**Вычислительные технологии** **Том 3, № 4, 1998**

# ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ТИПА РЕАКЦИЯ — ДИФФУЗИЯ*

А. В. Шмидт
*Институт вычислительного моделирования, Красноярск, Россия*

Two-component reaction-diffusion systems have been described that can be reduced to a single equation. The examples of constructing the solutions of such systems are given.

В настоящее время ведутся интенсивные исследования явлений самоорганизации в различных неравновесных системах, заключающихся в возникновении и эволюции упорядоченных пространственно-временных структур. Примером последних могут служить автоволны [1, 2], которые формируются в так называемых возбудимых средах в ответ на внешнее возмущение. Существует множество примеров возбудимых сред: нервные и мышечные ткани [3], колонии микроорганизмов [4], ряд химических растворов и гелей [5, 6], магнитные сверхпроводники с током [7], некоторые твердотельные системы [8]. Общепринятой моделью для описания возбудимых сред является система нелинейных параболических уравнений типа реакция — диффузия (см., например, [9])

$$C_t = \nabla(D(C)\nabla C) + F(C), \tag{1}$$

где $C$ — вектор состояния элементарного объема возбудимой среды.

О. В. Капцов [10] предложил простой метод построения точных решений двухкомпонентных систем (1), для случая, когда коэффициенты диффузии являются константами, основанный на редукции систем к одному уравнению с помощью дифференциальных подстановок. Групповая классификация уравнения $T_t = (m(T)T_x)_x + Q(T)$ проведена в работе [11]. Вопрос о полной групповой классификации системы (1) остается открытым.

Цель работы — используя метод, предложенный О. В. Капцовым [10], провести описание двухкомпонентных систем уравнений (1), обладающих дифференциальными подстановками.

## 1. Системы реакция — диффузия и дифференциальные подстановки

В работе исследуются двухкомпонентные системы (1)

$$u_t = (K(u,v)u_x)_x + F(u,v),$$

$$v_t = (P(u,v)v_x)_x + G(u,v), \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке ISSEP (грант s97–3099).

где функции $u$ и $v$ зависят от $x$ и $t$. В дальнейшем рассматриваются только нераспадающиеся системы (2), то есть системы, в которых оба уравнения зависят от $u$ и $v$.

Говорят [10], что система (2) допускает дифференциальную подстановку $n$-го порядка, если в результате замены

$$u = w(v, v^{(1)}, \dots, v^{(n)}), \tag{3}$$

где $v^{(i)}$ — частная производная $i$-го порядка по $x$ функции $v$, первое уравнение системы удовлетворяется тождественно (в силу второго уравнения).

**Лемма 1.** *Системы (2) допускают дифференциальные подстановки не выше второго порядка.*

**Доказательство.** Пользуясь формулой (3) и вторым уравнением системы (2), можно вычислить производные любого порядка функции $u$. Подставив значения этих производных в первое уравнение системы (2), получим уравнение редукции, которое, очевидно, будет содержать производные функции $v$ по $x$ порядков, больших $n$. Требуя, чтобы уравнение редукции удовлетворялось тождественно и собирая подобные члены при указанных выше производных функции $v$, получим ряд выражений.

Для доказательства леммы 1 достаточно следить за коэффициентом при старшей производной функции $v$ по $x$ уравнения редукции. Используя (3), находим $u_t = w_{v^{(n)}} v_t^{(n)} + \dots$ . Производную $v_t^{(n)}$ дает второе уравнение системы (2) — $v_t^{(n)} = P_u u^{(n+1)} v^{(1)} + \dots$ . Далее, из (3) определяем $u^{(n+1)} = w_{v^{(n)}} v^{(2n+1)} + \dots$ . Таким образом, $P_u w^2_{v^{(n)}} v^{(1)} v^{(2n+1)}$ — слагаемое, содержащее старшую производную функции $v$ по $x$ левой части уравнения редукции. С другой стороны, из первого уравнения системы (2) следует, что $u_t = K u^{(2)} + \dots$ . Несложно видеть, что старшая производная $v$ по $x$ правой части уравнения редукции — $v^{(n+2)}$. Из неравенства $2n + 1 > n + 2$ следует, что $2 \leq n < \infty$, то есть, если порядок дифференциальной подстановки выше 1, то $P = P(v)$.

Рассмотрим систему

$$\begin{gathered} u_t = (K(u, v) u_x)_x + F(u, v), \\ v_t = (P(v) v_x)_x + G(u, v). \end{gathered} \tag{4}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, несложно получить, что если порядок подстановки выше 2, то $G = G(v)$ — система (4) “распадается”. Лемма 1 доказана.

Таким образом, для систем (2) необходимо подробно рассмотреть дифференциальные подстановки первого порядка, а для систем (4) — дифференциальные подстановки второго порядка.

## 2. Дифференциальные подстановки первого порядка

Рассматриваются дифференциальные подстановки первого порядка $u = w(v, v_x)$ для систем (2). Требуя тождественного удовлетворения уравнения редукции и собирая подобные члены при $v_{xxx}$, $v_{xx}^2$, $v_{xx}$, получаем следующие уравнения:

$$P + P_u w_{v_x} v_x = K, \tag{5}$$

$$P_u w_{v_x v_x} w_{v_x} v_x + 2 P_u w_{v_x}^2 + P_{uu} w_{v_x}^3 v_x = K w_{v_x v_x} + K_u w_{v_x}^2, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} w_v (P + P_u w_{v_x} v_x) + w_{v_x} (3 P_u w_v v_x + 3 P_v v_x + 2 P_u w_{vv_x} v_x^2 + 2 P_{uu} w_v w_{v_x} v_x^2 + 2 P_{uv} w_{v_x} v_x^2 + \\ + G_u w_{v_x}) = K (w_v + 2 w_{vv_x} v_x) + 2 K_u w_v w_{v_x} + K_v w_{v_x} v_x, \end{gathered} \tag{7}$$

наконец, оставшиеся слагаемые дадут еще одно уравнение

$$w_v(P_u w_v v_x^2 + P_v v_x^2 + G) + w_{v_x}(P_u w_{vv} v_x^3 + P_{uu} w_v^2 v_x^3 + 2P_{uv} w_v v_x^3 + P_{vv} v_x^3 + G_u w_v v_x + G_v v_x) =$$
$$= K w_{vv} v_x^2 + K_u w_v^2 v_x^2 + K_v w_v v_x^2 + F. \tag{8}$$

Обозначим $w_{v_x} v_x$ через $D(u,v)$. Тогда уравнение (6), после умножения на $v_x^2$, принимает вид
$$P w_{v_x v_x} v_x^2 = P_u D^2 (1 - D_u). \tag{9}$$

Справедливы следующие равенства:

$$(w_{v_x} v_x)_{v_x} v_x = w_{v_x v_x} v_x^2 + w_{v_x} v_x,\ D_{v_x} v_x = D_u w_{v_x} v_x = D_u D = w_{v_x v_x} v_x^2 + D,\ D_u D - D = w_{v_x v_x} v_x^2.$$

Следовательно, уравнение (9) можно переписать следующим образом

$$P + P_u w_{v_x} v_x = 0. \tag{10}$$

Тогда из уравнений (5) и (10) следует, что $K = 0$. Интегрируя уравнение (10), находим

$$P(u,v) = \frac{a(v)}{v_x}, \tag{11}$$

где $a$ — функция, произвольным образом зависящая от $v$. Уравнения (7), (8) после несложных преобразований, с учетом того, что $G_{v_x v_x} = 0$, переходят в следующие:

$$G(u,v) = -v_x^2(P_u w_v + P_v) + c = -\frac{a a'}{P} + c, \tag{12}$$

$$F(u,v) = w_v c + w_{v_x} v_x c' = \frac{1}{P_u}\left(\left(\frac{P a'}{a} - P_v\right)c - \frac{P}{P_u} c'\right),$$

где $c$ — произвольная функция от $v$. Подставляя функции $P(u(v,v_x),v)$ и $G(u(v,v_x),v)$, определяемые по формулам (11) и (12), во второе уравнение системы (2), получаем редуцированное уравнение
$$v_t = c(v). \tag{13}$$

Таким образом, справедлива

**Лемма 2.** *Система*

$$u_t = \frac{1}{P_u\,(u,v)}\left(\left(\frac{P(u,v)a'(v)}{a(v)} - P_v(u,v)\right)c(v) - \frac{P(u,v)}{P_u(u,v)} c'(v)\right),$$

$$v_t = (P(u,v)v_x)_x + \frac{a(v)a'(v)}{P(u,v)} + c(v), \tag{14}$$

*где $a$, $c$, $P$ — произвольные функции, дифференциальной подстановкой первого порядка, определяемой из (11), редуцируется к уравнению (13).*

**Замечание 1.** Очевидно, что решения уравнения (13), а следовательно, и системы (14), содержат произвольную функцию от $x$.

Предположив линейность подстановки относительно производной $v_x$

$$u = a(v)v_x + b(v), \tag{15}$$

получаем, что уравнение (6) тождественно удовлетворено, а из уравнения (5) имеем $K(u,v) = P(u,v) + P_u(u,v)(u-b)$. Используя последнее выражение, а также формулы (7) и (15), находим

$$G(u,v) = -\frac{(u-b)^2}{a}\left(\frac{P}{a}\right)_v + c(v), \tag{16}$$

где $c(v)$ — произвольная функция. После несложных преобразований уравнения (8) получим

$$F(u,v) = \frac{P_{vv}}{a^2}(u-b)^3 - P\left(\frac{a''}{a}(u-b)+b''\right) + G_v(u-b) + (3G-2c)\left(\frac{a'}{a}(u-b)+b'\right). \tag{17}$$

Подставив $u$ из формулы (15) во второе уравнение системы (2), получаем редуцированное уравнение

$$v_t = (P(av_x+b,v)v_x)_x + G(av_x+b,v). \tag{18}$$

Таким образом, имеет место

**Лемма 3.** *Система*

$$u_t = \left(\left(P(u,v) + P_u(u,v)(u-b)\right)u_x\right)_x + F(u,v),$$

$$v_t = \left(P(u,v)v_x\right)_x + G(u,v), \tag{19}$$

*где $P$ — произвольная функция, $G$ определяется по формуле (16), а $F$ по формуле (17), заменой (15) редуцируется к уравнению (18).*

В следующей лемме 4 выделяется класс систем (19), редуцируемых к уравнению

$$v_t = q(v)v_{xx}. \tag{20}$$

**Лемма 4.** *Система*

$$u_t = (qu_x)_x - \frac{q'b'}{a^2}(u-b)^2 + rb''\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{u-b}\right) - b''q,$$

$$v_t = \left(\left(\frac{r}{u-b}+q\right)v_x\right)_x - \frac{u-b}{a^2}(q'(u-b)+r'),$$

*($q$, $r$, $b$ — произвольные функции от $v$, $a$ — константа) дифференциальной подстановкой первого порядка $u = av_x + b(v)$ редуцируется к уравнению (20).*

Для доказательства леммы 4 следует рассмотреть уравнение (18). Требуя, чтобы система (19) редуцировалась к уравнению (20), то есть (18) переходило в (20), определяем функции $P$, $K$, $F$, и $G$.

**Пример построения решений.** В случае, когда $q(v) = v^2$, получаем редуцированное уравнение $v_t = v^2 v_{xx}$, которое, в свою очередь, сводится [12] к линейному уравнению теплопроводности $z_t = z_{yy}$. Редукция осуществляется точечным преобразованием $x = z$, $v = z_y$. Возьмем, например, одно из решений линейного уравнения теплопроводности $z = e^{-\lambda t}\sin\sqrt{\lambda}y$. Тогда функции

$$v = \sqrt{\lambda(e^{-2\lambda t} - x^2)},\ u = b(v) - \frac{\sqrt{\lambda}\,ax}{\sqrt{e^{-2\lambda t} - x^2}}$$

являются решениями системы

$$u_t = (v^2u_x)_x - \frac{2vb'(v)}{a^2}(u-b(v))^2 + r(v)b''(v)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{u-b(v)}\right) - b''(v)v^2,$$

$$v_t = \left(\left(\frac{r(v)}{u-b(v)} + v^2\right)v_x\right)_x - \frac{u-b(v)}{a^2}(2v(u-b(v)) + r'(v)).$$

Таким образом в леммах 2, 3 описаны все системы реакция—диффузия (2), обладающие дифференциальными подстановками первого порядка.

# 3. Дифференциальные подстановки второго порядка

Рассматриваются дифференциальные подстановки второго порядка $u = w(v, v_x, v_{xx})$ для систем (4). Требуя тождественного удовлетворения уравнения редукции и собирая подобные члены при $v_{xxxx}$, $v^2_{xxx}$, $v_{xxx}$, получаем следующие уравнения:

$$P + G_u w_{v_{xx}} = K, \tag{21}$$

$$w_{v_{xx}}(G_{uu}w^2_{v_{xx}} + G_u w_{v_{xx}v_{xx}}) = K w_{v_{xx}v_{xx}} + K_u w^2_{v_{xx}}, \tag{22}$$

$$w_{v_x}(G_u w_{v_{xx}} + P) + w_{v_{xx}}(4P'v_x + 2G_{uu}w_{v_{xx}}(w_v v_x + w_{v_x}v_x x) + 2G_{uv}w_{v_{xx}}v_x + G_u(2w_{vv_{xx}} +$$
$$+2w_{v_xv_{xx}}v_{xx} + w_{v_x})) = K(2w_{vv_{xx}}v_x + 2w_{v_xv_{xx}}v_{xx} + w_{v_x}) + w_{v_{xx}}(2K_u(w_v v_x + w_{v_x}v_{xx}) + K_v v_x), \tag{23}$$

наконец, оставшиеся слагаемые дадут еще одно уравнение

$$w_v(P'v_x^2 + Pv_{xx} + G) + w_{v_x}(P''v_x^3 + 3P'v_xv_{xx} + G_u(w_vv_x + w_{v_x}v_{xx}) + G_vv_x) + w_{v_{xx}}(P'''v_x^4 +$$
$$+6P''v_x^2v_{xx} + 3P'v_x^2 + (G_{uv}(w_vv_x + w_{v_x}v_{xx}) + G_{vv}v_x)v_x + G_u((w_{vv}v_x + w_{vv_x}v_{xx})v_x + w_vv_{xx} +$$
$$+(w_{vv_x}v_x + w_{v_xv_x}v_{xx})v_{xx}) + (w_vv_x + w_{v_x}v_{xx})(G_{uu}(w_vv_x + w_{v_x}v_{xx}) + G_{uv}v_x) + G_vv_{xx}) =$$
$$= K((w_{vv}v_x + w_{vv_x}v_{xx})v_x + w_vv_{xx} + (w_{vv_x}v_x + w_{v_xv_x}v_{xx})v_{xx}) +$$
$$+(K_u(w_vv_x + w_{v_x}v_{xx}) + K_vv_x)(w_vv_x + w_{v_x}v_{xx}) + F. \tag{24}$$

Обозначим $w_{v_{xx}}$ через $D(u,v)$ и проанализируем уравнения (21) и (22):

$$K = P(v) + G_uD,\ K_u = G_{uu}D + G_uD_u,$$

$$D(G_{uu}D^2 + G_uDD_u) = (P(v) + G_uD)DD_u + (G_{uu}D + G_uD_u)D^2,\ P(v) + G_uD = 0,$$

то есть $K = 0$. Возвращаясь к старым обозначениям и интегрируя по $v_{xx}$ уравнение $P + G_uw_{v_{xx}} = 0$, получаем

$$G = -Pv_{xx} + c_1(v, v_x). \tag{25}$$

Уравнение (23) несложно преобразовать к виду $2P'v_x + G_uw_{v_x} = 0$, что после интегрирования по $v_x$ дает

$$G = -P'v_x^2 + c_2(v, v_{xx}). \tag{26}$$

Очевидно, из формул (25), (26) следует, что

$$G = -P(v)v_{xx} - P'(v)v_x^2 + c(v). \tag{27}$$

Подставив найденную функцию $G(u(v, v_x, v_{xx}), v)$ во второе уравнение системы (4), получим редуцированное уравнение (13). Используя выражения (24), (27), находим $F = cw_v + c'w_{v_x}v_x + (c''v_x^2 + c'v_{xx})w_{v_{xx}}$, откуда несложно получить

$$F(u, v, v_{xx}) = \frac{v_{xx}}{G_u}\left(\frac{P^2c''}{P'} + Pc' + \left(\frac{PP''}{P'} - P'\right)c\right) + \frac{1}{G_u}\left(\frac{P'c}{P}(G - c) - G_vc + Gc'\right). \quad (28)$$

Выразив производную $v_{xx}$ из формулы (27) и подставив ее в (28), получим

$$F(u, v, v_x^2) = \frac{v_x^2}{G_u}\left(-Pc'' - P'c' + \left(\frac{P'^2}{P} - P''\right)c\right) + \frac{1}{G_u}\left(\frac{P'c}{P}(G - c) - G_vc + Gc'\right). \quad (29)$$

Таким образом, имеет место

**Лемма 5.** а) *Система*

$$u_t = F(u, v, v_{xx}),$$
$$v_t = (P(v)v_x)_x + G(u, v),$$

*где $P$, $G$ — произвольные функции, а $F(u, v, v_{xx})$ определяется по формуле (28), дифференциальной подстановкой второго порядка, определяемой из (27), редуцируется к уравнению (13).*

б) *Система*

$$u_t = F(u, v, v_x^2),$$
$$v_t = (P(v)v_x)_x + G(u, v),$$

*где $P$, $G$ — произвольные функции, а $F(u, v, v_x^2)$ определяется по формуле (29), дифференциальной подстановкой второго порядка, определяемой из (27), редуцируется к уравнению (13).*

**Замечание 2.** Очевидно, что если функция $c(v)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка

$$Pc'' + P'c' + \left(P'' - \frac{P'^2}{P}\right)c = 0,$$

то функция $F$ зависит только от $u$ и $v$. Другими словами, выделяются системы в исходной постановке, обладающие дифференциальными подстановками второго порядка.

Уравнение (22) тождественно удовлетворится в том случае, когда дифференциальная подстановка имеет вид $u = a(v, v_x)v_{xx} + b(v, v_x)$. Тогда из (21) имеем

$$K(u, v) = P(v) + G_u(u, v)a, \quad (30)$$

следовательно, $a = a(v)$. После несложных преобразований из (23) получаем

$$G_{uv}a + \left(\frac{b_{v_x}}{v_x} - a'\right)G_u = \frac{2Pa'}{a} - 3P',$$

откуда следует, что $b = \phi(v)v_x^2 + \psi(v)$, и, возвращаясь к старым обозначениям, имеем

$$u = a(v)v_{xx} + b(v)v_x^2 + c(v), \quad (31)$$

$$G_{uv} + \frac{2b - a'}{a}G_u = \frac{2Pa' - 3P'a}{a^2}. \quad (32)$$

Интегрирование по $v$ уравнения (32) дает:

$$G_u = e^{\int \frac{a'-2b}{a} dv} \left( \int \frac{2Pa' - 3P'a}{a^2} e^{\int \frac{2b-a'}{a} dv} dv + h(u) \right), \tag{33}$$

$$K = P + a e^{\int \frac{a'-2b}{a} dv} \left( \int \frac{2Pa' - 3P'a}{a^2} e^{\int \frac{2b-a'}{a} dv} dv + h(u) \right), \tag{34}$$

где $h(u)$ — произвольная функция. Интегрируя уравнение (33) по $u$, находим

$$G = e^{\int \frac{a'-2b}{a} dv} \left( u \int \frac{2Pa' - 3P'a}{a^2} e^{\int \frac{2b-a'}{a} dv} dv + H(u) \right) + r(v), \tag{35}$$

где $r(v)$ — произвольная функция, а $H(u)$ — первообразная функции $h$. Используя формулы (24), (30), (31), (32), несложно получить, что

$$F = v_{xx}^2 \left( \frac{a^2}{b^2} \left( P'''a - 4P''b - Pb'' - 3P'b' + 2Pb' \frac{a'}{a} + G_u a' b \right) + \frac{a}{b} \left( 2(Pb)' - 2P \frac{a'^2}{a} + 3P'a' + Pa'' - G_u a'^2 \right) - \right.$$

$$\left. - 2Pb - 4Pa' \right) + v_{xx} \left( \frac{u-c}{b} \left( 2a \left( P'' - \frac{P'''a}{b} + 3P' \frac{b'}{b} + P \frac{b''}{b} \right) + 2P \frac{a'^2}{a} - 3P'a' + 4Pb \frac{a'}{a} - 2(Pb)' - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 4P \frac{a'b'}{b} - Pa'' \right) + Gb \left( \frac{a}{b} \right)' + \frac{1}{b} \left( 3P'ac' + Pac'' - 3P'a^2 - 2Pa'c' + G_{vv} a^2 \right) \right) + \frac{u-c}{b} \left( Gb' + 2G_v b + \right.$$

$$\left. + 3P'a + 2P \frac{c'a'}{a} - 3P'c' + G_{vv} a - Pc'' + \frac{u-c}{b} \left( P'''a + 2P''b + 2P \frac{b'a'}{a} - 3P'b' - Pb'' \right) \right) + Gc'. \tag{36}$$

Подставив $u$ из формулы (31) во второе уравнение системы (4), получаем редуцированное уравнение

$$v_t = Pv_{xx} + P'v_x^2 + e^{\int \frac{a'-2b}{a} dv} \left( (av_{xx} + bv_x^2 + c) \int \frac{2Pa' - 3P'a}{a^2} e^{\int \frac{2b-a'}{a} dv} dv + \right.$$

$$\left. + H(av_{xx} + bv_x^2 + c) \right) + r(v). \tag{37}$$

Таким образом, имеет место

**Лемма 6.** *Система*

$$u_t = (K(u, v)u_x)_x + F(u, v, v_{xx}),$$
$$v_t = (P(v)v_x)_x + G(u, v),$$

*где $P$ — произвольная функция, функции $K$ и $G$ определяются соответственно по формулам (34) и (35), а $F(u, v, v_{xx})$ находится из (36), заменой (31) редуцируется к уравнению (37).*

**Замечание 3.** Выражая из уравнения (31) производную $v_{xx}$ и подставляя в формулу (36), можно получать и другие функции $F$, которые будут зависеть от $u$, $v$, $v_x$, $v_{xx}$.

Таким образом, в леммах 5, 6 описаны все системы реакция—диффузия (2), обладающие дифференциальными подстановками второго порядка.

Автор благодарит д.ф.-м.н., проф. Капцова О. В. за постановку задачи и помощь в работе.

## Список литературы

[1] Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. *Автоволновые процессы.* Наука, М., 1987.

[2] Кринский В. И., Михайлов А. С. *Автоволны.* Знание, М., 1984.

[3] Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е. *Математическая биофизика клетки.* Наука, М., 1978.

[4] Gerisch G. *Wilhelm Roux Archiv Entwickelungsmech Organizmen*, **156**, 1965, 127.

[5] Белоусов Б. П. *Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г.* Медгиз, М., 1959, 145; *Автоволновые процессы в системах с диффузией.* ИПФ АН СССР, Горький, 1981, 176.

[6] Жаботинский А. М. *Концентрационные автоколебания.* Наука, М., 1974.

[7] Буздин А. И., Михайлов А. С. *ЖЭТФ*, **90**, 1986, 294.

[8] Скотт Э. *Волны в активных нелинейных средах в приложении к электронике.* Сов. радио, М., 1977.

[9] Cohen D., White A. *SIAM J. Appl. Math.*, **51**, 1991, 472–483.

[10] Капцов О. В. Построение точных решений систем диффузионных уравнений. *Матем. моделирование,* **7**, №3, 1995, 107–115.

[11] Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.,* **22**, №6, 1982, 1393–1400.

[12] Ибрагимов Н. Х. *Группы преобразований в математической физике.* Наука, М., 1983.

*Поступила в редакцию 10 февраля 1998 г.*