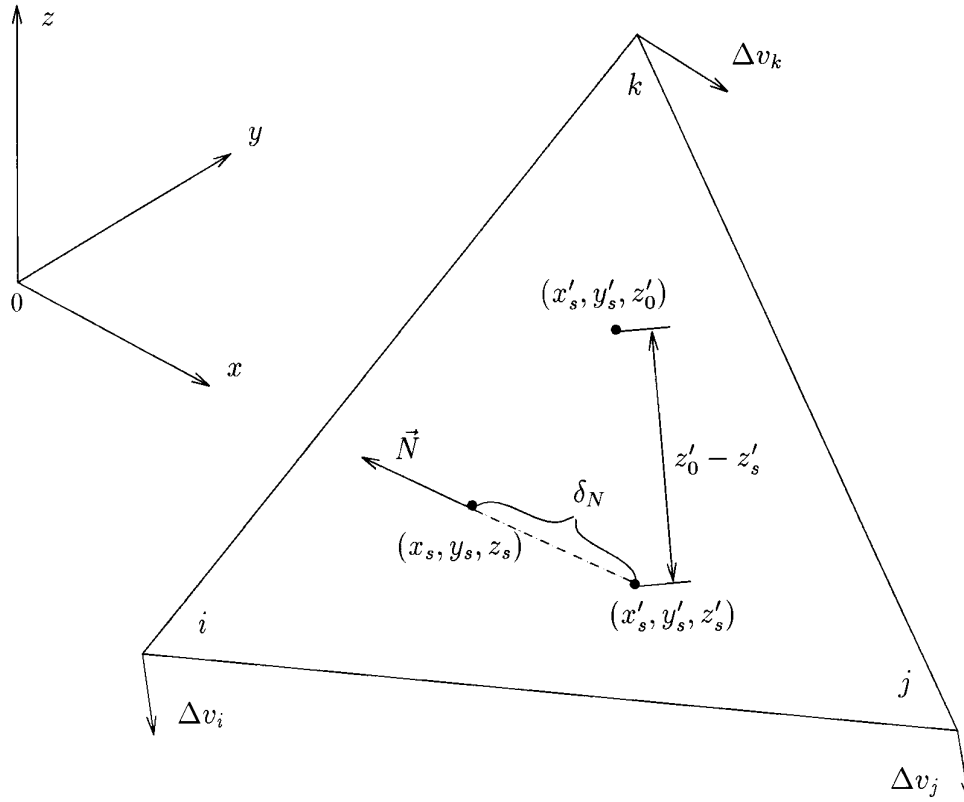


Рис. 1. Иллюстрация алгоритма расчета контактных границ.

Для каждого цикла численного интегрирования уравнения движения применяются к главному и ведомым узлам в идентичной форме. Затем проверяется, прошел ли каждый ведомый узел через главную поверхность, вызвав таким образом взаимодействие. До этой проверки необходимо найти и идентифицировать соответствующую треугольную плоскость главной поверхности. Эффективный способ проверить, находится ли ведомый узел внутри рассматриваемой треугольной проекции или за ее пределами, состоит в вычислении расстояния от ведомого узла до каждой из линий, определяющих три стороны треугольника. Расстояние до линии  $i - j$  в плоскости 0 находится по формуле

$$\delta_{xy} = \frac{\beta_1 x'_s + \beta_2 y'_s + \beta_3}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}, \quad (1)$$

где  $\beta_1 = y_i - y_j$ ,  $\beta_2 = x_j - x_i$ ,  $\beta_3 = x_i y_j - x_j y_i$ . Здесь  $x_i, y_i$  и  $z_i$  — координаты главного узла  $i$ , а  $x'_s, y'_s$  и  $z'_s$  — координаты ведомого узла.

Если, глядя вниз от положительной оси  $z$ , главный узел  $j$  находится против часовой стрелки от узла  $i$  и величина  $\delta_{xy} > 0$  для всех трех линий треугольника, то ведомый узел находится внутри треугольника.

После того, как соответствующий треугольник найден, необходимо определить, имеет ли место взаимодействие. Уравнение главной плоскости, проходящей через узлы  $i, j$  и  $k$ , имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_j & z_j & 1 \\ y_k & z_k & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_i & x_i & 1 \\ z_j & x_j & 1 \\ z_k & x_k & 1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}.$$

Если координаты ведомого узла  $x'_s, y'_s, z'_s$ , то соответствующая координата  $z$  плоскости  $z_p$  может быть получена из уравнения

$$z_p = -\frac{Ax + By + D}{C}. \quad (3)$$

Если  $z_p > z'_s$ , то имеется взаимодействие, и процесс скольжения должен быть продолжен. В противном случае поверхности разделены в месте этого ведомого узла и его конечные координаты  $x_s, y_s, z_s$  являются равными начальным координатам  $x'_s, y'_s, z'_s$ , определенным из уравнения движения.

При наличии взаимодействия следующий этап заключается в перемещении ведомого узла на главную поверхность в направлении нормали к главной поверхности. Начальное положение ведомого узла  $x'_s, y'_s, z'_s$  находится ниже треугольной плоскости (рис. 1). Вектор нормали, проходящий через начальное положение ведомого узла, имеет три направляющих косинуса  $-\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , которые определяются делением  $A, B, C$  на  $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ . Ведомый узел проходит расстояние  $\delta_N$  вдоль этого нормального вектора до тех пор, пока не пересечет треугольную плоскость. Это расстояние определяется выражением

$$\delta_N = \frac{Ax'_s + By'_s + Cz'_s + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4)$$

Окончательные координаты ведомого узла находятся следующим образом:

$$x_s = x'_s + \delta_N \gamma_1, \quad y_s = y'_s + \delta_N \gamma_2, \quad z_s = z'_s + \delta_N \gamma_3. \quad (5)$$

Поскольку напряжения зависят от скоростей деформаций, то необходимо обеспечить точное выравнивание скоростей на контактных поверхностях. Вначале корректируются нормальные скорости ведомого узла и трех главных узлов. Три из четырех условий, требуемых для определения этих новых скоростей, включают сохранение линейного момента, нормального к главной плоскости, и сохранение угловых моментов относительно двух осей:

$$m_i \Delta v_i^N + m_j \Delta v_j^N + m_k \Delta v_k^N = m_s \Delta v_s^N, \quad (6)$$

$$m_i \Delta v_i^N r_i = m_j \Delta v_j^N r_j, \quad (7)$$

$$m_i \Delta v_i^N r_i = m_k \Delta v_k^N r_k, \quad (8)$$

где  $m_s, m_i, m_j, m_k$  — массы ведомого и главных узлов,

$$r_i = \sqrt{(x_s - x_i)^2 + (y_s - y_i)^2 + (z_s - z_i)^2},$$

а  $r_j$  и  $r_k$  вычисляются аналогично.

Уравнения (6)–(8) после почленного деления на  $m_s \Delta v_s^N$  представляют собой замкнутую систему для определения долей  $R_i, R_j, R_k$  линейного момента, передаваемого от ведомого узла трем главным узлам:

$$R_i + R_j + R_k = 1, \quad (9)$$

$$R_i r_i = R_j r_j, \quad (10)$$

$$R_i r_i = R_k r_k. \quad (11)$$

Здесь  $R_i = m_i \Delta v_i^N / m_s \Delta v_s^N$ , а  $R_j$  и  $R_k$  имеют аналогичный вид. Решая систему уравнений (9) – (11), получаем доли линейного момента  $R_i$ ,  $R_j$ ,  $R_k$ , передаваемого от ведомого узла трем главным узлам, выраженные через расстояния между ведомым и главными узлами:

$$R_i = \frac{1}{1 + \frac{r_i}{r_j} + \frac{r_i}{r_k}}. \quad (12)$$

$R_j$  и  $R_k$  получаются циклической перестановкой индексов. Результирующие соотношения между изменениями мгновенных нормальных скоростей ведомого узла  $\Delta v_s^N$  и главных узлов  $\Delta v_i^N$ ,  $\Delta v_j^N$  и  $\Delta v_k^N$  имеют форму

$$\Delta v_i^N = R_i m_s \Delta v_s^N / m_i, \quad \Delta v_j^N = R_j m_s \Delta v_s^N / m_j, \quad \Delta v_k^N = R_k m_s \Delta v_s^N / m_k. \quad (13)$$

Для обеспечения движения контактных поверхностей ударника и преграды с одинаковой скоростью нужно реализовать равенство нормальных скоростей ведомого узла и главной поверхности в месте контакта ведомого узла. Для этого необходимо определить скорость главной поверхности в месте контакта ведомого узла. Результирующая скорость главной поверхности в направлении оси  $x$  в позиции ведомого узла имеет вид

$$v_{1m} = g_i v_{1i} + g_j v_{1j} + g_k v_{1k}. \quad (14)$$

Другие компоненты скорости  $g_{2m}$  и  $v_{3m}$  выражаются аналогичными уравнениями, а геометрические константы  $g_i$ ,  $g_j$ ,  $g_k$  имеют форму

$$g_i = \frac{1}{2A_{xy}} [x_i y_k - x_k y_j + (y_j - y_k) x_s + (x_k - x_j) y_s], \quad (15)$$

где  $A_{xy}$  есть спроецированная площадь поперечного сечения треугольной главной поверхности на плоскость  $xOy$ , а другие члены представляют собой координаты главных и ведомых узлов. Проекции в зависимости от ориентации главной поверхности могут также быть на  $xOz$ - и  $yOz$ -плоскости. Скорость ведомого узла, нормальная к главной поверхности, записывается как

$$v_s^N = \gamma_1 v_{1s} + \gamma_2 v_{2s} + \gamma_3 v_{3s}, \quad (16)$$

где  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  — направляющие косинусы вектора нормали к главной поверхности. Нормальная скорость главной поверхности  $v_m^N$  имеет аналогичную уравнению (16) форму. Приравняв нормальные скорости и используя (13), определим нормальное изменение скорости ведомого узла:

$$\Delta v_s^N = \frac{v_m^N - v_s^N}{1 + g_i R_i m_s / m_i + g_j R_j m_s / m_j + g_k R_k m_s / m_k}. \quad (17)$$

Изменения скоростей в трех главных узлах определяются из уравнений (13). Соответствующие изменения скоростей в  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -направлениях получаются умножением  $\Delta v_i^N$ ,  $\Delta v_j^N$  и  $\Delta v_k^N$  на соответствующие направляющие косинусы. Так, например, для узла  $i$  изменения скоростей по координатам запишутся как

$$\Delta v_{1i} = \gamma_1 \Delta v_i^N, \quad \Delta v_{2i} = \gamma_2 \Delta v_i^N, \quad \Delta v_{3i} = \gamma_3 \Delta v_i^N. \quad (18)$$

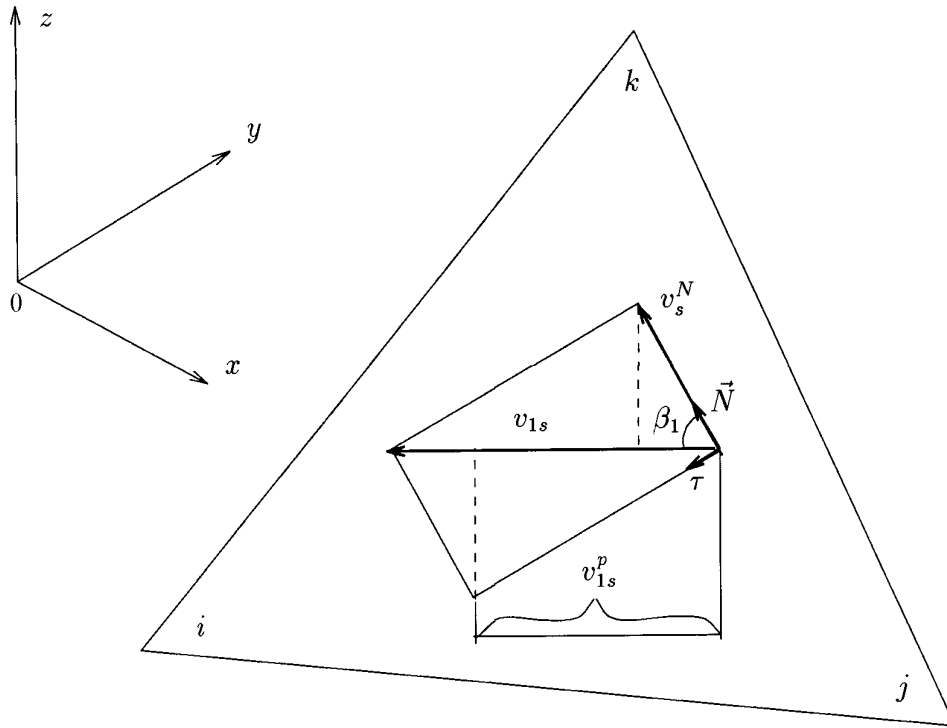


Рис. 2. Схема определения компонент скорости в плоскости главной поверхности.

Рассмотренный алгоритм расчета контактных границ и связанные с ним корректировки координат и скоростей проводились без учета сил трения между соприкасающимися поверхностями. При решении ряда задач возникает необходимость учитывать трение между взаимодействующими телами, поэтому ниже приводится процедура, позволяющая включить данный эффект в общий алгоритм расчета контактных поверхностей.

Чистая величина фрикционного изменения скорости ведомого узла пропорциональна изменению его нормальной скорости:

$$\Delta v_s^p = f \Delta v_s^N, \quad (19)$$

где  $f$  — коэффициент трения. Компоненты скорости в плоскости главной поверхности получаются вычитанием компонент скорости, нормальной к главной плоскости, от компонент полной скорости (рис. 2). Эти компоненты скорости для ведомого узла имеют вид

$$v_{1s}^p = v_{1s} - \gamma_1 v_s^N, \quad v_{2s}^p = v_{2s} - \gamma_2 v_s^N, \quad v_{3s}^p = v_{3s} - \gamma_3 v_s^N, \quad (20)$$

где  $v_{1s}, v_{2s}, v_{3s}$  — проекции полной скорости на оси  $x, y$  и  $z$ ;  $\gamma_1 v_s^N, \gamma_2 v_s^N, \gamma_3 v_s^N$  — проекции нормальной скорости на оси  $x, y$  и  $z$ . Внутриплоскостные скорости главной поверхности  $v_{1m}^p, v_{2m}^p, v_{3m}^p$  записываются аналогично.

Изменения компонент скорости ведомого узла, вызванные трением, определяются выражениями

$$\Delta v_{1s}^p = \frac{v_{1r}^p}{\sqrt{(v_{1r}^p)^2 + (v_{2r}^p)^2 + (v_{3r}^p)^2}} \Delta v_s^p,$$

$$\Delta v_{2s}^p = \frac{v_{2r}^p}{\sqrt{(v_{1r}^p)^2 + (v_{2r}^p)^2 + (v_{3r}^p)^2}} \Delta v_s^p,$$

$$\Delta v_{3s}^p = \frac{v_{3r}^p}{\sqrt{(v_{1r}^p)^2 + (v_{2r}^p)^2 + (v_{3r}^p)^2}} \Delta v_s^p, \quad (21)$$

где компоненты относительной скорости  $v_{1r}^p$ ,  $v_{2r}^p$  и  $v_{3r}^p$  вычисляются следующим образом:

$$v_{1r}^p = v_{1m}^p - v_{1s}^p, \quad v_{2r}^p = v_{2m}^p - v_{2s}^p, \quad v_{3r}^p = v_{3m}^p - v_{3s}^p. \quad (22)$$

Изменения скоростей главного узла  $i$ , обусловленные трением, запишутся по соответствующим направлениям координат в виде

$$\Delta v_{1i}^p = R_i m_s \Delta v_{1s}^p / m_i, \quad \Delta v_{2i}^p = R_i m_s \Delta v_{2s}^p / m_i, \quad \Delta v_{3i}^p = R_i m_s \Delta v_{3s}^p / m_i. \quad (23)$$

Аналогичные выражения справедливы для главных узлов  $j$  и  $k$ .

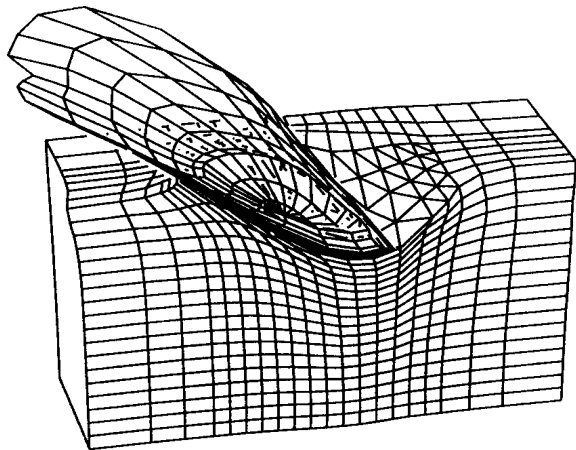
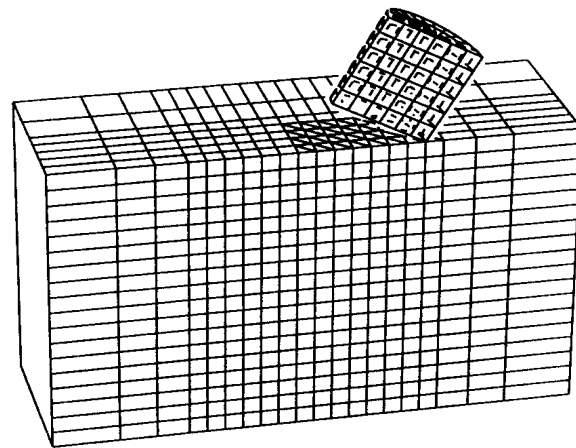
Согласование скоростей по уравнениям (6)–(23) дает согласование скорости для одного ведомого узла на одной главной плоскости. Для многочисленных ведомых узлов соответствующие главные скорости могут быть изменены в случае, когда корректируются последующие ведомые узлы. Таким образом, возможно нарушение начально согласованных скоростей. Если необходимо получить более точное согласование скоростей по всей поверхности, то уравнения (6)–(23) должны быть повторены для некоторого числа итераций до тех пор, пока согласование скоростей не станет приемлемым.

Описанная процедура расчета контактных поверхностей соударяющихся деформируемых твердых тел в трех измерениях является универсальной и может быть использована при решении осесимметричных и плоских задач. Реализованные в алгоритме условия сцепления, скольжения и разделения поверхностей позволяют значительно расширить класс решаемых задач.

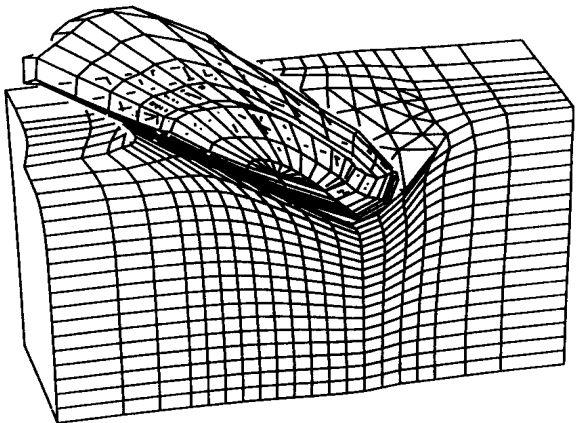
В качестве иллюстрации возможностей алгоритма и влияния коэффициента трения на характер деформирования соударяющихся тел были проведены расчеты наклонного соударения компактного стального цилиндра со стальной преградой со скоростью 3 км/с при различных значениях коэффициента трения  $f$ .

На рис. 3 представлены сечения конфигураций соударяющихся тел при разных значениях  $f$  в начальный момент времени и момент  $t = 12$  мкс. Результаты показывают, что при  $f = 0.18$  к моменту  $t = 12$  мкс высота цилиндра вдоль оси симметрии больше на 14%, а глубина внедрения на 7% по сравнению с соответствующими величинами при  $f = 0$ . Хорошо видно, что при  $f = 0$  материал ударника значительно сильнее растекается по преграде, чем при  $f = 0.18$ , хотя различие по глубине внедрения и остаточной высоте цилиндра в обоих случаях невелико. Это связано с тем, что по преграде растекается уже разрушенный материал цилиндра, т. е. материал, в котором выполнен критерий разрушения по интенсивности пластических деформаций, и поэтому он уже практически не влияет на процесс внедрения неразрушенной части цилиндра в преграду. Следует иметь в виду, что используемый в алгоритме коэффициент трения, строго говоря, не есть физический коэффициент трения между материалами, который приводится в различных справочниках по материаловедению. Вместе с тем, как показывает практика вычислительного эксперимента, в первом приближении в качестве  $f$  можно брать значение физического коэффициента трения. Проведенный расчет по соударению в нормаль данного компактного цилиндра с преградой со скоростью 3 км/с со значением  $f$ , равным справочному физическому коэффициенту трения стали по стали, дает различие по глубине кратера по сравнению с экспериментальной в 8%.

На рис. 4 приведены конфигурации цилиндрического ударника из сплава вольфрам — никель — железо (98.5–0.5–1.0%) [6] удлинением в пять диаметров при соударении со сталь-



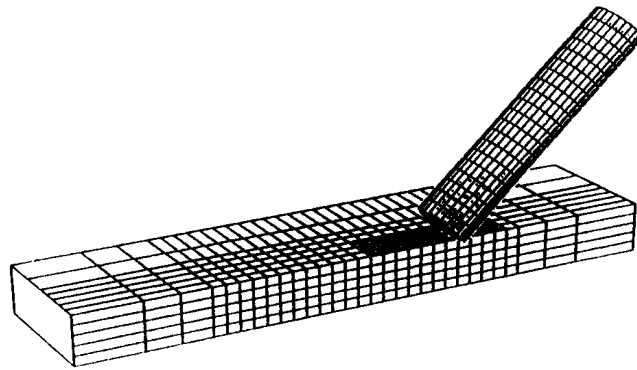
$$f = 0 \quad t = 12 \text{ мкс}$$



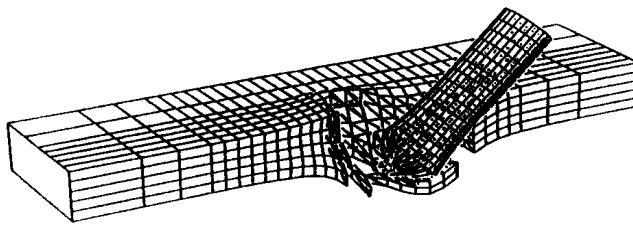
$$f = 0.18 \quad t = 12 \text{ мкс}$$

Рис. 3. Конфигурации соударяющихся тел.

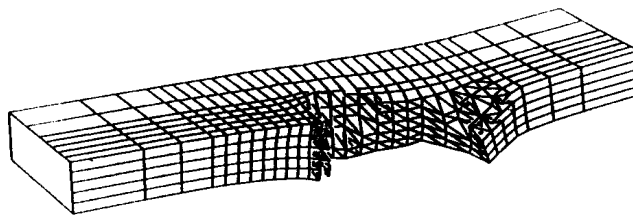
ной пластиной толщиной, равной диаметру ударника, со скоростью 2 км/с. Угол соударения (между внутренней нормалью к лицевой поверхности преграды и вектором



$t = 0 \text{ мкс}$



$t = 16 \text{ мкс}$



$t = 44.03 \text{ мкс}$

Рис. 4. Конфигурации соударяющихся тел.



скорости) составлял  $35^\circ$ . Угол нутации (между осью симметрии и вектором скорости, отсчитываемый по часовой стрелке от вектора скорости) равен  $10^\circ$ . В данном варианте расчета наряду с изложенным выше алгоритмом подвижных контактных границ был использован алгоритм перестройки конечно-элементной сетки, который существенно расширяет возможности лагранжева метода конечных элементов, приближая его по эффективности расчета больших формоизменений деформируемых тел к эйлеровым методам. В связи с тем, что данный алгоритм также является достаточно громоздким при его детальном изложении, он планируется быть подготовленным к публикации в следующей статье.

## Список литературы

- [1] ЮГОВ Н. Т. Численный анализ трехмерного процесса деформирования и разрушения цилиндра и пластины при наклонном соударении. *Изв. АН СССР. МТТ*, №1, 1990, 112–117.
- [2] JOHNSON G. R. High velocity impact calculations in three dimensions. *J. Appl. Mech.*, 44, No. 3, 1977, 95–100.
- [3] ОДЕН ДЖ. *Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред*. Мир, М., 1976.
- [4] JOHNSON G. R. Liquid-solid impact calculations with triangular elements. *Trans. ASME*, 99, No. 3, 1977, 589–600.
- [5] JOHNSON G. R., COLBY D. D., VAVRICK D. J. Three dimensional computer code for dynamic response of solids to intense impulsive loads. *Int. J. Numerical Methods Eng.*, 14, 1979, 1865–1871.
- [6] КАНЕЛЬ Г. И., РАЗОРЕНОВ С. В., УТКИН А. В., ФОРТОВ В. Е. *Ударно-волновые явления в конденсированных средах*. Янус-К, М., 1996.

Поступила в редакцию 10 сентября 1996 г.,  
в переработанном виде 15 января 1998 г.