Исследования СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции

А. А. Назаров, С. П. Моисеева
Томский государственный университет, Россия
e-mail: smoiseeva@mail.ru

А. С. Морозова
Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске, Россия
e-mail: annamo@asf.ru

For processes of the interest rates both marginal and joint probability distributions are found. It appears that these distributions belong to a class of the mixed distributions. And at the fixed values of a mixing random variable, the sample values of processes are independently distributed. Some results on these problems are formulated.

Введение

В классической теории массового обслуживания существует не так много моделей, исследование которых удается выполнить аналитическими методами и с помощью которых можно получить окончательные результаты в виде формул для вероятностно-временных характеристик исследуемых систем массового обслуживания. В то же время реальные системы, в которых наблюдаются эффекты повторных обращений заявок к обслуживающему прибору, требуют рассмотрения моделей, выходящих за рамки множества классических систем массового обслуживания. Исследование таких моделей выполняется, как правило, численными методами либо имитационным моделированием со всеми недостатками, вытекающими из этих методов. Альтернативным подходом является применение метода предельной декомпозиции для исследования таких систем.

1. Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок (рис. 1). Время обслуживания на каждом приборе имеет произвольную функцию распределения $B(x)$, одинаковую для всех приборов. Заявка, завершившая обслуживание, с вероятностью $1-r$ покидает систему, а с вероятностью r обращается к системе для повторного обслуживания.

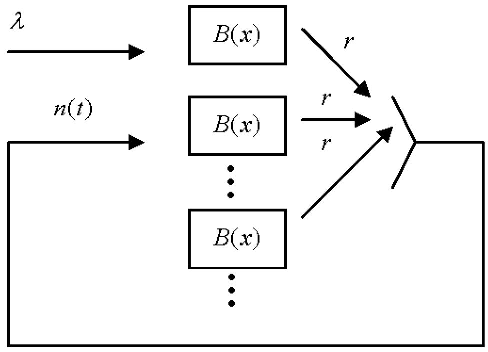

Рис. 1

Обозначим $n(t)$ — число повторных обращений, реализованных за время t. Тогда $P(n,t) = P\{n(t) = n\}$ — распределение вероятностей числа повторных обращений за время t.

Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа повторных обращений.

2. Метод предельной декомпозиции

Разделим входящий поток на N независимых простейших потоков с параметром λ/N. Заявки каждого потока направим для обслуживания на соответствующий прибор. Таким образом, получаем совокупность N однолинейных СМО. Будем полагать, что эти СМО с отказами (рис. 2).

При $N \to \infty$ суммарные характеристики совокупности N однолинейных СМО сходятся к характеристикам исходной модели. Таким образом, задача нахождения распределения вероятностей числа повторных обращений в СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов сводится к решению задачи нахождения распределения вероятностей числа повторных обращений в однолинейной СМО с отказами.

Введем следующие обозначения:

$k(t)$ — состояние прибора, $k(t) = \begin{cases} 0 - & \text{прибор свободен,} \\ 1 - & \text{прибор занят;} \end{cases}$

$z(t)$ — длина интервала от текущего момента времени t до момента окончания текущего обслуживания, если прибор занят, т. е. $k(t) = 1$;

$P_1(n,z,t) = P\{k(t) = 1, z(t) < z, n(t,N) = n\}$ — вероятность того, что число повторных обращений равно n, прибор занят и до конца обслуживания остается времени меньше z;

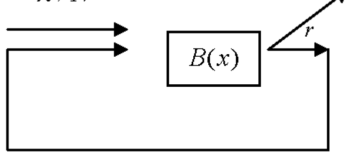

Рис. 2

$P_0(n,t) = P\{k(t) = 0, n(t,N) = n\}$ — вероятность того, что число повторных обращений равно n и прибор свободен.

Составим Δ-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова [1]

$$P_0(n,t+\Delta t) = P_0(n,t)(1-\frac{\lambda}{N}\Delta t) + (1-r)P_1(n,\Delta t,t) + o(\Delta t),$$

$$P_1(n,z-\Delta t,t+\Delta t) = P_1(n,z,t) - P_1(n,\Delta t,t) + \\ + P_1(n-1,\Delta t,t)rB(z) + \frac{\lambda}{N}P_0(n-1,t)\Delta t B(z) + o(\Delta t).$$

Откуда получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial P_0(n,t)}{\partial t} = \frac{(1-r)\partial P_1(n,0,t)}{\partial z} - \frac{\lambda}{N}P_0(n,t); \tag{1}$$

$$\frac{\partial P_1(n,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P_1(n,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(n,0,t)}{\partial z} + rB(z)\frac{\partial P_1(n-1,0,t)}{\partial z} + \frac{\lambda}{N}P_0(n-1,t)B(z). \tag{2}$$

Рассмотрим функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_0(n,t) = H_0(x,t),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_1(n,z,t) = H_1(x,z,t).$$

Тогда из (1), (2) следует, что $H_1(x,z,t)$, $H_0(x,t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial H_0(x,t)}{\partial t} = \frac{(1-r)\partial H_1(x,z,t)}{\partial z} - \frac{\lambda}{N}H_0(x,t),$$

$$\frac{\partial H_1(x,z,t)}{\partial t} - \frac{\partial H_1(x,z,t)}{\partial z} = (rxB(z)-1)\frac{\partial H_1(x,0,t)}{\partial z} + H_0(x,t)x\frac{\lambda}{N}B(z), \tag{3}$$

решение которой будем искать в виде

$$H_0(x,t) = 1 + \frac{1}{N}F_0(x,t) + o(N^{-2}); \tag{4}$$

$$H_1(x,z,t) = \frac{1}{N}F_1(x,z,t) + o(N^{-2}). \tag{5}$$

Тогда уравнения для $F_1(x,z,t)$, $F_0(x,t)$ имеют вид

$$\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial t} = \lambda - (1-r)h(x,t), \tag{6}$$

$$\frac{\partial F_1(x,z,t)}{\partial t} - \frac{\partial F_1(x,z,t)}{\partial z} = \lambda x B(z) + (rxB(z)-1)h(x,t), \tag{7}$$

где

$$h(x,t) = \frac{\partial F_1(x,0,t)}{\partial t}.$$

Решение дифференциального уравнения первого порядка в частных производных (3) определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dt}{1}=\frac{dz}{-1}=\frac{dF_1(x,z,t)}{\lambda xB(z)+(rxB(z)-1)h(x,t)},$$

общее решение которого можно записать в виде

$$F_1(x,z,t)=\Phi(C_1)+\int\limits_0^t\left[\lambda xB(C_1-s)+(rxB(C_1-s)-1)h(x,s)\right]ds,$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция, а C_1 вычисляется из равенства

$$z=C_1-t.$$

Для определения частного решения необходимо воспользоваться начальными условиями. Получаем

$$F_1(x,z,0)=R_1(z)=\Phi(C_1)=\frac{\lambda}{1-r}\int\limits_0^z(1-B(y))dy,$$

$$F_0(x,0)=R_0=\frac{\lambda b}{1-r}.$$

Таким образом, частное решение принимает вид

$$F_1(x,z,t)=\frac{\lambda}{1-r}\int\limits_0^{z+t}(1-B(y))dy+\int\limits_0^t\left[\lambda xB(z+t-s)+(rxB(z+t-s)-1)h(x,s)\right]ds.$$

Дифференцируя это тождество по z в нуле, получаем интегральное уравнение

$$h(x,t)=\frac{\lambda}{1-r}+\left(\lambda x-\frac{\lambda}{1-r}\right)B(t)+rx\int\limits_0^t b(t-s)h(t,s)ds.$$

Решить интегральное уравнение можно через преобразования Фурье в виде

$$\varphi(\alpha)=\frac{\lambda}{1-r}(x-1)\frac{B^*(\alpha)}{1-rxB^*(\alpha)},$$

где

$$\int\limits_0^\infty e^{j\alpha t}b(t)dt=B^*(\alpha),$$

$$\int\limits_0^\infty\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}e^{j\alpha t}dt=\varphi(\alpha).$$

Подставляя решение интегрального уравнения в (6), (7), при $z \to \infty$ имеем

$$F_0(x,t) = -\frac{\lambda}{1-r} - \lambda t + (1-r)\int_0^t h(x,s)ds,$$

$$F_1(x,t) = \frac{\lambda b}{1-r} + \lambda x t + (rx-1)\int_0^t h(x,s)ds.$$

Откуда $F(x,t) = F_1(x,t) + F_0(x,t) = (x-1)\lambda t + (x-1)\int_0^t h(x,s)ds$.

Учитывая (4), (5), получаем выражение для производящей функции числа повторных обращений в рассматриваемой СМО:

$$G(x,t) = \exp\{F(x,t)\} = \exp\left\{(x-1)\lambda t + (x-1)\int_0^t h(x,s)ds\right\}.$$

В случае экспоненциального времени обслуживания имеем производящую функцию в виде

$$G(x,t) = \exp\left\{\lambda t\frac{x-1}{1-rx}t - \frac{\lambda r}{\mu(1-r)}\frac{(x-1)^2}{(1-rx)^2}\left(1-e^{-\mu(1-rx)t}\right)\right\}.$$

Это выражение совпадает с ранее полученными результатами для бесконечнолинейных систем массового обслуживания с повторным обращением и экспоненциальным временем обслуживания [2].

Список литературы

[1] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969.

[2] Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследование потока обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 7. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. С. 36–41.

Поступила в редакцию 28 марта 2008 г.