

## Решение задачи Орра—Зоммерфельда псевдоспектральным методом по полиномам Чебышева

Т. Г. ДАРМАЕВ

*Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия*

e-mail: dtg@bsu.ru

In this article a numerical method, relying on the Chebyshev polynomials is used to calculate the spectrum of eigenvalues and define curves of constant increment of the Orr—Sommerfeld problem with high accuracy.

В линейной теории гидродинамической устойчивости исследование развития малых возмущений в плоскопараллельных течениях вязкой жидкости сводится к известной задаче Орра—Зоммерфельда [1]:

$$D^4v - 2\alpha^2 D^2v + \alpha^4 v = i\alpha \operatorname{Re}[(U - c)(D^2v - \alpha^2 v) - vD^2U], \quad (1)$$

где  $D = d/dy$ ,  $\alpha$  — волновое число,  $\operatorname{Re}$  — число Рейнольдса,  $c = c_r + ic_i$ ,  $v = v_r + iv_i$  — искомые комплексные собственное число и функция,  $i$  — мнимая единица.

Для течения Пуазейля в трубе профиль скорости основного потока

$$U(y) = 1 - y^2, \quad -1 \leq y \leq 1,$$

а  $v(y)$  удовлетворяет граничным условиям:

$$v(-1) = Dv(-1) = v(1) = Dv(1) = 0. \quad (2)$$

Для течения Блазиуса над плоской полубесконечной пластиной  $U(y) = f(y)$ , где  $f(y)$  находится численно из уравнения [2]:

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0, \quad f' \rightarrow 1, \quad f'' \rightarrow 0, \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (3)$$

со следующими граничными условиями:

$$v(0) = Dv(0) = v(\infty) = Dv(\infty) = 0. \quad (4)$$

Для течения Блазиуса задача на бесконечном интервале  $(0, \infty)$  сводится к анализу задачи на конечном интервале  $(0, L)$  при больших  $L$ , а затем к линейной замене  $y = 1 - \eta/L$  — на интервале  $(0, 1)$ . Симметрично отображая профиль на интервал  $(0, -1)$ , получаем аналогичную течению Пуазейля задачу.

Исследованию задачи Орра—Зоммерфельда посвящено множество работ [2]. Главными целями численного решения при заданном основном течении являются: поиск

кривой нейтральной устойчивости ( $c_i = 0$ ), кривой постоянной скорости роста ( $\alpha c_i = \text{const}$ ), вычисление собственных значений и функций для данной пары положительных значений  $\alpha$  и  $\text{Re}$ .

Основные методы решения принадлежат двум классам: 1) конечно-разностные методы [2–5]; 2) спектральные методы, использующие разложение по полной системе ортогональных функций [6, 7].

Конечно-разностные методы являются эффективными при нахождении нейтральной кривой, наименее устойчивого собственного значения и собственных функций. Применение методов спектрального разложения позволяет отыскать спектр собственных значений, но при этом собственная функция вычисляется хуже. В работе [6] с помощью разложения по полиномам Чебышева исследованы первые собственные значения для течения Пуазейля, а в [7] с помощью метода Галеркина по полиномам Лежандра исследуется спектр течения Блазиуса.

В данной работе применяется метод коллокации или псевдоспектральный метод по полиномам Чебышева для исследования устойчивости плоскопараллельных течений, в частности течений Пуазейля и Блазиуса.

Решение задачи (1), (2) ищем в виде следующего разложения:

$$v(y) = \sum_{n=0}^N z_n T_n(y), \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (5)$$

где  $T_n(y)$  — полиномы Чебышева  $n$ -го порядка 1-го рода:

$$T_n(\cos n\theta) = \cos n\theta, \quad n \geq 0.$$

Заданный профиль скорости основного течения также разлагаем в ряд:

$$U(y) = \sum_{n=0}^N u_n T_n(y), \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (6)$$

и находим коэффициенты  $u_n$ .

Подставляя (5), (6) в (1), используя свойства полиномов Чебышева и приравнявая коэффициенты при различных  $T_n$ , получаем уравнения для искомым коэффициентов  $z_n$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N [p^3(p^2 - 4)^2 - 3n^2 p^5 + 3n^4 p^3 - pn^2(n^2 - 4)^2] z_p - (2\alpha^2 - i\alpha \text{Re } c) \times \\ & \times \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) z_p + (\alpha^4 - i\alpha \text{Re } c) d_n z_n - \\ & - \frac{1}{2} i\alpha \text{Re} \sum_{p=2}^N z_p \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{2} \\ |m| \leq p-2 \\ |n-m| \leq N}} p(p^2 - n^2) \bar{u}_{n-m} - \alpha^2 \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} \bar{z}_p \bar{u}_{n-p} - \\ & - \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} \bar{z}_p \sum_{\substack{m \equiv |n-p|+2 \\ m+n \equiv p \pmod{2}}} m(m^2 - (n-p)^2) u_n = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{z}_p = d_{|p|} z_{|p|}, \quad \bar{u}_p = d_{|p|} u_{|p|}, \quad -N \leq p \leq N, \quad d_0 = 2, \quad d_p = 1, \quad p > 0,$$

$p \equiv n \pmod{2}$  обозначает, что  $p - n$  делится нацело на 2.

Используя следующие свойства полиномов Чебышева:

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1} n^2,$$

можно привести граничные условия (2) при  $y = -1$  и  $y = 1$  соответственно к виду

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N z_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N n^2 z_n = 0, \quad (8)$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N n z_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N n^2 z_n = 0. \quad (9)$$

Для течений с симметричным профилем размер системы уравнений (7) сокращается вдвое, так как можно рассматривать только четные  $z_n$ ,  $n = 0, 2, \dots, N = 2M$ . При этом автоматически выполняются граничные условия (9).

Для нахождения  $M + 1$  неизвестных коэффициентов  $z_{2m}$ ,  $m = 0, 1, \dots, M = N/2$  из  $M + 3$  уравнений применяется тау-метод [8], который заключается в отбрасывании двух последних уравнений при  $m = M - 1, M$  так, что с двумя граничными условиями (8) получаются  $M + 1$  уравнение для  $M + 1$  неизвестных коэффициентов  $z_{2m}$ ,  $m = 0, 1, \dots, M - 1$ . В результате из (7) получаем алгебраическую задачу на собственные значения общего вида:

$$Az = cBz, \quad (10)$$

где  $z$  — вектор неизвестных длины  $M + 1$ ;

$A, B$  — известные матрицы размерности  $(M + 1) \times (M + 1)$  следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 4 & 9 & \dots & N^2 \\ 0 & 0 & a_{11} & \dots & a_{1,M-1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & a_{M-1,1} & \dots & a_{M-1,M-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & \dots & b_{1,M-1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & b_{M-1,1} & \dots & b_{M-1,M-1} \end{pmatrix}.$$

Первые две строки матриц  $A$  и  $B$  получены из граничных условий (8), а элементы  $a_{i,j}$  и  $b_{i,j}$  — из уравнений (7). Так как матрица  $B$  из-за нулевых первых двух строк особенная, то возникают трудности с ее обращением. Чтобы избежать этого, обнуляя внедиагональные элементы и нормируя диагональные элементы первых двух строк матрицы  $A$  и применяя это преобразование одновременно к матрице  $B$ , получаем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1,M-1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{M-1,1} & \dots & \tilde{a}_{M-1,M-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{b}_{11} & \dots & \tilde{b}_{1,M-1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \tilde{b}_{M-1,1} & \dots & \tilde{b}_{M-1,M-1} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения системы

$$(\tilde{A} - c\tilde{B})\tilde{z} = 0, \quad (11)$$

где  $\tilde{A} = \|\tilde{a}_{ik}\|_1^{M-1}$  и  $\tilde{B} = \|\tilde{b}_{ik}\|_1^{M-1}$  — уже невырожденная матрица размерности  $(M-1) \times (M-1)$ , те же, что у исходной системы (7). Применяя далее  $QZ$ -алгоритм [9] к полученной системе (11), получаем собственные значения. Для нахождения собственных функций из вычисленных  $\tilde{z}$  обратным преобразованием находим  $z$ , затем используем разложение (5).

На основе алгоритма была разработана универсальная программа на языке FORTRAN Power Station 4.0 для расчета устойчивости плоскопараллельных течений с двойной точностью.

В данной работе расчеты проведены для течений Пуазейля и Блазиуса. В табл. 1 даны первые 10 собственных чисел течения Пуазейля, вычисленных при  $\alpha = 1$ ,  $\text{Re} = 10\,000$ ,  $M = 200$ .

Первое собственное число с наибольшей мнимой частью определяет устойчивость течения. В табл. 2 приведены его значения, вычисленные для течения Блазиуса при  $\alpha = 0.16869$ ,  $\text{Re} = 500$  и разных  $M$  и  $L$ .

Расчеты позволяют сделать следующие выводы. Выбором  $L$  при фиксированном  $M$  или  $N$ , или увеличением  $M$  при фиксированном  $L$  можно достичь повышения точности. Спектральный метод целесообразно применять для вычисления одновременно несколь-

Т а б л и ц а 1

(2.374486880407458E-001, 3.791166309875633E-003)
(1.900557202258878E-001, -1.828207620297516E-001)
(3.491230585037001E-001, -1.245165788603773E-001)
(3.685068183504831E-001, -2.388279976521671E-001)
(4.748377439650907E-001, -2.086553689039426E-001)
(5.128807977577818E-001, -2.868928204096470E-001)
(5.843306096842552E-001, -2.668386487364604E-001)
(6.208853976536459E-001, -3.359016412279827E-001)
(6.623888858297891E-001, -2.797281175566295E-001)
(7.194333618198993E-001, -2.617623955442141E-001)

Т а б л и ц а 2

$M$	$L$	$C$
50	20	(3.669001421988583E-001, 9.008614672213490E-003)
50	25	(3.674198471510465E-001, 8.884444385117093E-003)
50	30	(3.675159113309415E-001, 8.861197869179240E-003)
50	30	(3.675372666980753E-001, 8.856108912264829E-003)
50	40	(3.675370055823886E-001, 8.856033114205948E-003)
50	50	(3.675378470516833E-001, 8.854982808473398E-003)
50	40	(3.675401124612824E-001, 8.859160141251153E-003)
50	60	(3.675431967080640E-001, 8.856010388764098E-003)
100	30	(3.675159317493594E-001, 8.861206560442054E-003)
100	40	(3.675369826998388E-001, 8.856105188630574E-003)
100	50	(3.675377039644471E-001, 8.855951933329087E-003)
100	60	(3.675377492667720E-001, 8.855973804581585E-003)
200	40	(3.675346324654210E-001, 8.855022110732356E-003)
200	50	(3.675354342513038E-001, 8.858435217178896E-003)

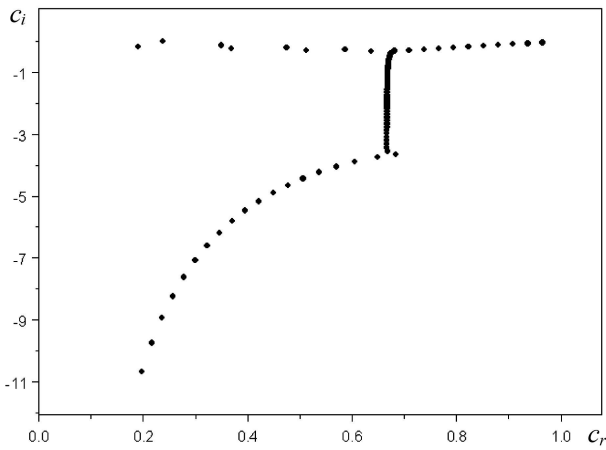


Рис. 1. Спектр собственных значений течения Пуазейля:  $\alpha = 1$ ,  $Re = 10\,000$ ,  $M = 100$

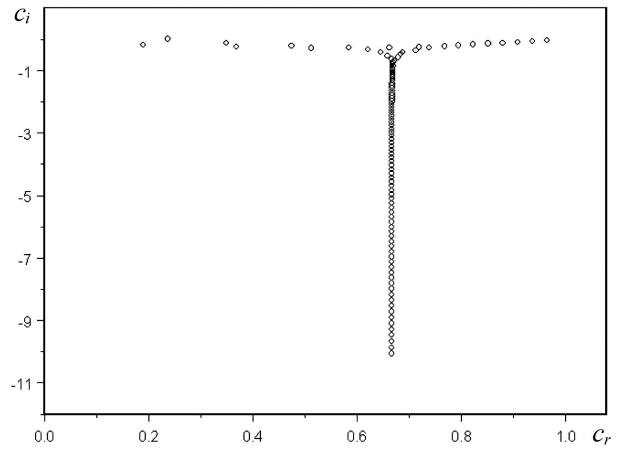


Рис. 2. Спектр собственных значений течения Пуазейля:  $\alpha = 1$ ,  $Re = 10\,000$ ,  $M = 200$

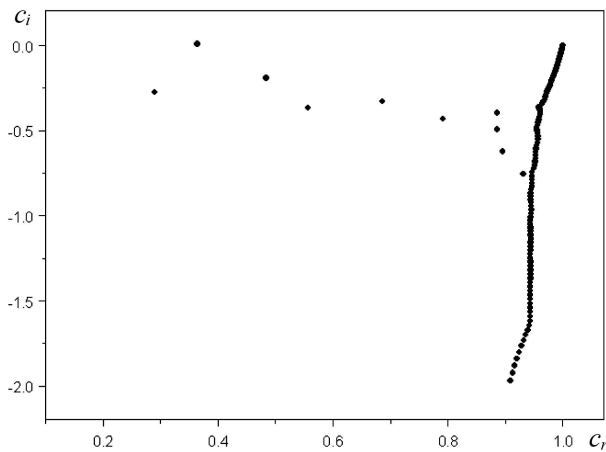


Рис. 3. Спектр собственных значений течения Блазиуса:  $\alpha = 0.179$ ,  $Re = 580$ ,  $M = 200$

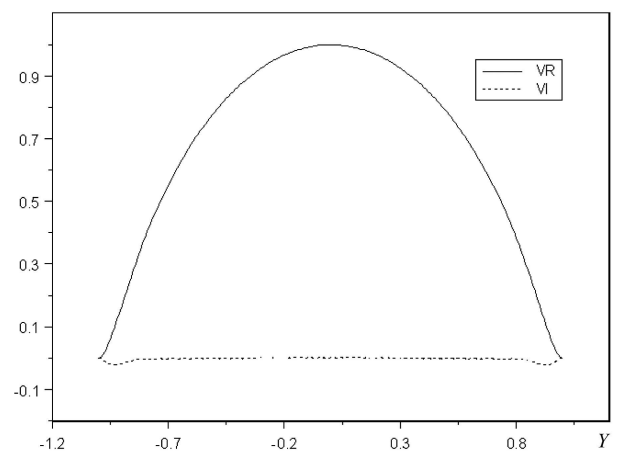


Рис. 4. Собственная функция течения Пуазейля (А-мода)

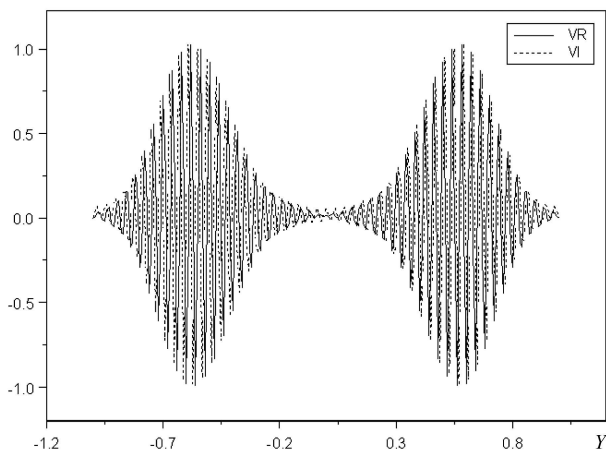


Рис. 5. Собственная функция течения Пуазейля (Р-мода)

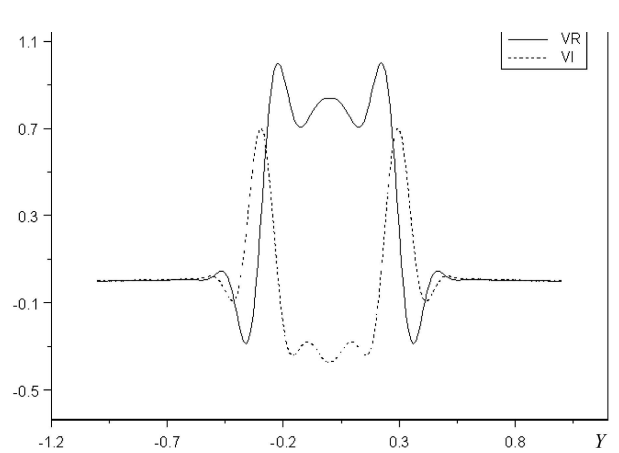


Рис. 6. Собственная функция течения Пуазейля (S-мода)

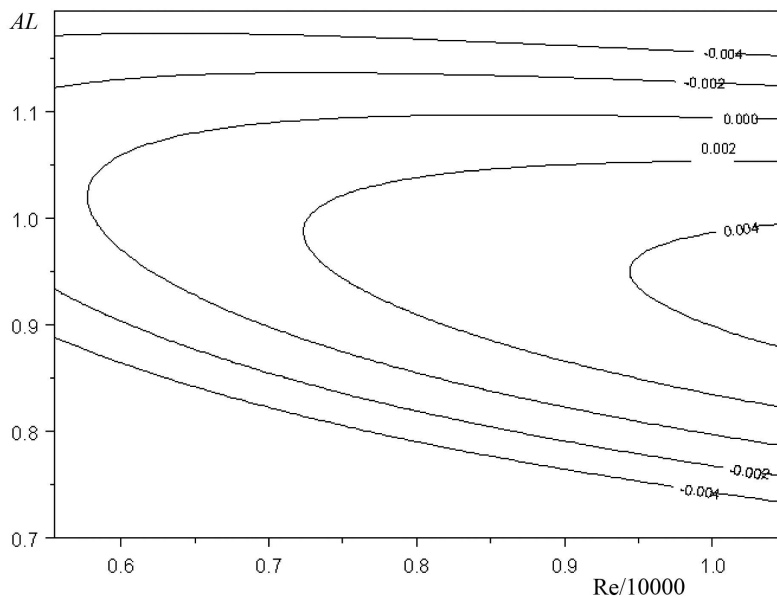


Рис. 7. Кривые постоянных скоростей роста

ких собственных значений и функций. Вычисленные спектры при разных  $M = 100$  и  $200$  даны для течения Пуазейля (рис. 1 и 2) и Блазиуса (рис. 3). Видно, что при  $M = 200$  достигается приемлемая точность. Различаются пристеночные моды [10], которые иногда называют модами Эйри, или А-модами, для которых  $c_r \rightarrow 1$ ,  $c_i = O[(\alpha Re)^{-1/3}]$ , центральные моды, иногда называемые модами Пекериса, или Р-модами, для которых  $c_r \rightarrow 0$ ,  $c_i = O[(\alpha Re)^{-1/2}]$  при  $\alpha Re \rightarrow \infty$ , и имеют место моды Шенстеда, или S-моды, для которых  $c_r \rightarrow 2/3$ ,  $c_i \sim -i[\pi(n+2)]^2 \alpha / 4Re$  при  $\alpha Re/n \rightarrow 0$ . На рис. 4–6 приведены собственные функции (сплошные линии — реальные части, пунктир — мнимые части) для мод А, Р, S соответственно. На рис. 7 изображены полученные спектральным методом кривые по значениям  $c_i$ .

## Список литературы

- [1] Линь Цзяо-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
- [2] Гольдштик М.А., ШТЕРН В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 421 с.
- [3] THOMAS L.N. The stability of plane Poiseuille flow // Phys. Rev. 1953. Vol. 90. P. 780–783.
- [4] MACK L.M. A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 73, N 3. P. 497–520.
- [5] ДАРМАЕВ Т.Г. Анализ эффективности различных методов численного решения задачи Орра—Зоммерфельда // Математика, ее приложения и математическое образование: матер. междунар. конф. Ч. 1. Улан-Удэ, 2002. С. 156–160.
- [6] ORSZAG S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 50, N 4. P. 689–703.
- [7] MELENK J.M., KIRCHNER N.P., SCHWAB C. Spectral Galerkin discretization for hydrodynamic stability problems // Computing. 2000. Vol. 65. P. 97–118.

- [8] LANCZOS C. Applied Analysis. Prentice-Hall, 1952.
- [9] MOLER C.B., STEWART G.W. An algorithm for generalized matrix eigenproblems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. Vol. 10. P. 241–256.
- [10] ДРАЗИН Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости: пер. с англ. М.: Физматлит, 2005. 288 с.

*Поступила в редакцию 12 апреля 2007 г.,  
в переработанном виде — 15 октября 2007 г.*