

Выбор оптимальной схемы переноса для модели ветрового волнения WAM-4*

С. В. КОСТРЫКИН

Институт вычислительной математики РАН, Москва, Россия

e-mail: kostr@inm.ras.ru

Some results of the test experiments using the full WAM-4 wave model incorporating the new advection scheme are presented. For the typical grid resolution a substantial improvement of the mean wave height for 1–2 days forecast is obtained. It is shown that with the new advection scheme an increase of resolution in the angular coordinate leads to a substantial improvement of the medium-range forecasts.

Введение

Точное предсказание волнения в океанском или морском бассейне играет важную роль как при составлении навигационных маршрутов судов, так и при оперативном прогнозе погоды. Для решения этой сложной задачи широко используются методы численного моделирования. Наиболее распространены такие модели ветрового волнения, как WAM [1] и WAVEWATCH [2]. Эти модели постоянно совершенствуются, причем как за счет более точного описания физических механизмов, связанных с ветровым волнением, таких как ветровая накачка, взаимодействие волн с течением и с друг другом, диссипация волн, так и за счет применения более современных численных схем, пригодных для использования на высокопроизводительных вычислительных системах.

Одним из важных компонентов модели ветрового волнения является блок, отвечающий за перенос волновой энергии по поверхности океана. Отметим, что неправильное описание переноса волновых пакетов может приводить к запаздыванию волн или неправильному описанию амплитуды ветровых волн, т.е. к ошибкам в прогнозе волнения, которые могут быть сравнимы с ошибками, возникающими за счет физических параметризаций [3]. Для того чтобы уменьшить данную составляющую ошибки прогноза, используются два подхода: первый — увеличение пространственно-временного разрешения задачи, когда из-за сходимости разностной схемы автоматически увеличивается точность расчетов. И второй — использование более точной схемы переноса. У обоих подходов есть свои достоинства и недостатки. Если первый подход хорош для вычислительных систем с большой производительностью, то второй — более трудоемкий при своей реализации. Цель данной работы заключается в исследовании некоторых высокоточных разностных схем на предмет нахождения оптимальной схемы для ее внедрения в модель ветрового волнения WAM-4.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № офи-а-05-05-08027, грант № 06-05-64916-а) и Президента РФ (грант № МК-532.2006.5).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2008.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение эволюции на сфере спектральной волновой плотности $S = R^2 \tilde{S} \cos \phi$, где $\tilde{S}(t, \lambda, \phi, \beta, \omega)$ — нормальная спектральная плотность; R — радиус сферы [2, 3]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \dot{\lambda} S}{\partial \lambda} + \frac{\partial \dot{\phi} S}{\partial \phi} + \frac{\partial \dot{\beta} S}{\partial \beta} = F. \quad (1)$$

Здесь λ — долгота; ϕ — широта; β — угол между направлением вектора групповой скорости и направлением на восток, отсчитываемый против часовой стрелки; ω — частота волны; F содержит слагаемые, связанные с ветровой накачкой, нелинейным взаимодействием волн и их диссипацией.

В наиболее простом случае, если отсутствуют течения, а глубина бесконечно большая, для компонент скорости выполняются соотношения

$$\dot{\lambda} = \frac{c_g \cos \beta}{R \cos \phi}; \quad (2)$$

$$\dot{\phi} = \frac{c_g \sin \beta}{R}; \quad (3)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{c_g \operatorname{tg} \phi \cos \beta}{R}. \quad (4)$$

Здесь $c_g = \frac{g}{4\pi\omega}$ — групповая скорость волн; g — ускорение свободного падения.

Уравнения (1)–(4) решаются для заданной начальной функции $S_0(\lambda, \phi, \beta, \omega)$ в некоторой области на сфере. Поскольку в данной работе акцент сделан только на адвективных процессах, то в (1) положим $F \equiv 0$.

2. Выбор оптимальной схемы переноса

2.1. Схемы-кандидаты

Рассмотрим одномерный аналог уравнения (1):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \dot{\lambda} S}{\partial \lambda} = 0. \quad (5)$$

Для удобства введем новые обозначения. Пусть $q_i^n = S(\lambda_i, t_n)$ — волновая плотность в центрах ячеек сетки (интегральная переменная), а $f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = S(\lambda_{i+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}})$ — волновая плотность на соответствующих границах ячеек (потокосая переменная). Предположим, что используется равномерная сетка вдоль направления λ .

Потоковый или дивергентный вид разностной схемы для решения (5) можно записать следующим образом:

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta \lambda} \left(\dot{\lambda}_{i+\frac{1}{2}} f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \dot{\lambda}_{i-\frac{1}{2}} f_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad (6)$$

где Δt и $\Delta \lambda$ — шаги по времени и пространству. Данная форма записи удобна тем, что обеспечивает сохранение интегральной спектральной плотности, иными словами,

консервативность схемы (рис. 1). В модели ветрового волнения WAM-4 изначально используется схема направленных разностей первого порядка, которая получается из (6), если в ней положить

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \left[q_i^n H(\dot{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}) + q_{i+1}^n H(-\dot{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}) \right], \quad (V)$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда. Для того чтобы улучшить данную схему переноса, исследовалось несколько современных схем-кандидатов:

I — модификация схемы ван Лиры [4];

II — QUICKEST ULTIMATE [5];

III — “кабаре” [6];

IV — CIP-CSRL0 [7].

В случае, если в (5) положить $\dot{\lambda} = \text{const} > 0$ и обозначить параметр Куранта через $c \equiv \dot{\lambda} \frac{\Delta t}{\Delta \lambda}$, то уравнение (6) запишется в виде

$$q_i^{n+1} = q_i^n - c \left(f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (7)$$

Потоковые переменные для указанных выше схем связаны с интегральными следующим образом:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = q_i^n + \frac{1}{4}(q_{i+1}^n - q_{i-1}^n)(1 - c)\alpha, \quad (I)$$

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(q_i^n + q_{i+1}^n) - \frac{c}{2}(q_{i+1}^n - q_i^n) - \frac{1 - c^2}{6}(q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n), \quad (II)$$

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 2q_i^n - f_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \quad (III)$$

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a_i c + b_i c^2}{1 + \beta_i c}, \quad a_i = f_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \quad b_i = f_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - (1 + \beta_i)q_i^n, \quad \beta_i = 1 - \frac{|f_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - q_i^n| + \epsilon}{|f_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - q_i^n| + \epsilon}. \quad (IV)$$

В выражении (I) α равна единице везде, кроме узлов сетки, соседних с экстремумом функции, а в (IV) ϵ — константа порядка машинной точности.

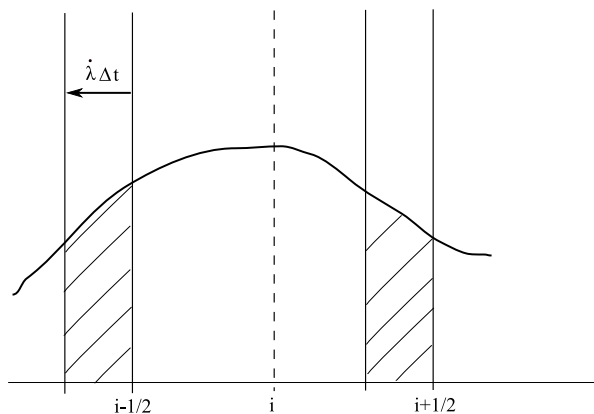


Рис. 1. Построение разностной схемы потокового типа

Отметим, что многие схемы потокового типа (6) получаются в предположении, что подсеточное распределение переносимой величины задается некоторой функцией известного вида (см. рис. 1). Например, схема V получается, если аппроксимировать распределение постоянной функцией, I — линейной, II — квадратичной, а в схеме IV используется аппроксимация дробно-рациональной функцией второго порядка. При построении схемы III используется линейная интерполяция, а также свойство характеристик гиперболического дифференциального уравнения.

Одним из важнейших свойств разностных схем является их квазимонотонность. Для обеспечения этого свойства к схемам I–III применялась процедура коррекции потоковых переменных [5]. Отметим, что схема IV по построению квазимонотонная, а схема III используется в другой популярной модели ветрового волнения — WAVEWATCH3.

2.2. Спектральные свойства разностных схем

Некоторое представление о точности разностных схем дает исследование их спектральных свойств. Для этого формально применим дискретное линейное преобразование, задаваемое формулами I–III, к гармонической функции вида $q(\lambda, t) = e^{i(k\lambda - \omega t)}$. При этом оказывается возможным записать (7) в виде

$$q_i^{n+1} = \rho(c, \psi) q_i^n, \quad (8)$$

где $\rho(c, \psi)$ — комплексный множитель перехода, зависящий от параметра Куранта c и безразмерной длины волны $\psi = k\Delta\lambda$. Заметим, что схема IV — нелинейная, поэтому к ней данный метод анализа неприменим. Зная комплексный коэффициент перехода, можно вычислить модуль перехода $|\rho|$, характеризующий степень затухания амплитуды

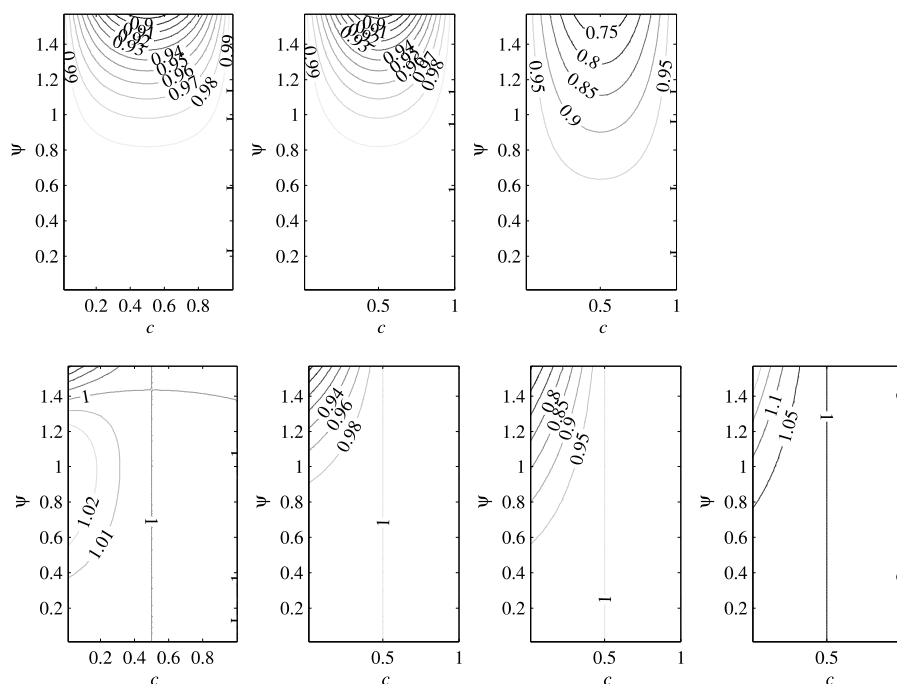


Рис. 2. Спектральные характеристики разностных схем: модули перехода (верхний ряд), относительная фазовая скорость (нижний ряд): схема I — первая колонка, II — вторая, V — третья, III — четвертая

гармоник, а также относительную фазовую скорость $\frac{c_{\text{num}}}{c} = -\frac{1}{c\psi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}\rho}{\operatorname{Re}\rho}\right)$, характеризующую фазовую ошибку. Отметим, что для идеальной схемы $|\rho| \equiv 1$ и $c_{\text{num}} = c$.

На рис. 2 представлены соответствующие характеристики для схем I–III, а также для схемы направленных разностей первого порядка (схемы V). Отметим, что для схемы III $\rho \equiv 1$, т. е. схемная диссипация в ней отсутствует. Как следует из рис. 2, наилучшие спектральные характеристики показывает схема III, затем по диссипативной ошибке идет схема I, а по фазовой ошибке — схема II.

2.3. Результаты одномерных тестов

Спектральный анализ дает полное представление о качестве разностной схемы только в линейном случае. Но, как известно из теории разностных схем [8, 9], среди линейных разностных схем только схема первого порядка может быть монотонной. А значит, для обеспечения квазимонотонности схемы высокого порядка последняя обязательно должна быть нелинейной.

В нашем случае в схемах I–III использовалась нелинейная коррекция потоковых переменных, так как это описано в работе [5], а схема IV является нелинейной по по-

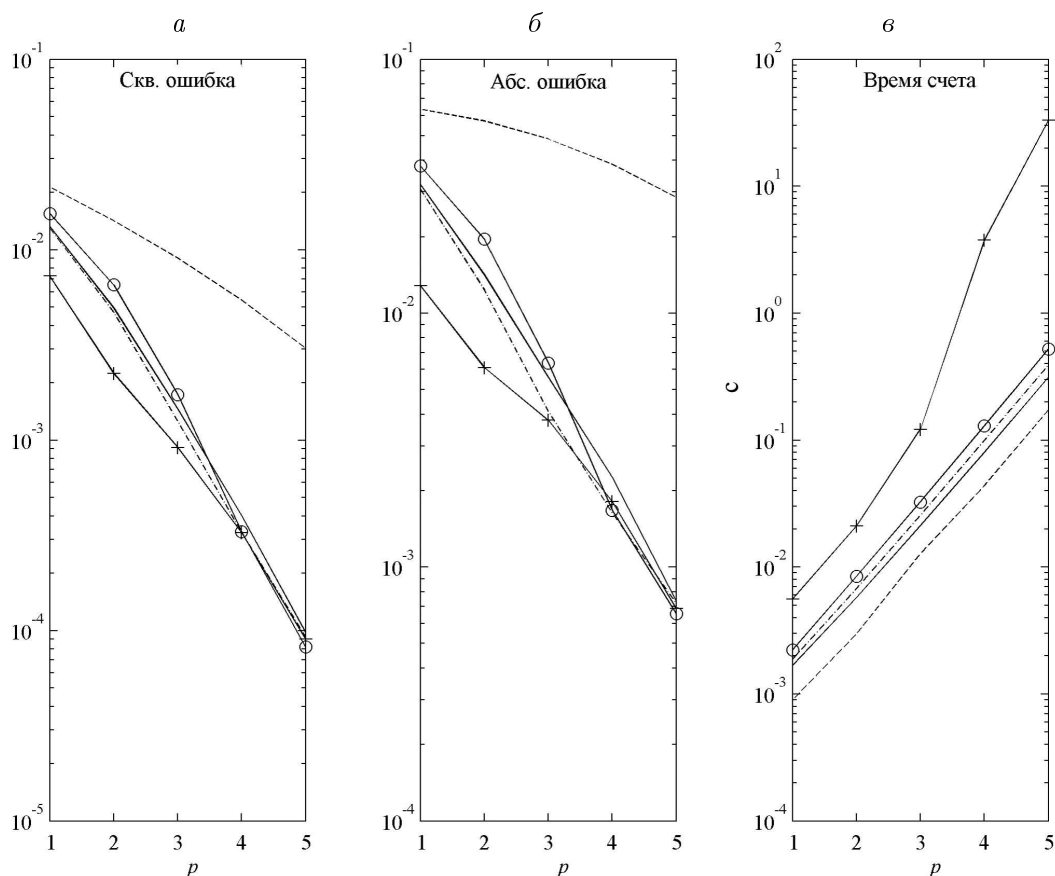


Рис. 3. Зависимость среднеквадратичной (а), абсолютной (б) ошибки и времени счета (в) от разрешения задачи; логарифмический масштаб; сплошная линия — схема III; штриховая — V, штрихпунктирная — IV, кружки — I, плюсы — II. Начальные данные в виде гауссовой функции

строению. Поэтому для более полного сравнения качества схем I–V проводились дополнительные одномерные тесты. Для этого бралось начальное распределение в виде гауссовой функции, а также двусторонней ступеньки и переносилось по кругу на один оборот. При самом грубом разрешении круг разбивался на $N_1 = 50$ ячеек. Далее число ячеек, на которые дробилась сетка, удваивалось ($N_p = 2^{p-1}$, где p изменялось от 1 до 5). Сетки по пространству и времени дробились синхронно, чтобы обеспечить неизменность параметра Куранта. Носитель функции брался равным $\pi/20$, т. е. практически равным одному-двум шагам сетки при самом грубом разрешении.

На рис. 3 представлена зависимость среднеквадратичной ошибки, абсолютной ошибки, а также времени счета от параметра p для значения числа Куранта $c = 0.25$ в случае гладких начальных данных, а на рис. 4 — для ступеньки. Отметим, что для других значений числа Куранта получаются схожие зависимости.

Исходя из данных тестовых расчетов (рис. 3 и 4) можно заключить, что в гладком случае схемы I–IV показывают схожую точность, а в случае негладких начальных данных несколько лучшие результаты дает схема IV. Как и следовало ожидать, наихудшей по точности оказалась схема V, но в то же время и самой быстрой. Из схем-кандидатов наихудший результат по скорости счета дает схема I, а наилучший — схема III.

Приведенные результаты показывают, что оптимальным выбором для внедрения в модель WAM-4 являются две схемы — “кабаре” и CIP-CSLR0. Однако в ходе проведения двумерных тестов оказалось, что из-за использования схемы расщепления по пространству в схеме CIP-CSLR0 возникают небольшие отрицательные значения. Устранение их

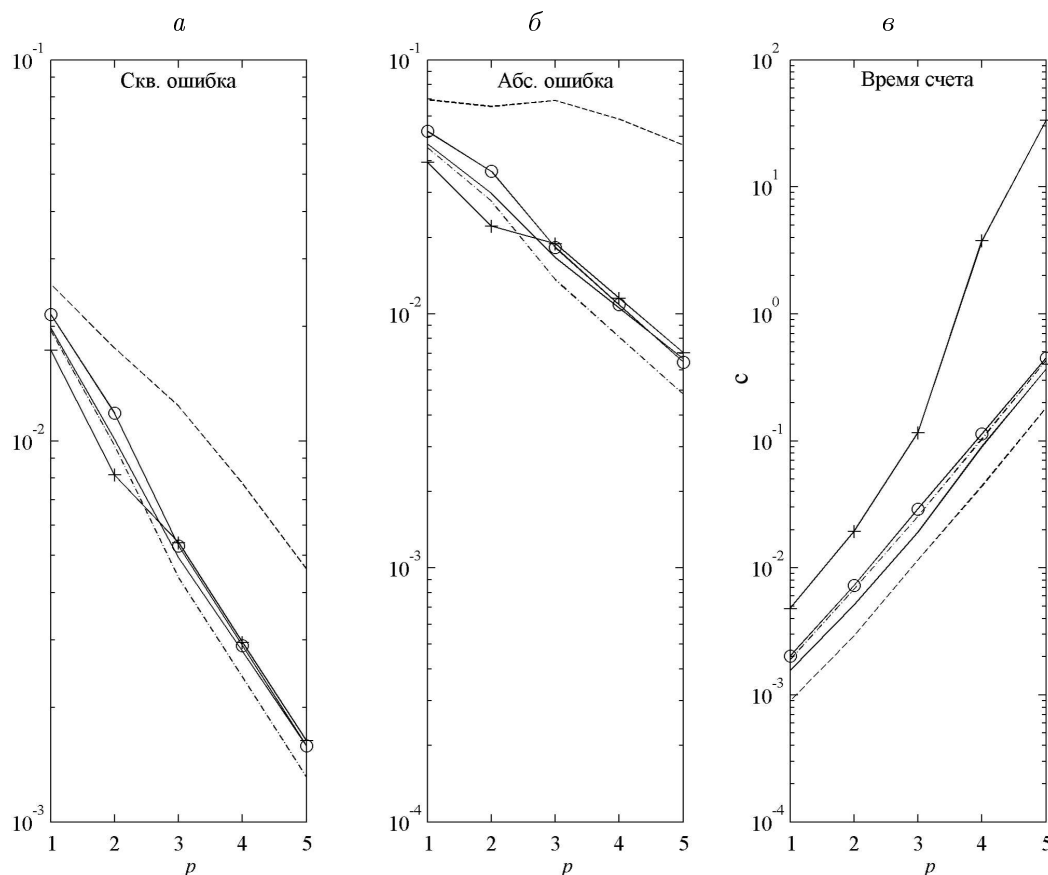


Рис. 4. То же, что и на рис. 3. Начальные данные в виде двусторонней ступеньки

путем простого обнуления приводит к неконсервативности схемы, что может вызвать большие ошибки при длительном прогнозировании. Поэтому для внедрения в модель WAM-4 была выбрана схема III — “кабаре”.

3. Некоторые результаты расчетов с моделью WAM-4

Для оценки работоспособности схемы III в модели WAM-4 проведен тестовый эксперимент, в котором распределение спектральной плотности задавалось близким к реальным данным. Уравнение (1) интегрировалось с начальными данными в виде узконаправленного JONSWAP-спектра [10], распределенного по пространству в виде гауссовой функции:

$$E_0(\omega) = \frac{\alpha g^2}{(2\pi)^4} \omega^{-5} \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_m}{\omega} \right)^4 + \ln \gamma \exp \left(-\frac{(\omega - \omega_m)^2}{2\sigma^2 \omega_m^2} \right) \right]; \quad (9)$$

$$G_0(\beta) = \frac{2}{\pi} H(\cos(\beta - \beta_0)) \cos^2(\beta - \beta_0); \quad (10)$$

$$R_0(\lambda, \phi) = \exp(-\alpha_s((\lambda - \lambda_0)^2 + (\phi - \phi_0)^2)); \quad (11)$$

$$S_0(\lambda, \phi, \beta, \omega) = E_0(\omega)G_0(\beta)R_0(\lambda, \phi). \quad (12)$$

Здесь $\sigma = \sigma_a H(\omega_m - \omega) + \sigma_b H(\omega - \omega_m)$, а в качестве значений параметров брались следующие величины: $\alpha = 0.18$, $\omega_m = 0.2$ Гц, $\gamma = 3.0$, $\beta_0 = 0$, $\sigma_a = 0.07$, $\sigma_b = 0.09$, $\alpha_s = 0.05/\Delta\lambda^2$. Отметим, что при решении данной задачи задавалось разрешение сетки, типичное для современных волновых моделей: $\Delta\lambda = \Delta\phi = 0.25^\circ$, $\Delta\beta = 15^\circ$, $\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = 1.1$, $\omega_{\min} = 0.0417$ Гц, число частот составило 25, шаг по времени 900 с.

В случае декартовой системы координат можно выписать аналитическое решение уравнения (1) с начальными распределением спектральной плотности S_0 :

$$S(\lambda, \phi, \beta, \omega, t) = S_0(\lambda - \dot{\lambda}t, \phi - \dot{\phi}t, \beta, \omega). \quad (9)$$

Для дальнейшего анализа в качестве характеристики волнения использовалась средняя высота волн $h(\lambda, \phi, t)$, которая определяется из соотношения

$$h^2(\lambda, \phi, t) = 2\pi \iint S(\lambda, \phi, \beta, \omega, t) d\omega d\beta. \quad (10)$$

На рис. 5 представлено аналитическое решение, а также приведены численные решения, полученные в модели WAM-4 со старой и новой схемами переноса. На рис. 6, а представлена зависимость среднеквадратичной ошибки от заблаговременности прогноза для обеих схем переноса. Из данных расчетов можно заключить, что новая схема переноса существенно уменьшила среднеквадратичную ошибку численного решения при прогнозе на одни-двое суток. При прогнозе на более длительный срок ошибка уменьшается, но несущественно по сравнению со старой схемой. Это можно объяснить влиянием так называемого эффекта “разбрызгивания” решения [3, 11], когда из-за дискретности угловой координаты β возникает дробление непрерывного фронта волны на ряд сгустков по направлениям, соответствующим значениям этой координаты (см. рис. 5). Отметим, что данный эффект возникает и в оригинальной версии модели WAM-4, но

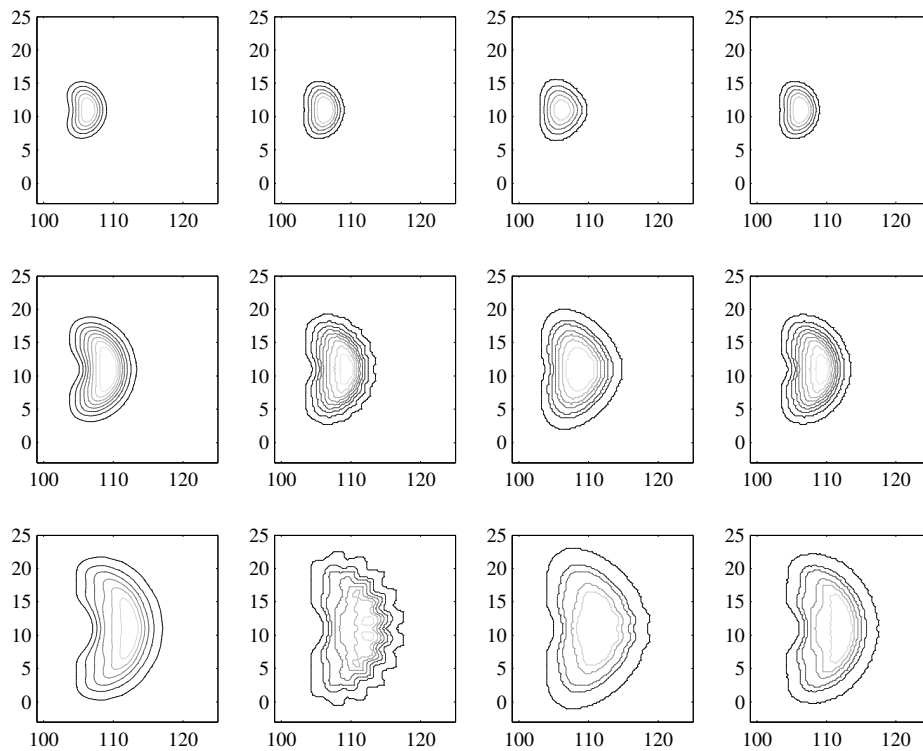


Рис. 5. Средняя высота волн в разные моменты времени: первый столбец — аналитическое решение, второй — новая схема ($\Delta\beta = 15^\circ$), третий — оригинальная схема WAM ($\Delta\beta = 15^\circ$), четвертый — новая схема ($\Delta\beta = 7.5^\circ$); верхний ряд — через 24 ч (интервал между изолиниями 0.5 м), средний — 48 ч (интервал между изолиниями 0.2 м), нижний — 72 ч (интервал между изолиниями 0.2 м)

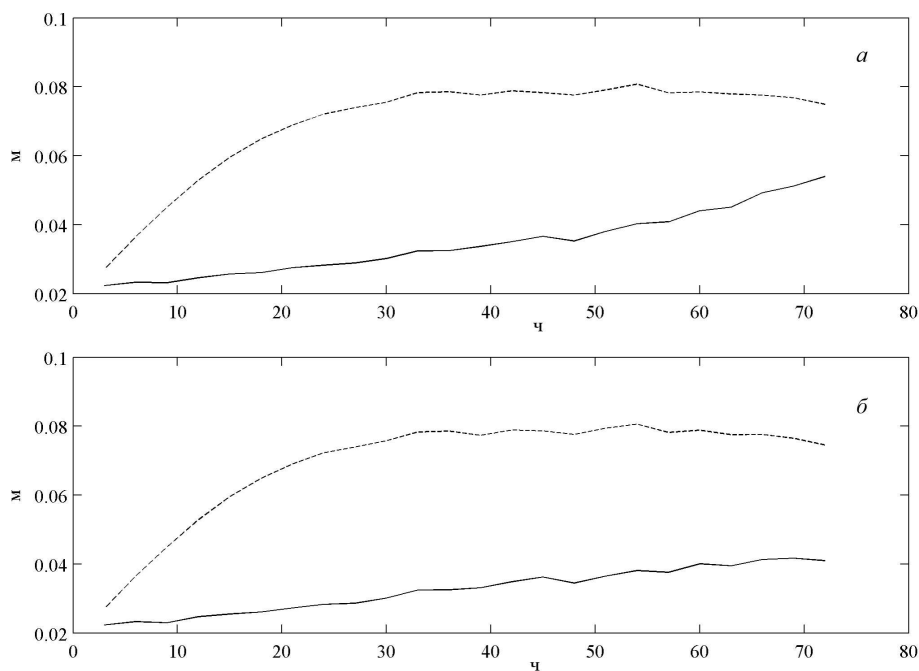


Рис. 6. Зависимость среднеквадратичной ошибки прогноза средней высоты волн от времени: штриховая линия — старая схема, сплошная — новая схема: *а* — $\Delta\beta = 15^\circ$, *б* — $\Delta\beta = 7.5^\circ$

при интегрировании на более длительный срок — порядка 5–7 дней. Для устранения этого численного артефакта можно использовать несколько подходов, например, ввести дополнительное сглаживание решения с помощью оператора диффузии по угловой координате β , как это реализовано в модели WAVEWATCH [2, 3, 11]. Другой способ — увеличение разрешения по угловой координате. Результаты расчетов с удвоенным разрешением по угловой координате ($\Delta\beta = 7.5^\circ$) показаны в крайнем правом столбце на рис. 5. На рис. 6, б приведена получающаяся в этом эксперименте зависимость среднеквадратичной ошибки прогноза средней высоты волн от времени.

Заключение

Проанализированы некоторые современные схемы переноса с целью выявления оптимальной для ее использования в модели ветрового волнения WAM-4. Исследовались спектральные свойства схем, а также их точность на тестовых задачах. В результате выбрана схема “кабаре”, предложенная В.М. Головизниным и А.А. Самарским [6]. Данная схема оптимальным образом сочетает в себе простоту и высокую точность по сравнению с другими рассматриваемыми схемами.

Предварительные эксперименты с моделью WAM-4 и новой схемой показали значительное улучшение качества краткосрочного прогноза средней высоты волн (на одни-двое суток). Для того чтобы улучшить среднесрочный прогноз волнения с данной схемой, требуется увеличение разрешения по угловой координате как минимум в два раза ($\Delta\beta = 7.5^\circ$) либо включение дополнительного сглаживания решения с помощью оператора диффузии по угловой координате. Результаты экспериментов с моделью WAM-4 показали, что с новой схемой переноса время работы программы увеличивается примерно на 30 % без учета физических параметризаций.

Список литературы

- [1] WAMDI group. The WAM model a third generation ocean wave prediction model // J. Phys. Oceanogr. 1988. Vol. 12. P. 1775–1810.
- [2] JANSSEN P. The wave model // Europ. Centre for Medium-Range Weather Forecasts, Meteorological Training Course Lecture Series. 2003. ECMWF.
- [3] ЛАВРЕНОВ И.В. Математическое моделирование ветрового волнения в пространственно-неоднородном океане. СПб.: Гидрометеоиздат, 1998. 500 с.
- [4] WALCEK C.J. Minor flux adjustment near mixing ratio extremes for simplified yet highly accurate monotonic calculation of tracer advection // J. Geophys. Res. 2000. Vol. 105, N D7. P. 9335–9348.
- [5] LEONARD B.P. The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1991. Vol. 88. P. 17–74.
- [6] ГОЛОВИЗНИН В.М., САМАРСКИЙ А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Журн. мат. моделирования. 1998. Т. 10, № 1. С. 86–100.
- [7] XIAO F., YABE T., PENG X., KOBAYASHI H. Conservative and oscillation-less atmospheric transport schemes based on rational functions // J. Geophys. Res. 2002. Vol. 107, N D22. doi:10.1029/2001JD001532. P. 4609.

-
- [8] ГОДУНОВ С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. Т. 47(89), № 3. С. 271–306.
- [9] HARTEN A., NYMAN J.M., LAX P.D. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks // Comm. Pure and Appl. Math. 1976. Vol. 29, N. 3. P. 297–322.
- [10] HASSELMAN K., ROSS D.B., MUELLER P., SELL W. A parametric wave prediction model // J. Phys. Oceanogr. 1976. N 6. P. 200–228.
- [11] BOOIJ N., HOLTHUIJSEN L. Propagation of ocean waves in discrete spectral wave models // J. Comput. Phys. 1987. Vol. 68. P. 307–326.

Поступила в редакцию 21 февраля 2008 г.