

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ СМЕШАННЫХ СХЕМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Л. Ш. ЗАБОТИНА

Казанский государственный технический университет, Россия

М. М. КАРЧЕВСКИЙ

Казанский государственный университет, Россия

e-mail: mikhail.karchevsky@ksu.ru

Iteration methods for the numerical implementation of combined schemes of finite elements for geometrically and physically non-linear problems of the theory of shallow shell theory are suggested and investigated.

Смешанные схемы конечных элементов широко применяются для решения задач теории пластин и оболочек (см., например, [1, 2] и цитированную там литературу). По сравнению с классическими схемами, основанными на эрмитовой интерполяции, они позволяют использовать более простые (лагранжевы) элементы. При этом удается единообразно получать схемы сколь угодно высокого порядка аппроксимации. Построение смешанных схем основано на сведении тем или иным способом уравнений четвертого порядка к системам уравнений второго порядка. Одним из наиболее универсальных способов такого сведения является способ, предложенный в [3] применительно к линейным задачам теории непологих оболочек. Аналогичные схемы для нелинейных задач теории пластин и оболочек построены и исследованы в [4–9].

1. В настоящей работе изучаются итерационные методы градиентного типа для численной реализации смешанных схем конечных элементов решения геометрически и физически нелинейных задач теории пологих оболочек.

Все рассмотрения ведутся на примере задачи о равновесии пологой оболочки, жестко защемленной по одной части (Γ_u) и шарнирно опертой по другой части (Γ_σ) контура $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$. Эта задача может быть сформулирована (см., например, [10], с. 260) как задача отыскания критических точек функционала (потенциальной энергии)

$$F(u) = F_0(u) - \int_{\Omega} f_i u_i dx, \quad F_0(u) = \int_{\Omega} \varphi(\varepsilon, \kappa) dx,$$

Ω — ограниченная двумерная область в плоскости x_1, x_2 , отождествляемая со срединной поверхностью оболочки, φ — плотность потенциальной энергии изгиба, $f = (f_1, f_2, f_3)$ — внешняя нагрузка, $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещений, u_1, u_2 — касательные смещения,

u_3 — нормальное смещение (прогиб),

$$V = \left\{ u \in W_2^1 \times W_2^1 \times W_2^2, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma, \quad \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_u \right\},$$

где $n = (n_1, n_2)$ — нормаль к Γ . Компоненты тангенциальной $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22})$ и изгибной $\varkappa = (\varkappa_{11}, \varkappa_{12}, \varkappa_{22})$ деформации вычисляются по формулам

$$\varepsilon_{ij}(u) = e_{ij}(u) + 0.5u_{3,i}u_{3,j},$$

$$e_{ij}(u) = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}) + k_{ij}u_3, \quad i, j = 1, 2$$

(k_{ij} — начальные кривизны оболочки, $i, j = 1, 2$),

$$\varkappa_{ij}(u) = -u_{3,ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{,ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

В дальнейшем предполагается, что функция φ дифференцируема. Необходимые условия минимума функционала F дают уравнения равновесия оболочки в перемещениях и естественные граничные условия на Γ_σ . Решения уравнений равновесия — критические (не обязательно экстремальные) точки функционала F .

Для простоты изложения будем считать, что Ω — многоугольная область, на которой проведена регулярная триангуляция (см., например, [1], с. 134) с максимальным диаметром элементов h , удовлетворяющая так называемому обратному предположению ([1], с. 142). Предполагается также, что все точки $x \in \bar{\Gamma}_\sigma \cap \bar{\Gamma}_u$ при триангуляции совпадают с вершинами треугольников.

Обозначим через $H_l(\overset{\circ}{H}_l)$ подпространство функций из $W_2^1(W_2^1)$, являющихся полиномами степени не выше l по совокупности переменных на каждом из треугольников триангуляции.

Приближенное решение исходной задачи будем искать как функцию

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in V_h = \overset{\circ}{H}_{l-1} \times \overset{\circ}{H}_{l-1} \times \overset{\circ}{H}_l, \quad l \geq 2,$$

являющуюся критической точкой функционала $F_h(y)$:

$$\text{grad}F_h(y) = 0, \tag{1}$$

где

$$F_h(y) = \int_{\Omega} \varphi(\varepsilon^h(y), \varkappa^h(y)) dx - \int_{\Omega} f_i y_i dx,$$

$\varepsilon_{ij}^h(y) = \varepsilon_{ij}(y)$, $\varkappa_{ij}^h(y) = -w_{ij}^h(y) = -w_{ij}^h(y_3)$, $i, j = 1, 2$, функции $w_{ij}^h(y_3) \in H_l$, определяются соотношениями, аналогичными [3]:

$$\int_{\Omega} w_{ij}^h \eta dx = -0.5 \int_{\Omega} (y_{3,i} \eta_{,j} + y_{3,j} \eta_{,i}) dx - 0.5 \int_{\Gamma_\sigma} (y_{3,i} n_j + y_{3,j} n_i) \eta dx \tag{2}$$

для любых $\eta \in H_l$, $i, j = 1, 2$.

В данной работе изучается двуслойный итерационный метод градиентного типа

$$B \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau} + \text{grad}F_h(y^k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

для решения задачи (1), где

$$By = \text{grad}\Phi(y),$$

$$\Phi(y) = 0.5 \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} (w_{ij}^h(y_3))^2 dx + 0.5 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla y_i|^2 dx,$$

$\tau > 0$ — итерационный параметр.

Исследуем сходимость метода. В дальнейшем будем обозначать арифметическое пространство узловых параметров пространства V_h также через V_h , $[\cdot, \cdot]$ — скалярное произведение в этом пространстве. Следуя [3], введем на пространстве V_h норму

$$\|y\|^2 = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} (w_{ij}^h(y_3))^2 dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla y_i|^2 dx.$$

Итерационный метод (3) в дальнейшем будет удобно записывать в виде

$$B \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau} + A^h y^k = f^h,$$

где оператор $A^h : V_h \rightarrow V_h$ и $f^h \in V_h$ порождаются соотношениями

$$[A^h y, v] = \int_{\Omega} \langle \nabla (\lambda_h(y)), \lambda_h(y, v) \rangle dx,$$

$$[f^h, v] = \int_{\Omega} f_i v_i dx,$$

$$\lambda_h(y) = (\varepsilon^h(y), \varkappa^h(y)), \quad \lambda_h(y, v) = (\varepsilon^h(y, v), \varkappa^h(v)),$$

$$\varepsilon_{ij}^h(y, v) = e_{ij}^h + 0.5 (y_{3,i} v_{3,j} + y_{3,j} v_{3,i}),$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в пространстве R^6 .

Относительно области Ω всюду в дальнейшем будем предполагать, что задача Дирихле

$$\Delta u = f, \quad x \in \Omega, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma$$

имеет решение $u \in W_2^2 \cap \overset{\circ}{W}_2^1$ для любых $f \in L_2$, и

$$\|u\|_{W_2^2} \leq c \|f\|_{L_2}$$

(см. [11] с. 208–221).

Приведем необходимые вспомогательные результаты.

Лемма 1 [4]. *Существует постоянная $c > 0$, такая, что*

$$\|y\|_{W_4^1} \leq \sum_{i,j=1}^2 \|w_{ij}^h(y)\|_{L_2} \quad \forall y \in \overset{\circ}{H}_1.$$

Очевидным следствием леммы 1 (см. также [3]) является

Лемма 2. *Существует постоянная $c > 0$, такая, что*

$$\|y\|_{W_2^1} \leq \sum_{i,j=1}^2 \|w_{ij}^h(y)\|_{L_2} \quad \forall y \in \overset{\circ}{H}_1.$$

Из леммы 2 и неравенства Корна непосредственно вытекает

Лемма 3 [9]. *Существуют не зависящие от h постоянные $c_0, c_1 > 0$, такие, что*

$$\begin{aligned} c_0 \sum_{ij=1}^2 \int_{\Omega} \left(|e_{ij}^h(y)|^2 + |w_{ij}^h(y)|^2 \right) dx &\leq \|y\|^2 \leq \\ &\leq c_1 \sum_{ij=1}^2 \int_{\Omega} \left(|e_{ij}^h(y)|^2 + |w_{ij}^h(y)|^2 \right) dx \quad \forall y \in \mathring{H}_1. \end{aligned}$$

Лемма 4. *Пусть функция φ дифференцируема, сильно выпукла, и ее градиент $\nabla\varphi$ липшиц-непрерывен, то есть*

$$\varphi(\xi) + \varphi(\eta) - 2\varphi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \geq c_0 |\xi - \eta|^2 \quad \forall \xi, \eta \in R^6,$$

$$|\nabla\varphi(\xi) - \nabla\varphi(\eta)| \leq c_1 \|\xi - \eta\| \quad \forall \xi, \eta \in R^6. \quad (4)$$

Тогда существуют постоянные $r, \gamma_1(r), \gamma_2(r) > 0$, такие, что

$$\forall y^1, y^2 \in S_r = \{y \in V_h, \|y\| \leq r\}$$

$$[A^h y^1 - A^h y^2, y^1 - y^2] \geq \gamma_1 \|y^1 - y^2\|^2. \quad (5)$$

$$|[A^h y^1 - A^h y^2, v]| \leq \gamma_2 \|y^1 - y^2\| \|v\|, \quad (6)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} [A^h y^1 - A^h y^2, y^1 - y^2] &= \int_{\Omega} \langle \nabla\varphi(\lambda_h(y^1)), \lambda_h(y^1, y^1 - y^2) \rangle dx - \\ &- \int_{\Omega} \langle \nabla\varphi(\lambda_h(y^2)), \lambda_h(y^2, y^1 - y^2) \rangle dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\begin{aligned} \lambda_h(y^1, y^1 - y^2) &= \lambda_h(y^1) - \lambda_h(y^2) + \beta_h(y^1 - y^2), \\ \lambda_h(y^2, y^1 - y^2) &= \lambda_h(y^1) - \lambda_h(y^2) - \beta_h(y^1 - y^2), \\ \beta_h(y^1 - y^2) &= \\ &= 0.5 \left((y_{3,1}^1 - y_{3,1}^2)^2, (y_{3,1}^1 - y_{3,1}^2)(y_{3,2}^1 - y_{3,2}^2), (y_{3,2}^1 - y_{3,2}^2)^2, 0, 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Тогда из (7) получим

$$\begin{aligned} [A^h y^1 - A^h y^2, y^1 - y^2] &= \\ &= \int_{\Omega} \langle \nabla\varphi(\lambda_h(y^1)) - \nabla\varphi(\lambda_h(y^2)), \lambda_h(y^1) - \lambda_h(y^2) \rangle dx + \\ &+ 0.5 \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\varepsilon_{ij}}(\lambda_h(y^1)) + \frac{\partial\varphi}{\varepsilon_{ij}}(\lambda_h(y^2)) \right) \left((y_{3,i}^1 - y_{3,i}^2)(y_{3,j}^1 - y_{3,j}^2) \right) dx. \end{aligned}$$

Поскольку функция φ сильно выпукла, ее градиент сильно монотонен, то есть

$$\langle \nabla\varphi(\xi) - \nabla\varphi(\eta), \xi - \eta \rangle \geq c \|\xi - \eta\|^2, \quad c = \text{const} > 0 \quad \forall \xi, \eta \in R^6,$$

следовательно,

$$[A^h y^1 - A^h y^2, y^1 - y^2] \geq c \|\lambda_h(y^1) - \lambda_h(y^2)\|_{L_2}^2 -$$

$$-c \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\varepsilon_{ij}} \left(\lambda_h(y^1) + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} (\lambda_h(y^2)) \right) \right\|_{L_2} \| (y_{3,i}^1 - y_{3,i}^2) (y_{3,j}^1 - y_{3,j}^2) \|_{L_2},$$

причем

$$\|\lambda_h(y^1) - \lambda_h(y^2)\|_{L_2}^2 \geq c \|y^1 - y^2\|^2,$$

$$\| (y_{3,i}^1 - y_{3,i}^2) (y_{3,j}^1 - y_{3,j}^2) \|_{L_2} \leq c \|y^1 - y^2\|^2,$$

кроме того, в силу (4) и леммы 2, имеем

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\varepsilon_{ij}} (\lambda_h(y^1)) + \frac{\partial \varphi}{\varepsilon_{ij}} (\lambda_h(y^2)) \right\|_{L_2} \leq c (\|y^1\| + \|y^2\|) \leq 2cr.$$

Из полученных оценок очевидным образом вытекает справедливость неравенства (5).

Для доказательства неравенства (6) заметим, что

$$[A^h y^1 - A^h y^2, v] = \int_{\Omega} \langle \nabla \varphi (\lambda_h(y^1)), \lambda_h(y^1, v) \rangle dx -$$

$$- \int_{\Omega} \langle \nabla \varphi (\lambda_h(y^2)), \lambda_h(y^2, v) \rangle dx =$$

$$= \int_{\Omega} \langle \nabla \varphi (\lambda_h(y^1)), \lambda_h(y^1, v) - \lambda_h(y^2, v) \rangle dx + \quad (8)$$

$$+ \int_{\Omega} \langle \nabla \varphi (\lambda_h(y^1)) - \nabla \varphi (\lambda_h(y^2)), \lambda_h(y^2, v) \rangle dx.$$

Далее

$$\|\lambda_h(y^1, v) - \lambda_h(y^2, v)\|_{L_2}^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 \| (y_{3,i}^1 - y_{3,i}^2) v_{3,j} +$$

$$+ (y_{3,j}^1 - y_{3,j}^2) v_{3,i} \|_{L_2}^2 \leq \|y^1 - y^2\|^2 \|v\|^2. \quad (9)$$

Кроме того, в силу липшиц-непрерывности функции φ для любых $y_1, y_2 \in S_r$

$$\|\nabla \varphi (\lambda_h(y^1)) - \nabla \varphi (\lambda_h(y^2))\|_{L_2}^2 \leq c \|\lambda_h(y^1) - \lambda_h(y^2)\|_{L_2}^2 \leq$$

$$\leq c \sum_{i,j=1}^2 \left[\|e_{ij}(y^1 - y^2)\|_{L_2}^2 + \|w_{ij}^h(y^1 - y^2)\|_{L_2}^2 +$$

$$+ \|y_{3,i}^1 (y_{3,j}^1 - y_{3,j}^2)\|_{L_2}^2 + \|y_{3,j}^2 (y_{3,i}^1 - y_{3,i}^2)\|_{L_2}^2 \right],$$

причем

$$\|y_{3,i}^1 (y_{3,j}^1 - y_{3,j}^2)\|_{L_2}^2 \leq c \|y^1 - y^2\|^2 \|y^1\|^2 \leq cr^2 \|y^1\|^2,$$

$$\|y_{3,j}^2 (y_{3,i}^1 - y_{3,i}^2)\|_{L_2}^2 \leq c \|y^1 - y^2\|^2 \|y^2\|^2 \leq cr^2 \|y^1\|^2.$$

Таким образом,

$$\|\nabla\varphi(\lambda_h(y^1)) - \nabla\varphi(\lambda_h(y^2))\|_{L_2}^2 \leq c_1 \|y^1 - y^2\|^2 [1 + r^2]. \quad (10)$$

Из (8) – (10) получим $\forall y^1, y^2 \in S_r, v \in V_h$

$$\begin{aligned} |[A^h y^1 - A^h y^2, v]| &\leq c_0 r \|y^1 - y^2\| \|v\| + c_1 r (1 + r^2)^{1/2} \|y^1 - y^2\| \|v\| = \\ &= \gamma_2 \|y^1 - y^2\| \|v\|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 4, и

$$\|f\|_{B^{-1}} \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left\{ \gamma_2 - (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)^{1/2} \right\} r. \quad (11)$$

Тогда итерационный процесс (3) сходится при $\tau = \tau_0 = \gamma_1/\gamma_2^2$ при любом начальном приближении $y^0 \in S_r$. Справедлива оценка скорости сходимости

$$\|y^{k+1} - y\|^2 \leq \rho_0 \|y^k - y\|^2, \quad (12)$$

где $\rho_0 = 1 - \gamma_1^2/\gamma_2^2$.

Доказательство. Пусть

$$Sy = y - \tau B^{-1}Ay + \tau B^{-1}f.$$

Согласно [12] (с. 106), для любых $y, v \in S_r$ получим

$$\begin{aligned} \|Sy - Sv\|^2 &= \\ &= \|y - v\|^2 - 2\tau[Ay - Av, y - v] + \tau^2[B^{-1}(Ay - Av), Ay - Av], \end{aligned}$$

откуда в силу леммы 4 следует, что

$$\|Sy - Sv\|^2 \leq \rho(\tau) \|y - v\|^2, \quad (13)$$

где $\rho(\tau) = 1 - 2\tau\gamma_1 + \tau^2\gamma_2^2$. Тогда

$$\|Sy\| \leq \|S_0y\| + \tau \|B^{-1}f\|_B \leq \rho^{1/2}(\tau) \|y\| + \tau \|f\|_{B^{-1}}. \quad (14)$$

Минимальное значение $\rho(\tau)$ достигается при $\tau = \tau_0 = \gamma_1/\gamma_2^2$, $\rho(\tau_0) = 1 - \gamma_1^2/\gamma_2^2$. Пусть выполнено условие (11). Учитывая, что $\|y\| \leq r$ при $\tau = \tau_0$, из (14) получим $\|Sy\| \leq r$, то есть оператор S осуществляет сжатое отображение множества S_r в себя с коэффициентом сжатия $\rho(\tau_0) = \rho_0 < 1$, и для y — решения задачи (1) — справедливо неравенство (12). Теорема доказана.

При более сильных ограничениях на функцию φ (см. [12, 13]) оценку скорости сходимости итерационного процесса (3) можно улучшить. Будем предполагать далее, что функция φ дважды дифференцируема. В этом случае оператор A^h имеет в каждой точке v пространства V_h производную Гато ∂A_v^h . Нетрудно подсчитать, что для любых $y, v, \eta \in V_h$ выполняется равенство

$$[\partial A_v y, \eta] = \int_{\Omega} \{ \langle \nabla^2 \varphi(\lambda_h(v)) \lambda_h(v, y), \lambda_h(v, \eta) \rangle +$$

$$+ \langle \nabla \varphi(\lambda_h(v)), d^h(y, \eta) \rangle dx,$$

где

$$\lambda_h(v, y) = (\varepsilon^h(v, y), w^h(y)), \quad \varepsilon^h(v, y) = \varepsilon^h(v) + d^h(v, y),$$

$$d_{ij}^h(v, y) = 0.5v_{3,i}y_{3,j}, \quad i, j = 1, 2,$$

$\nabla^2 \varphi(\xi)$ — матрица вторых производных функции φ в точке $\xi \in R^6$.

Лемма 5. Пусть существуют постоянные $c_0, c_1 > 0$, такие, что

$$c_0 | \eta |^2 \leq \langle \nabla^2 \varphi(\xi) \eta, \eta \rangle \leq c_1 | \eta |^2 \quad \forall \xi, \eta \in R^6. \quad (15)$$

Тогда существуют постоянные $r_0, \gamma_1(r_0), \gamma_2(r_0) > 0$, такие, что

$$\gamma_1 \| y \|^2 \leq [\partial A_v y, y] \leq \gamma_2 \| y \|^2 \quad \forall y \in V_h, v \in S_r. \quad (16)$$

Доказательство. Используя левое неравенство (15), получим

$$[\partial A_v y, y] = \int_{\Omega} \{ \langle \nabla^2 \varphi(\lambda_h(v)) \lambda_h(v, y), \lambda_h(v, y) \rangle \langle \nabla \varphi(\lambda_h(v)), d^h(y, y) \rangle \} dx \geq$$

$$\geq c \| \lambda_h(v, y) \|_{L_2}^2 - c \| \nabla \varphi(\lambda_h(v)) \|_{L_2} \| d^h(y, y) \|_{L_2}.$$

В силу леммы 3

$$\| \lambda_h(v, y) \|_{L_2}^2 \geq c \| y \|^2 - c \| d^h(v, y) \|_{L_2}^2.$$

Используя лемму 1, нетрудно показать, что

$$\| d^h(v, y) \|_{L_2}^2 \leq c \| y \|^2 \| v \|^2.$$

Кроме того, в силу (4) и леммы 2

$$\| \nabla \varphi(\lambda_h(v)) \|_{L_2}^2 \leq \left(\| w^h(v) \|_{L_2}^2 + \| \varepsilon^h(v) \|_{L_2} \right) \leq \| v \|^2.$$

Следовательно,

$$[\partial A_v y, y] \geq c \| y \|^2 (1 - c (\| v \| + \| v \|^2)).$$

Выбирая $r_0 > 0$ так, чтобы $(1 - c(\| v \| + \| v \|^2)) > 0$ при $\| v \| \leq r_0$, получим левое неравенство (16). Правое же неравенство обосновывается аналогично, с использованием правого неравенства (15) и леммы 3. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы 5 и

$$\| f \|_{B^{-1}} \leq \gamma_1 r. \quad (17)$$

Тогда итерационный процесс (3) сходится при любом начальном приближении $y^0 \in S_r$ и $0 < \tau < 2/\gamma_2$. Наилучшая оценка скорости сходимости достигается при $\tau = \tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$:

$$\| y^{k+1} - y \| \leq \rho_0 \| y^k - y \|,$$

где $\rho_0 = (1 - \zeta) / (1 + \zeta)$, $\zeta = \gamma_1 / \gamma_2$.

Доказательство аналогично [12], [13] и основано на оценке $\| \partial S_{\xi} \|$.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что в случае геометрически линейной модели оболочки, когда компоненты тангенциальной деформации $\varepsilon_{ij}(u)$ полагают равными $e_{ij}(u)$,

ограничения (11) (соответственно (17)) на нагрузку f при исследовании сходимости итерационного метода (3) можно снять.

2. Обсудим теперь практические аспекты применения итерационного процесса (3). Опишем сначала в общих чертах способ вычисления $\text{grad}F_h(y^k)$ (см. также [4, 3]). Имеем

$$\begin{aligned} [A^h y, v] = & 2 \int_{\Omega} (a_{ijkl} \varepsilon_{ij}^h(y) (e_{kl}^h(v) + \vartheta_k^h(y) \vartheta_l^h(v)) + \\ & + b_{ijkl} \varkappa_{ij}^h(y) \varkappa_{kl}^h(v)) dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Представим правую часть равенства (18) в виде

$$\int_{\Omega} (g_i \eta_i + g_{k,i} \eta_{k,i}) dx, \quad (19)$$

где $g_i, g_{k,i}$ — известные (если известен вектор y) функции. Тогда вычисление компонент вектора $\text{grad}F_h(y)$ сводится к вычислению на каждом элементе $T \subset \Omega$ интегралов вида

$$\int_T g_i \psi_s dx, \quad \int_T g_{k,i} \psi_{s,i} dx,$$

где $\psi_s, s = 1, 2, \dots$ — базисные функции Лагранжа элемента триангуляции T , и последующему применению хорошо известного в МКЭ алгоритма “сборки” (см., например, [14]). Очевидно, что выражения, не содержащие w_{ij}^h , имеют нужную форму (19). Для преобразования остальных слагаемых в правой части (18) определим функции $f_{kl}^h \in H_l$ с помощью соотношений

$$\int_{\Omega} f_{kl}^h \eta dx = \int_{\Omega} b_{ijkl} \varkappa_{ij}^h(y) \eta dx \quad \forall \eta \in H_l. \quad (20)$$

Тогда, используя определение $w_{ij}^h(v)$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_{ijkl} \varkappa_{ij}^h(y) w_{kl}^h(v) dx &= \int_{\Omega} f_{kl}^h w_{kl}^h(v) dx = \\ &= -0.5 \int_{\Omega} (f_{kl,l}^h v_{3,k} + f_{kl,k}^h v_{3,l}) dx \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}_l. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что вычисление функций $f_{ij}^h, w_{ij}^h(y_3)$ предполагает решение систем линейных алгебраических уравнений с матрицей масс [14], соответствующей базису пространства H_l .

Следующий этап численной реализации итерационного метода — обращение матрицы B , то есть решение на каждом шаге итераций системы линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} -\Delta_h y_i^{k+1} &= F_i^k, \quad i = 1, 2, \\ B_3 y_3^{k+1} &= F_3^k, \end{aligned}$$

где Δ_h — конечноэлементная аппроксимация оператора Лапласа на пространстве $\overset{\circ}{H}_{l-1}$, а оператор $B_3 : \overset{\circ}{H}_l \rightarrow \overset{\circ}{H}_l$ определяется следующим образом:

$$[B_3 y_3, v_3] = -0.5 \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left((w_{ij}^h(y_3))_{,j} v_{3,i} + (w_{ij}^h(y_3))_{,i} v_{3,j} \right) dx$$

для любых $v_3 \in \overset{\circ}{H}_l$, $F^k = -\tau \operatorname{grad} F_h(y^k) + B y^k$. Это означает, что для отыскания y_3^{k+1} приходится решать линейную систему вида

$$M w_{ij}^h + C_{ij} y_3^{k+1} = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\sum_{i,j=1}^2 C_{ij}^T w_{ij}^h = F_3^k,$$

где M — матрица масс, C_{ij} — матрицы конечноэлементных аппроксимаций дифференциальных операторов второго порядка, определяемые правыми частями соотношений (2). Для решения систем такого вида можно применять методы типа Холесского [15, 16]. Наибольшую трудность при реализации итерационного метода (3) представляет, очевидно, отыскание y_3 . Заметим, что

$$[B_3 y_3, y_3] = [M^{-1} C_{ij} y_3, C_{ij} y_3] \quad \forall y_3 \in \overset{\circ}{H}_l.$$

Из регулярности триангуляции вытекает, что матрица M^{-1} энергетически эквивалентна диагональной матрице D с постоянными эквивалентности, не зависящими от h [3]. Отсюда непосредственно вытекает, что $c_0 B_3^0 \leq B_3 \leq c_1 B_3^0$, где $B_3^0 = C_{ij}^T D C_{ij}$. Теперь ясно, что в итерационном методе (3), не ухудшая оценки скорости сходимости, матрицу B_3 можно заменить на B_3^0 . Очевидно, B_3^0 — симметричная положительно определенная ленточная матрица. Ширина ленты зависит от l и h .

Иногда возможно использование оператора B_3 еще более простой конструкции. В частности, на прямоугольной области Ω при специальной триангуляции можно использовать итерационный метод с матрицей B_3 , соответствующей аппроксимации оператора Лапласа на пространстве $\overset{\circ}{H}_l$, то есть определить оператор B равенством

$$[B y, y] = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} |\nabla y_i|^2 dx \quad \forall y \in V_h. \quad (21)$$

В этом случае скорость сходимости итерационного процесса зависит от h .

При исследовании сходимости итерационного процесса используется

Лемма 6 [3]. *Существуют постоянные $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, такие, что*

$$\gamma_1 \|y\|_{W_2^1} \leq \sum_{i,j=1}^2 \|w_{ij}(y)\|_{L_2} \leq \frac{\gamma_2}{h^2} \|y\|_{W_2^1} \quad \forall y \in \overset{\circ}{H}_l.$$

Теорема 3. *Итерационный процесс (3) с оператором B , определенным равенством (21), для нахождения решения с относительной точностью ε требует не более $O(h^{-2} \ln \varepsilon^{-1})$ итераций.*

Доказательство теоремы непосредственно следует из [12] (см. также [13]) и леммы 6.

При реализации описанных итерационных методов на каждом шаге приходится решать конечноэлементные уравнения Пуассона. В случае простых областей и специальных триангуляций с этой целью можно использовать экономичные прямые и итерационные методы [13], [17], [18] с числом операций, пропорциональным числу точек сетки.

3. Возможности обсуждаемых в работе итерационных методов иллюстрируются на примере классической задачи [19] о деформации пологой бесконечно длинной цилиндрической

оболочки под действием равномерно распределенного нормального давления. Продольные края оболочки предполагаются жестко защемленными. Задача сводится к решению уравнения

$$\text{grad}\Phi(v) = 0, \quad (22)$$

где

$$\Phi(v) = \int_{-1}^1 \left(k_1 \left(v_1' - v_3 + 0.5 (v_3')^2 \right)^2 + (v_3'')^2 - 2qv_3 \right) d\xi,$$

$k_1 = 3k^2/4$, $q = pRb^2/D$ — безразмерный параметр нагрузки, $k = 4b^2/Rt$ — безразмерный параметр кривизны, t — толщина оболочки, R — радиус оболочки, $2b$ — ширина оболочки, D — изгибная жесткость, при граничных условиях

$$v_i(-1) = v_i(1) = 0, \quad i = 1, 3, \quad v_3'(-1) = v_3'(1) = 0. \quad (23)$$

Для решения задачи (22) – (23) применялся итерационный процесс (3) при $l = 2$ (l определяет пространство конечных элементов V_h) Отрезок $[-1, 1]$ разбивался на элементы равной длины. Оператор B определялся соотношением

$$[By, y] = \int_{-1}^1 \left((y_1')^2 + w^2 (y_3) \right) dx \quad \forall y \in V_h.$$

Для расширения диапазона нагрузок, при которых обеспечивается сходимость итераций, применялся хорошо известный в теории нелинейных оболочек метод продолжения по параметру нагрузки (см., например, [20, 21]). Использовался простейший вариант этого метода. Сначала задача решалась при некотором малом $q = q_0$. Затем нагрузка увеличивалась по закону $q = q_j = q_0 r^j$, $r > 1, j = 1, 2, \dots$, и в качестве начального приближения принималось решение, полученное при $q = q_{j-1}$. Оптимальные значения итерационных параметров τ_1^0, τ_3^0 , используемые для решения задачи при $q = q_0$, выбирались экспериментально (они зависят от k). В дальнейшем параметры τ_1, τ_3 уменьшались по закону $\tau_i^j = r_i^{-j} \tau_i^0$, $i = 1, 3, r_i > 1$ при $1 \leq j \leq j_0$. Количество итераций, необходимых для достижения требуемой точности, при этом оказывается практически не зависящим от числа элементов.

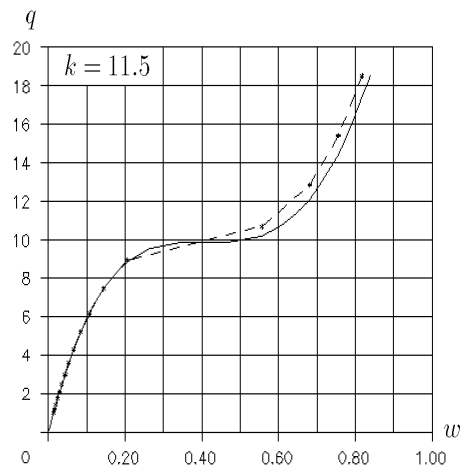


Рис. 1.

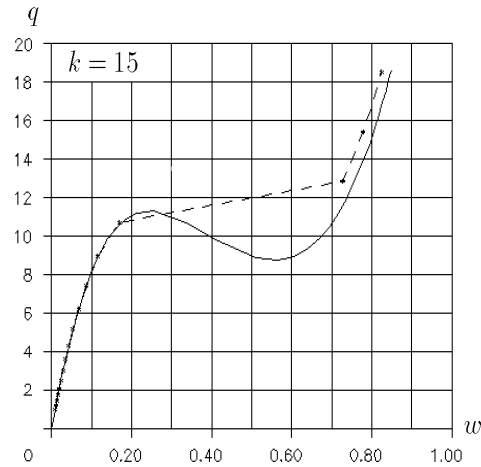


Рис. 2.

Результаты расчетов при $k = 11.5, 15$, $q_0 = 1$ (начальная нагрузка), $r = 1.2$, $r_1 = 1.2$, $r_3 = 1.5$, $j_0 = 5$, $\delta = 10^{-4}$, $\tau_1^0 = 1$, $\tau_3^0 = 0.8$, $n = 15$ (количество элементов) приведены на рис. 1, 2. Сплошные кривые описывают точные зависимости [19] максимального безразмерного прогиба от безразмерного параметра нагрузки. Штриховые кривые построены по результатам расчетов. Видно, что при превышении критического значения нагрузки (при $k = 15$ оно соответствует хлопку оболочки) происходит резкое возрастание расчетного прогиба. При этом точность расчетов в закритической области несколько снижается. Таким образом, предлагаемый итерационный метод позволяет удовлетворительно описывать прогибы оболочки в областях их однозначной зависимости от параметра нагрузки.

Список литературы

- [1] СЪЯРЛЕ Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач*. Мир, М., 1980.
- [2] ДЬЯКОНОВ Е. Г. *Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач*. Наука, М., 1989.
- [3] АСТРАХАНЦЕВ Г. П. О смешанном методе конечных элементов в задачах теории оболочек. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **29**, №10, 1989, 1492–1504.
- [4] КАРЧЕВСКИЙ М. М. Смешанный метод конечных элементов для нелинейных задач теории пластин. *Изв. вузов. Математика*, №7, 1992, 18–23.
- [5] КАРЧЕВСКИЙ М. М., ЗАБОТИНА Л. Ш. Смешанный метод конечных элементов для нелинейных задач теории оболочек. Казан. ун-т., Казань, Деп. в ВИНТИ 07.04.93, №877–В93, 1993, 22 с.
- [6] KARCHEVSKY M. M., ZABOTINA L. SH. On some class of mixed finite element schemes for nonlinear shell theory problems. *Матем. заметки ЯГУ*, **2**. Вып. 2, 1995, 121–139.
- [7] ЗАБОТИНА Л. Ш. Оценки точности смешанных схем конечных элементов для нелинейных задач теории оболочек. Казан. ун-т., Казань, Деп. в ВИНТИ 14.04.95, №1041–В95, 1995, 18 с.

- [8] ЗАБОТИНА Л. Ш. О сходимости смешанных схем конечных элементов для нелинейных задач теории оболочек. Ред. журн. Изв. вузов. Матем., Казань, Деп. в ВИНТИ 12.07.95 №2142–В95, 1995, 23 с.
- [9] ЗАБОТИНА Л. Ш., КАРЧЕВСКИЙ М. М. О смешанных схемах конечных элементов для нелинейных задач теории оболочек. *Изв. вузов. Матем.* №1, 1996, 45–52.
- [10] БЕРДИЧЕВСКИЙ В. Л. *Вариационные принципы механики сплошной среды*. Наука, М., 1989.
- [11] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О. А., УРАЛЬЦЕВА Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. Наука, М., 1973.
- [12] КАРЧЕВСКИЙ М. М., ЛЯШКО А. Д. *Разностные схемы для нелинейных уравнений математической физики*. КГУ, Казань, 1976.
- [13] САМАРСКИЙ А. А., НИКОЛАЕВ Е. С. *Методы решения сеточных уравнений*. Наука, М., 1978.
- [14] СТРЕНГ Г., ФИКС ДЖ. *Теория метода конечных элементов*. Мир, М., 1977.
- [15] МАСЛОВСКАЯ Л. В. Обобщенный алгоритм Холесского для смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **29**, №1, 1989, 67–74.
- [16] ИКРАМОВ Х. Д. Несколько замечаний по поводу обобщенного алгоритма Холесского. *Там же*, **32**, №7, 1992, 1126–1130.
- [17] КОРНЕЕВ В. Г. *Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности*. ЛГУ, Л., 1977.
- [18] СОЛОВЬЕВ С. И. Быстрые прямые методы решения сеточных схем МКЭ с бикубическими элементами для уравнения Пуассона. В *“Иссл. по прикл. математике”*. Вып. 17, КГУ, Казань, 1990, 120–129.
- [19] КОРНИШИН М. С., МУШТАРИ Х. М. Устойчивость бесконечно длинной пологой цилиндрической панели под действием нормального равномерного давления. *Изв. Казанского филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук*, Вып. 7, 1955, 36–50.
- [20] КОРНИШИН М. С. *Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения*. Наука, М., 1964.
- [21] КОРНИШИН М. С., ИСАНБАЕВА Ф. С. *Гибкие пластины и панели*. Наука, М., 1968.