Исследование математической модели сети случайного доступа с рекуррентным входящим потоком

Б. Е. Сейсенбеков
LEADER PRO GROUP Ltd, Prague, Czechia
e-mail: bolat_s@bk.ru

А. Н. Туенбаева
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
e-mail: tuenbaeva_aiya@mail.ru

A modified method is applied for an asymptotic analysis of Markovian systems aimed at investigation of a mathematical model for a casual access network. It results in a differential equation determining the asymptotic average meaning for a number of messages on a source of repeated calls. The formulas determining the probability distribution of service states are given.

Исследуем математическую модель сети случайного доступа [1]. В [2] рассмотрена математическая модель пакетной радиосети, используемой в системе видеонаблюдения для передачи цифровых данных, с потерей искаженных видеосигналов с рекуррентным входящим потоком. Анализ математической модели сети передачи данных по радиоканалу позволил определить предельные возможности рассматриваемого протокола доступа и получить аналитические выражения, определяющие зависимости для основных количественных характеристик качества функционирования обслуживающей системы, т. е. выразить их через величины, характеризующие входящий поток и обслуживающую систему.

Основным отличием рассматриваемой в данной статье модели от исследованной ранее в [2] является то, что заявки, попавшие в конфликт, не теряются, а переходят в источник повторных вызовов (ИПВ). Итак, построим математическую модель сети случайного доступа в виде системы массового обслуживания (СМО) с оповещением о конфликте, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок с функцией распределения $A(z)$. Заявка, заставшая прибор свободным, немедленно начинает обслуживаться. Продолжительность обслуживания случайная, имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_1. Если прибор занят, то обслуживаемая и обратившаяся к прибору заявки вступают в конфликт и переходят в ИПВ. От момента возникновения конфликта на приборе реализуется этап оповещения о конфликте, продолжительность которого имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_2. После завершения этапа оповещения о конфликте прибор вновь становится свободным. Все заявки в ИПВ осуществляют случайную задержку, после которой повторно обращаются к обслуживающему прибору. Время пребывания в ИПВ заявок имеет экспоненциальное распределение с параметром γ. Определим состояние СМО вектором $(k(t), i(t), z(t))$, где $k(t)$ — состояние прибора:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{прибор свободен,} \\ 1, & \text{прибор занят,} \\ 2, & \text{прибор в состоянии конфликта;} \end{cases}$$

$i(t)$ — число заявок в ИПВ; $z(t)$ — длина интервала от момента t до момента прихода следующего требования во внешнем входящем потоке.

Очевидно, процесс $(k(t), i(t), z(t))$ изменения состояний СМО во времени является марковским. Распределение вероятностей

$$P_k(i,z,t) = P(k(t) = k, i(t) = i, z(t) < z)$$

удовлетворяет следующей системе [3]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P_0(i,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P_0(i,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P_0(i,0,t)}{\partial z} - i\gamma P_0(i,z,t) + \mu_1 P_1(i,z,t) + \mu_2 P_2(i,z,t),\\
&\frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z} - (\mu_1 + i\gamma) P_1(i,z,t) + A(z)\frac{\partial P_0(i,0,t)}{\partial z} +\\
&+(i+1)\gamma P_0(i+1,z,t),\\
&\frac{\partial P_2(i,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P_2(i,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P_2(i,0,t)}{\partial z} - \mu_2 P_2(i,z,t) + A(z)\frac{\partial P_2(i-1,0,t)}{\partial z} +\\
&+A(z)\frac{\partial P_1(i-2,0,t)}{\partial z} + (i-1)\gamma P_1(i-1)\gamma P(i-1,z,t).
\end{aligned} \tag{1}$$

Решение $P_k(i,z,t)$ системы (1) достаточно полно определяет функционирование математической модели сети случайного доступа, однако точных аналитических методов решения такой системы не существует. Поэтому для исследования полученной системы предложен модифицированный метод асимптотического анализа марковизируемых систем [4].

В новых обозначениях

$$\gamma = \varepsilon, \quad t\varepsilon = \tau, \quad i\varepsilon = x, \quad \frac{1}{\varepsilon} P_k(i,z,t) = \pi_k(x,z,\tau,\varepsilon)$$

система (1) примет вид

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial \pi_0(x,z,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \pi_0(x,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial \pi_0(x,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - x\pi_0(x,z,\tau,\varepsilon) + \mu_1\pi_1(x,z,\tau,\varepsilon) +\\
&+\mu_2\pi_2(x,z,\tau,\varepsilon),\\
&\varepsilon\frac{\partial \pi_1(x,z,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \pi_1(x,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial \pi_1(x,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - (\mu_1 + x)\pi_1(x,z,\tau,\varepsilon) +\\
&+A(z)\frac{\partial \pi_0(x,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + (x+\varepsilon)\pi_0(x+\varepsilon,z,\tau,\varepsilon),\\
&\varepsilon\frac{\partial \pi_2(x,z,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \pi_2(x,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial \pi_2(x,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \mu_2\pi_2(x,z,\tau,\varepsilon) +\\
&+A(z)\tfrac{\partial \pi_2(x-\varepsilon,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + A(z)\frac{\partial \pi_1(x-2\varepsilon,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + (x-\varepsilon)\pi_1(x-\varepsilon,z,\tau,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{2}$$

В системе (2) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, полагая

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \pi_k(x,z,\tau,\varepsilon) = \pi_k(x,z,\tau), \quad k=\overline{0,2}.$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \pi_0(x,z,\tau)}{\partial z} - \frac{\partial \pi_0(x,0,\tau)}{\partial z} - x\pi_0(x,z,\tau) + \mu_1\pi_1(x,z,\tau) + \mu_2\pi_2(x,z,\tau) = 0,\\
&\frac{\partial \pi_1(x,z,\tau)}{\partial z} - \frac{\partial \pi_1(x,0,\tau)}{\partial z} - (x+\mu_1)\pi_1(x,z,\tau) + x\pi_0(x,z,\tau) + A(z)\frac{\partial \pi_0(x,0,\tau)}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial \pi_2(x,z,\tau)}{\partial z} - \frac{\partial \pi_2(x,0,\tau)}{\partial z} - \mu_2\pi_2(x,z,\tau) + x\pi_1(x,z,\tau) +\\
&+A(z)\left\{\frac{\partial \pi_1(x,0,\tau)}{\partial z} + \frac{\partial \pi_2(x,0,\tau)}{\partial z}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Решение $\pi_k(x,z,\tau)$ этой системы будем искать в виде

$$\pi_k(x,z,\tau) = R_k(z)\pi(x,\tau), \quad k=\overline{0,2}. \tag{3}$$

Функция $\pi_k(x,z,\tau)$ имеет смысл асимптотической плотности распределения величины нормированного числа $i\varepsilon$ заявок в ИПВ, а $R_k(z)$ — распределения вероятностей состояний прибора. Для функций $R_k(z)$ имеет место система уравнений

$$\begin{aligned}
&R_0'(z) - R_0'(0) - xR_0(z) + \mu_1R_1(z) + \mu_2R_2(z) = 0,\\
&R_1'(z) - R_1'(0) - (x+\mu_1)R_1(z) + xR_0(z) + A(z)R_0'(0) = 0,\\
&R_2'(z) - R_2'(0) - \mu_2R_2(z) + xR_1(z) + A(z)\left\{R_1'(0) + R_2'(0)\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Обозначив

$$\begin{aligned}
&R(z) = R_0(z) + R_1(z) + R_2(z),\\
&R'(0) = R_0'(0) + R_1'(0) + R_2'(0),
\end{aligned}$$

в системе (4) просуммировав все уравнения, получим

$$R'(z) - R'(0) + \left\{R_0'(0) + R_1'(0) + R_2'(0)\right\}A(z) = 0.$$

Откуда

$$R(z) = R'(0)\int_0^z (1-A(y))dy. \tag{5}$$

При $z\to\infty$ обозначим

$$\lim_{z\to\infty} R_k(z) = R_k. \tag{6}$$

Учитывая условие нормировки $\sum\limits_{k=0}^{2} R_k = 1$, из (5) получаем

$$R(z) = \frac{1}{a}\int_0^z (1-A(y))dy. \tag{7}$$

Здесь $a = \int\limits_0^\infty (1-A(y))dy$ — среднее значение длины интервала между моментами наступления событий входящего рекуррентного потока. Не нарушая общности, можно положить $a = 1$. Используя (7), одно из уравнений системы (4) можно исключить и переписать систему в виде

$$\begin{aligned} R_1'(z) &= (2x+\mu_1)R_1(z) + xR_2(z) + f_1(z), \\ R_2'(z) &= -xR_1(z) + \mu_2 R_2(z) + f_2(z), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(z) &= R_1'(0) + \{R_1'(0) + R_2'(0) - 1\} A(z) - xR(z), \\ f_2(z) &= R_2'(0) - \{R_1'(0) + R_2'(0)\} A(z). \end{aligned} \tag{9}$$

Выразим решение $R_1(z)$, $R_2(z)$ системы (8) через $R_1'(0)$, $R_2'(0)$. Для этого запишем характеристическое уравнение для однородной системы в виде

$$\alpha^2 - (2x + \mu_1 + \mu_2)\alpha + x^2 + 2x\mu_2 + \mu_1\mu_2 = 0.$$

Дискриминант уравнения имеет вид

$$(2x+\mu_1+\mu_2)^2 - 4(2x+\mu_1)\mu_2 - 4x^2 = \begin{cases} > 0, & \mu_1 > \mu_2,\ \mu_1 + 4x < \mu_2, \\ = 0, & \mu_1 = \mu_2,\ \mu_1 + 4x = \mu_2, \\ < 0, & \mu_1 < \mu_2 < \mu_1 + 4x. \end{cases}$$

Пусть характеристические числа $\alpha_1 \neq \alpha_2$, тогда функции $R_1(z)$ и $R_2(z)$ определяются как

$$\begin{aligned} R_1(z) &= C_1(z)V_1^{(1)}e^{\alpha_1 z} + C_2(z)V_1^{(2)}e^{\alpha_2 z}, \\ R_2(z) &= C_1(z)V_2^{(1)}e^{\alpha_1 z} + C_2(z)V_2^{(2)}e^{\alpha_2 z}. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь величины $V_1^{(k)}$ и $V_2^{(k)}$ являются решениями однородных систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &(2x+\mu_1-\alpha_k)V_1^{(k)} + xV_2^{(k)} = 0, \\ &-xV_1^{(k)} + (\mu_2 - \alpha_k)V_2^{(k)} = 0, \end{aligned}$$

следовательно, можно полагать

$$V_1^{(k)} = \mu_2 - \alpha_k, \quad V_2^{(k)} = x. \tag{11}$$

Функции $C_1(z)$ и $C_2(z)$ определяются системой

$$\begin{aligned} C_1'(z)V_1^{(1)}e^{\alpha_1 z} + C_2'(z)V_1^{(2)}e^{\alpha_2 z} &= f_1(z), \\ C_1'(z)V_2^{(1)}e^{\alpha_1 z} + C_2'(z)V_2^{(2)}e^{\alpha_2 z} &= f_2(z). \end{aligned}$$

Отсюда

$$C_1(z) = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\int_0^z e^{-\alpha_1 y}\left\{f_1(y) - \frac{\mu_2 - \alpha_2}{x} f_2(y)\right\} dy,$$

$$C_2(z) = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\int_0^z e^{-\alpha_2 y}\left\{\frac{\mu_2 - \alpha_1}{x} f_2(y) - f_1(y)\right\} dy,$$

поэтому из (10) и (11) получаем

$$
\begin{aligned}
&R_1(z)=\frac{\mu_2-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}e^{\alpha_1 z}\int\limits_0^z e^{-\alpha_1 y}\left\{f_1(y)-\frac{\mu_2-\alpha_2}{x}f_2(y)\right\}dy+\\
&+\frac{\mu_2-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}e^{\alpha_2 z}\int\limits_0^z e^{-\alpha_2 y}\left\{\frac{\mu_2-\alpha_1}{x}f_2(y)-f_1(y)\right\}dy,\\
&R_2(z)=\frac{x}{\alpha_2-\alpha_1}e^{\alpha_1 z}\int\limits_0^z e^{-\alpha_1 y}\left\{f_1(y)-\frac{\mu_2-\alpha_2}{x}f_2(y)\right\}dy+\\
&+\frac{x}{\alpha_2-\alpha_1}e^{\alpha_2 z}\int\limits_0^z e^{-\alpha_2 y}\left\{\frac{\mu_2-\alpha_1}{x}f_2(y)-f_1(y)\right\}dy.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Так как существуют пределы (6) и характеристические числа $\alpha_k>0$, выполняются следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty e^{-\alpha_1 y}\left\{f_1(y)-\frac{\mu_2-\alpha_2}{x}f_2(y)\right\}dy=0,\\
&\int\limits_0^\infty e^{-\alpha_2 y}\left\{\frac{\mu_2-\alpha_1}{x}f_2(y)-f_1(y)\right\}dy=0,
\end{aligned}
$$

которые в силу (9) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
&\{x\alpha_1+x\alpha_1^2a(\alpha_1)+(\mu_2-\alpha_2)\alpha_1^2a(\alpha_1)\}\,R_1'(0)+\\
&+\{x\alpha_1^2a(\alpha_1)+(\mu_2-\alpha_2)\alpha_1(\alpha_1a(\alpha_1)-1)\}\,R_2'(0)=x^2(1-\alpha_1)a(\alpha_1),\\
&\{x\alpha_2+x\alpha_2^2a(\alpha_2)+(\mu_2-\alpha_1)\alpha_2^2a(\alpha_2)\}\,R_1'(0)+\\
&+\{x\alpha_2^2a(\alpha_2)+(\mu_2-\alpha_1)\alpha_2(\alpha_2a(\alpha_2)-1)\}\,R_2'(0)=x^2(1-\alpha_2)a(\alpha_2),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $a(\alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha y}A(y)dy$.

Полученная неоднородная система (13) линейных алгебраических уравнений однозначно определяет зависимость величин $R_1'(0)$ и $R_2'(0)$ от x. Выполнив предельный переход $z\to\infty$ в равенствах (12), запишем

$$
\begin{aligned}
R_1&=\frac{\mu_2\{R_2'(0)-(1+x)R_1'(0)-2\}-x}{x^2+2x\mu_2+\mu_1\mu_2},\\
R_2&=\frac{(1+x)x-2xR_1'(0)+(\mu_1+x)R_2'(0)}{x^2+2x\mu_2+\mu_1\mu_2}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Суммируя уравнения системы (2) и полагая $z\to\infty$, получим

$$
\varepsilon\frac{\partial\pi(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{x\pi_1(x,\tau,\varepsilon)-x\pi_0(x,\tau,\varepsilon)+2\frac{\partial\pi_1(x,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial\pi_2(x,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\right\}+o(\varepsilon),
$$

где $\pi(x,\tau,\varepsilon)=\pi_0(x,\tau,\varepsilon)+\pi_1(x,\tau,\varepsilon)+\pi_2(x,\tau,\varepsilon)$.

Поделив это равенство на ε и учитывая, что при $\varepsilon \to 0$ $\pi_k(x,\tau,\varepsilon) \to \pi_k(x,\tau)$, получаем уравнение в частных производных, совпадающее с вырожденным уравнением Фоккера — Планка, относительно $\pi(x,\tau)$:

$$\frac{\partial \pi(x,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{x\pi_1(x,\tau) - x\pi_0(x,\tau) + 2\frac{\partial \pi_1(x,0,\tau)}{\partial z} + \frac{\partial \pi_2(x,0,\tau)}{\partial z}\right\}$$

или, учитывая (3),

$$\frac{\partial \pi(x,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\pi(x,\tau)\left[x(R_1 - R_0) + 2R_1'(0) + R_2'(0)\right]\right\}.$$

Отсюда

$$x'(\tau) = x\{2R_1 + R_2\} + 2R_1'(0) + R_2'(0) - x,$$

где R_1 и R_2 определены в (14), а $R_1'(0)$ и $R_2'(0)$ — в (13).

Таким образом, имеем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $x = x(\tau)$.

В результате исследования получено дифференциальное уравнение, определяющее асимптотическое среднее значение числа заявок в источнике повторных вызовов, приведены формулы, определяющие распределение вероятностей состояний прибора. Знание распределения вероятностей обеспечивает наиболее полное, в вероятностном смысле, описание функционирования модели, тем самым знание распределения состояний исследуемой сети дает возможность прогнозировать и контролировать случайные процессы, протекающие в сетях.

Список литературы

[1] Туенбаева А.Н. Компьютерные сети случайного доступа. Астана: Изд-во ЕНУ, 2006. 105 с.

[2] Назаров А.А., Туенбаева А.Н. Исследование математической модели системы видеонаблюдения с потерей искаженных видеосигналов при рекуррентном входящем потоке // Вест. Том. гос. ун-та. 2006. № 19. С. 156–157.

[3] Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания: Учеб. пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2005. 228 с.

[4] Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Поступила в редакцию 28 марта 2008 г.