

# Метод вейвлет-Галеркина численного моделирования тонкопроволочных антенн

Н. В. БУБНОВА

*Поволжская государственная академия телекоммуникаций и информатики,  
Самара, Россия  
e-mail: jacolio@list.ru*

Problem of finding of the current distribution function and the directional diagram for a system of slender conductors is reduced to solution of an integral Fredholm equation of the first type. The Galerkin method based on spline wavelets is applied to solve the derived integral equation. Algorithms relying on properties of the sparse matrices and the results of numerical experiments are presented.

## Введение

Вычислительные трудности решения интегральных уравнений в задачах электродинамики во многом обусловлены заполненностью матриц, возникающих при их дискретизации. Это приводит к огромному объему вычислений (особенно в многомерных задачах). Однако, как было показано в [1], в базисе из вейвлет-функций [2] большинство элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) оказываются очень малыми по абсолютной величине, т.е. она будет псевдоразреженной [3]. Использование этого факта позволяет существенно уменьшить объем вычислений и требования к оперативной памяти компьютера и открывает путь к созданию эффективных алгоритмов решения существенно многомерных задач.

В настоящей работе рассматривается применение метода вейвлет-Галеркина к системе электрически тонких проводников.

## 1. Сплайновые вейвлеты

Пусть  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $m$  — натуральное число и  $n_0$  — такое целое число, что  $2^{n_0} < 2m - 1 < 2^{n_0+1}$ . Рассмотрим семейство  $\Delta = \{\Delta_n, n = n_0, n_0 + 1, \dots\}$  разбиений отрезка  $[0, 1]$   $\Delta_n : 0 = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{2^n}^n = 1$  с постоянным шагом  $h = h_n = 1/2^n$ . На каждом из разбиений  $\Delta_n$  рассмотрим пространство сплайнов  $L_n = S(\Delta_n, m - 1, 1)$ . Тогда для каждого  $k \geq n_0$  пространство  $S(\Delta_k, m - 1, 1)$  можно представить в виде прямой суммы  $L_k = L_{n_0} \oplus W_{n_0+1} \oplus W_{n_0+2} \oplus \dots \oplus W_k$ , где через  $W_k$  обозначено ортогональное дополнение пространства  $L_{k-1}$  до пространства  $L_k$ . Искомый вейвлет-базис будем строить как объединение базиса в  $L_{n_0}$  и всех базисов в пространствах  $W_n$ ,  $n_0 < n \leq k$ .

Вначале построим базис в ортогональном дополнении  $W_n$  пространства  $L_{n-1}$  до пространства  $L_n$ . Зафиксируем  $n \geq n_0 + 1$ . В случае необходимости будем считать, что

каждое из разбиений  $\Delta_n$  продолжено с тем же шагом на всю числовую ось узлами  $x_i^n$ ,  $-\infty < i < +\infty$ . Нормализованные  $B$ -сплайны на разбиении  $\Delta_n$  будем обозначать  $N_{m-1,j,n}$ .

Зафиксируем некоторое целое  $i \geq 0$ , такое, что  $i + 2m - 1 \leq 2^{n-1}$ , т.е. отрезок  $[x_i^{n-1}, x_{i+2m-1}^{n-1}]$  целиком содержится в  $[0, 1]$ . Будем искать функцию  $\psi_{i,n}(x) \in W_n$  в виде

$$\psi_{i,n}(x) = \sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j N_{m-1,j,n}. \quad (1)$$

Для того чтобы  $\psi_{i,n} \in W_n$ , достаточно потребовать выполнения условий

$$(\psi_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}) = 0, \quad k = i - m + 1, i - m + 2, \dots, i + 2m - 2, \quad (2)$$

поскольку остальные условия ортогональности выполняются автоматически в силу дизъюнктивности носителей.

Подставляя представление (1) в (2), получим однородную систему  $3m - 2$  уравнений с  $3m - 1$  неизвестными

$$\sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j (N_{m-1,j,n}, N_{m-1,k,n-1}) = 0, \quad k = i - m + 1, i - m + 2, \dots, i + 2m - 2,$$

которая всегда имеет нетривиальное решение. Находя это нетривиальное решение, получаем искомый набор коэффициентов и функцию  $\psi_{i,n}(x)$  в виде (1). Из представления (1) и свойств  $B$ -сплайнов вытекает, что носитель  $\text{supp}(\psi_{i,n}) \subset [x_{2i}^n, x_{2i+4m-2}^n]$ , т.е. содержит  $4m - 2$  смежных частичных отрезка.

Таким образом, мы построили совокупность полуортогональных линейно независимых вейвлет  $\{\psi_{i,n}\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 2m + 1$ . Однако размерность ортогонального дополнения  $W_n$  равна  $2^{n-1}$ , т.е. до базиса в  $W_n$  нам не хватает ровно  $2(m - 1)$  функций. Построим недостающие вейвлет-функции. Для этого рассмотрим функции  $\psi_{i,n}(x)$  при  $-2m + 2 \leq i \leq 2^{n-1} - 1$  на расширенном разбиении  $\Delta_n$ .

Первую группу из  $m - 1$  недостающих вейвлет будем искать в виде

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \psi_{i,n}(x) - \sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j \psi_{j,n}(x), \quad -m + 1 \leq i \leq -1, \quad (3)$$

из условий

$$(\tilde{\psi}_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}) = 0, \quad k = -m + 1, -m + 2, \dots, -1, \quad (4)$$

где скалярное произведение понимается в смысле  $L_2[0, 1]$ .

Подставляя (3) в (4), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j (\psi_{j,n}, N_{m-1,k,n-1}) = (\psi_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}), \quad k = -m + 1, -m + 2, \dots, -1 \quad (5)$$

для определения  $\alpha_j$ . Решая данную систему, находим граничные вейвлеты. Тем самым мы построили совокупность  $m - 1$  вейвлет-функций (3).

Вторую группу из  $m - 1$  недостающих вейвлет определим из соображений симметрии в виде

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \tilde{\psi}_{n_0+1, 2^{n-1}-2m-i+1}(2^{n-n_0-1}(1-x)), \quad 2^{n-1} - 2m + 2 \leq i \leq 2^{n-1} - m. \quad (6)$$

Тем самым мы построили совокупность  $m-1$  вейвлет-функций (6). Вместе с функциями (1) и (3) они образуют искомый базис в  $W_n$ , если  $2^{n-1} > 2m-1$ .

В качестве базиса в  $L_{n_0}$  выберем совокупность “усеченных”  $B$ -сплайнов

$$\{\varphi_{k,n_0} = \overline{N}_{m-1,k,n_0}, -m+1 \leq k \leq 2^{n_0-1}\}. \quad (7)$$

Итак, совокупность функций (7) и (1), (3), (6) при  $n_0+1 \leq n \leq k$  образует искомый вейвлет-базис в пространстве  $L_k$ .

**Замечание 1.** Построение вейвлет-функций проводилось в случае  $[a, b] = [0, 1]$ . Однако, очевидно, что на произвольном отрезке  $[a, b]$  соответствующую вейвлет-систему можно получить из построенной с помощью линейной замены  $x' = \frac{x-a}{b-a}$ , рассматривая вейвлет-функции переменной  $x'$ . Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что вейвлет-система построена для произвольного отрезка  $[a, b]$ .

## 2. Метод Бубнова—Галеркина для сингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) + \int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x) \quad (8)$$

с заданной функцией  $f$  и неизвестной функцией  $u$ . Предположим, что уравнение (8) имеет единственное решение при любой непрерывной  $f(x)$ , а ядро для некоторой константы  $C > 0$  удовлетворяет оценкам

$$\left| \frac{\partial^l K(x, y)}{\partial x^s \partial y^{l-s}} \right| \leq C \frac{1}{|x-y|^l}, 0 \leq l \leq 4. \quad (9)$$

Рассмотрим для (8) метод Бубнова—Галеркина на базе построенных вейвлет-функций степени  $m-1$ . Зафиксируем некоторое натуральное число  $k > n_0$  и будем искать решение (8) в виде

$$u = \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \phi_{j,n_0} + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \psi_{j,n_0+i} \quad (10)$$

из условий

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b K(x, y) \left[ \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \phi_{j,n_0}(y) + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \psi_{j,n_0+i}(y) \right] \phi_{l,n_0}(x) dy dx = \\ = \int_a^b f(x) \phi_{l,n_0}(x) dx, \quad -m+1 \leq l \leq 2^{n_0}-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b \int_a^b K(x, y) \left[ \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \phi_{j, n_0}(y) + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \psi_{j, n_0+i}(y) \right] \psi_{l, n}(x) dy dx = \\
 & = \int_a^b f(x) \psi_{l, n}(x) dx, \quad -m+1 \leq l \leq 2^{n-1} - m, \quad n_0 + 1 \leq n \leq k. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Совокупность условий (11) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей порядка  $2^k + m - 1$ , элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b \phi_{j, n_0}(x) \phi_{l, n_0}(x) dx + \int_a^b \int_a^b K(x, y) \phi_{j, n_0}(y) \phi_{l, n_0}(x) dx dy, \\
 & \int_a^b \int_a^b K(x, y) \phi_{j, n_0}(y) \psi_{l, n}(x) dx dy, \\
 & \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_{j, n}(y) \psi_{l, n+s}(x) dx dy, \quad s \neq 0, \\
 & \int_a^b \psi_{j, n}(x) \psi_{l, n}(x) dx + \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_{j, n}(y) \psi_{l, n}(x) dx dy.
 \end{aligned}$$

Для классических систем функций в методе Галеркина эти числа оказываются в основном ненулевыми и недостаточно малыми, чтобы ими можно было пренебречь и рассматривать СЛАУ (11) как разреженную. В [4] показано, что в случае вейвлет большинство элементов матрицы СЛАУ малы по абсолютной величине. В настоящей работе мы получим асимптотически точные оценки этих элементов в случае рассматриваемых сплайновых вейвлет.

**Замечание 2.** Здесь и далее мы будем рассматривать базисные вейвлет-функции, умноженные на нормирующие сомножители, т. е. сделаем для построенных ранее функций замены  $\psi_{l, n} \rightarrow 2^{n/2} \psi_{l, n}$ ,  $\phi_{l, n} \rightarrow 2^{n/2} \phi_{l, n}$ , чтобы эти базисные функции имели в  $L_2[a, b]$  нормы порядка  $O^*(1)$ .

**Теорема.** *Найдется такая константа  $C > 0$ , не зависящая от  $k$ , что при  $-m+1 \leq l \leq 2^{n-1} - m$ ,  $-m+1 \leq j \leq 2^{n-1} - m$ ,  $n_0 + 1 \leq n \leq k$  справедливы оценки*

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_{j, n}(y) \psi_{l, n}(x) dx dy \right| \leq C 2^{-n} (1 + |l - j|)^{-m}, \quad (12)$$

а при  $-m+1 \leq j \leq 2^{n+s-1}$ ,  $1 \leq s \leq k - n$  — оценки

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_{j, n+s}(y) \psi_{l, n}(x) dx dy \right| \leq C 2^{-(n+s(m+1/2))} (1 + |l - j/2^s|)^{-m}. \quad (13)$$

Точно такие же оценки справедливы при замене  $\psi_{j, n}$  на  $\phi_{j, n_0}$  или  $\psi_{l, n}$  на  $\phi_{l, n_0}$ .

**Доказательство.** В дальнейшем константы, не зависящие от  $k$  (возможно различные!), будем обозначать одним символом  $C$ . Рассмотрим функцию

$$\mu_{j,n}(x) = \int_a^b K(x, y)\psi_{j,n}(y)dy.$$

Пусть  $x \in [x_i^n, x_{i+1}^n]$ . В силу аппроксимационных свойств пространств сплайнов [5], финитности  $\psi_{j,n}$  и оценок (9) найдется такая функция  $\nu(y) \in S(\Delta_{n-1}, m-1, 1)$ , что  $\max_{x \in \text{supp}\psi_{j,n}} |K(x, y) - \nu(y)| \leq C(1 + |j - i|)^{-m}$ . Но  $\psi_{j,n}$  ортогональна  $S(\Delta_{n-1}, m-1, 1)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} |\mu_{j,n}(x)| &\leq \int_a^b |K(x, y) - \nu(y)| |\psi_{j,n}(y)| dy \leq C(1 + |j - i|)^{-m} \int_a^b |\psi_{j,n}(y)| dy \leq \\ &\leq C2^{-n/2}(1 + |j - i|)^{-m}, \quad x \in [x_i^n, x_{i+1}^n]. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, y)\psi_{j,n}(y)\psi_{l,n}(x)dx dy \right| \leq \int_a^b |\mu_{j,n}(x)| |\psi_{l,n}(x)| dx \leq C2^{-n}(1 + |l - j|)^{-m},$$

и оценка (12) установлена. Оценка (13) устанавливается аналогично.

Теорема доказана.  $\square$

Из теоремы следует, что матрица системы (11) является псевдоразреженной, т. е. в ней очень много малых по модулю элементов.

### 3. Моделирование тонкопроволочных антенн

Рассматривается система вертикальных электрически тонких круглоцилиндрических проводников (рис. 1). Задача состоит в отыскании функции распределения тока по проводникам при заданном возбуждении системы. Необходимо решить следующее уравнение Поплингтона:

$$E(l) = \int_L i[\omega\mu_0 G(l, l') - \frac{1}{\omega\epsilon_0} \frac{\partial^2 G(l, l')}{\partial l \partial l'} I(l')] dl', \quad (15)$$

где

$$G(l, l') = \frac{e^{-i\beta R(l, l')}}{R(l, l')}, \quad R(l, l') = \sqrt{|\mathbf{r}(l) - \mathbf{r}(l')|^2 + a^2(l)}.$$

В уравнении (15)  $L$  — контур, образованный совокупностью осей проводников;  $l, l'$  — координата, отсчитываемая вдоль  $L$ ;  $E$  — заданная функция распределения стороннего поля ( $z$ -составляющая), возбуждающего систему;  $I$  — искомая функция распределения осевого тока;  $G$  — функция Грина;  $\mathbf{r}(l)$  — радиус-вектор точки на  $L$ ;  $a(l)$  — радиус проводника в сечении  $l$ ;  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число;  $\omega = \frac{6\pi 10^8}{\lambda}$  — круговая частота;

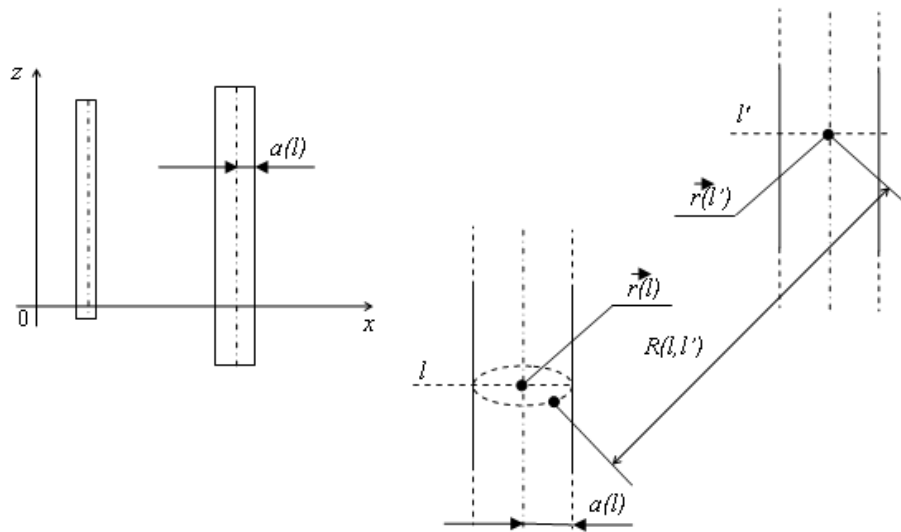


Рис. 1. Система проводников

$\lambda$  — длина волны;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  — магнитная постоянная;  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-7}$  — электрическая постоянная. Один из проводников рассматривается в качестве активного вибратора. В среднем его сечении на контуре  $L$  выделяется короткий отрезок, на котором задается сторонний кусочно-синусоидальный ток (физически такой локальный источник соответствует зазору вибратора, к которому подключается фидер). Функция  $E$  определяется по формуле

$$E(l) = -30i \left[ G(l, l_1) - 2 \cos \frac{|l_2 - l_1|}{2} G(l_1, \frac{l_2 + l_1}{2}) + G(l, l_2) \right].$$

С целью удобства физической интерпретации при тестировании в качестве окончательной характеристики предлагается использовать диаграмму направленности (ДН) — функцию угловых сферических координат, описывающую распределение поля излучения на сфере весьма большого радиуса (много большего размеров исследуемой системы).

В данном случае ненормированная комплекснозначная ДН определяется по формуле

$$f(\theta, \varphi) = \sin \theta \int_L I(l) \exp\{i\beta \mathbf{r}(l) \boldsymbol{\nu}(\theta, \varphi)\} dl, \quad (16)$$

где  $\boldsymbol{\nu}$  — орт направления излучения.

Нормировка ДН выполняется к своему максимуму:

$$F(\theta, \varphi) = \frac{f(\theta, \varphi)}{\max Am(f)}. \quad (17)$$

В конечном итоге практический интерес представляет амплитудная ДН  $Am(F)$ .

Вычислительный эксперимент проводился на системе Уда—Яги с пятью проводниками одинакового радиуса (рис. 2). Длина волны 4 м. Вертикальные размеры проводников (слева направо): 2, 2, 1.8, 1.72 и 1.64 м. Абсциссы проводников: 0.4, 1, 1.8, 2.8 и 3.7 м.

Радиусы проводников 0.01 м. Второй проводник слева — активный вибратор с зазором 0.04 м. Вся система обладает зеркальной симметрией относительно плоскости  $z = 0$ .

Проведено несколько экспериментов на PENTIUM-4-1700, нацеленных на изучение точности решения уравнения (15) при различных значениях  $k$ . Точность решения определялась на основе сравнений различий в диаграммах направленности при различных  $k$ .

Выяснено, что для обеспечения приемлемого вида решения и диаграммы направленности необходимо, чтобы интегрирование производилось по разбиению из более чем 3000 точек. Меньшее число точек не обеспечивает достаточную точность интегрирования ядра, что приводит к слишком большим погрешностям. Для малых значений  $k$  ( $k < 9$ ) добавляются дополнительные точки разбиения.

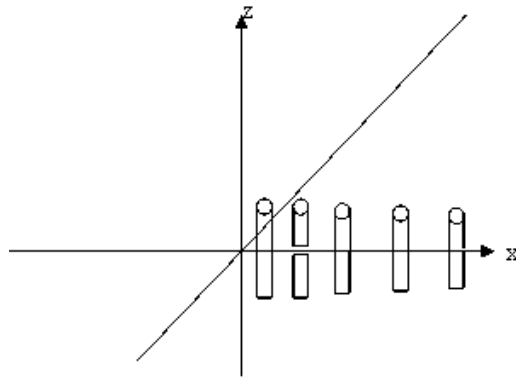


Рис. 2. Антенна Уда—Яги

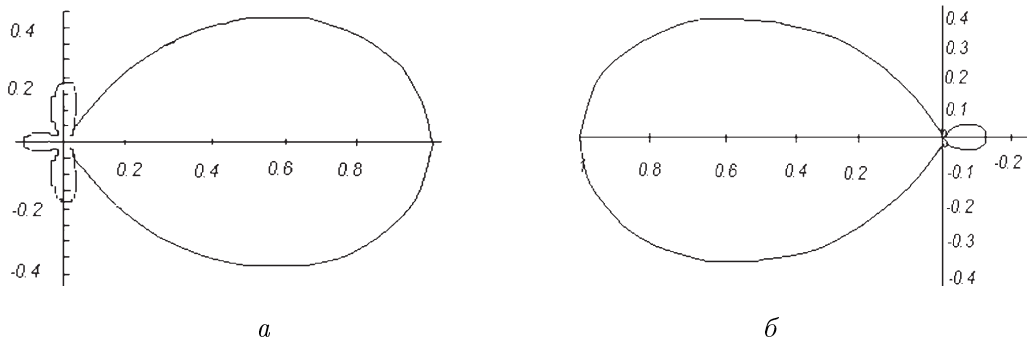


Рис. 3. Диаграммы направленности: при  $k = 6$ :  $a - \theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $b - \varphi = 0$

Т а б л и ц а 1. Заполненность матрицы, %

$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$
85.4	57.9	32.2	16.8	8.8	5.1

Т а б л и ц а 2. Время выполнения численного эксперимента, с

$\varepsilon$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$
0.001	7	16	39	95	232	395
0	7	21	73	340	1080	4800

Похожая на правильную диаграмма направленности получается при минимальном значении  $k = 6$ , число отрезков  $2^9 = 512$ , число точек в формуле Гаусса ( $p$ ) 6. Время счета 4 с, размер матрицы 64 кбайт. Барьер (т.е. число, для которого любое число, меньшее его по модулю, считается равным 0) выбран 0.001, число ненулевых элементов 4107 (из 4761 элементов, т.е. 86 %). При  $7 \leq k \leq 11$  диаграмма направленности существенным образом не меняется. Графики ДН приведены на рис. 3.

Заполненность матрицы можно видеть в табл. 1.

Система линейных алгебраических уравнений решалась методом сопряженных градиентов (после симметризации). Время выполнения при различных барьерах представлено в табл. 2.

## Список литературы

- [1] ВЛАТОВ И.А. On estimates of the inverse matrices elements for the Galerkin method for singular integral equation based on the spline wavelets // Proc. Intern. Conf. on Comp. Math. P. II. Novosibirsk, 2002. P. 356–361.
- [2] ДОВЕШИ И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 464 с.
- [3] БЛАТОВ И.А. Об алгебрах операторов с псевдоразреженными матрицами и их приложениях // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 36–59.
- [4] BEYLKIN G., COIFMAN R., ROCHLIN V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms // Comm. Pure. Appl. Math. 1991. Vol. 44. P. 141–183.
- [5] ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.Н., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1981.

*Поступила в редакцию 20 февраля 2008 г.*