Вычислительные технологии **Том 13, Специальный выпуск 5, 2008**

Фильтрация состояний динамических объектов при наблюдении разности векторов состояния с ошибками с ограниченными дисперсиями

М. Н. Егоров, Р. Т. Якупов
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске, Россия
e-mail: yrt@asf.ru

A problem of estimation for two dynamic object state vectors is considered using an observation of difference between state vectors with bounded variances of errors. The minimax approach to a solution of this problem is proposed.

Пусть имеется два динамических объекта, которые движутся таким образом, что на некотором отрезке времени $[t_0, T]$ наблюдаются разности векторов состояния объектов с ошибками, дисперсии которых ограничены. На каждом из объектов имеется набор измерительных приборов, по данным которых получаются оценки векторов состояния. Ошибки этих оценок описываются линейными стохастическими дифференциальными уравнениями. Объединим векторы ошибок оценивания в один вектор x, который удовлетворяет линейному стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx = A(t)xdt + G(t)dw, \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

где расширенный вектор начального состояния x^0 имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу P^0,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}, \quad P^0 = \begin{pmatrix} P_1^0 & 0 \\ 0 & P_2^0 \end{pmatrix},$$

векторы x_1, x_2 имеют размерность n, векторы w_1, w_2 имеют размерность m; w — векторный стандартный винеровский процесс. Из наблюдений разности векторов состояния объектов исключим оценки, полученные с использованием данных измерительных приборов. Тогда наблюдения разности векторов состояния примут вид

$$z(t) = x_1(t) - x_2(t) + y(t) = Hx(t) + y(t), \tag{2}$$

где $H = (I, -I)$; y — ошибка наблюдения с нулевым математическим ожиданием. Дисперсии компонентов вектора y предполагаются ограниченными:

$$E\{y_i^2(t)\} \le d_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Корреляционные характеристики процесса $y(t)$ предполагаются неизвестными. В этом случае для оценивания вектора $x(t)$ не удается использовать стандартные подходы [1].

В случае детерминированных функций $y(t)$ при наличии ограничений на их величины можно использовать минимаксный подход, аналогичный тому, который описан в [2] для дискретных объектов. Все случайные процессы и векторы считаются распределенными по нормальному закону. Процесс $y(t)$ не коррелирует с винеровским процессом $w(t)$. Оценку вектора состояния x построим с помощью линейного фильтра:

$$d\hat{x} = A(t)\hat{x}dt + K(t)[z(t) - H\hat{x}(t)]dt, \quad \hat{x}(t_0) = 0, \tag{3}$$

где K — пока не определенная весовая матрица фильтра. Ошибка фильтрации $\tilde{x} = x - \hat{x}$ согласно (1)–(3) описывается уравнением

$$d\tilde{x} = [A(t) - K(t)H]\tilde{x}dt + G(t)dw - K(t)y(t)dt, \quad \tilde{x}(t_0) = x^0. \tag{4}$$

Представим $\tilde{x}$ в виде суммы $\tilde{x} = \xi + \eta$, где ξ и η удовлетворяют уравнениям

$$d\xi = \tilde{A}(t)\xi dt + G(t)dw, \quad \xi(t_0) = x^0; \tag{5}$$

$$d\eta = \tilde{A}(t)\eta dt - K(t)y(t)dt, \quad \eta(t_0) = 0. \tag{6}$$

В (5) и (6) для удобства введено обозначение

$$\tilde{A}(t) = A(t) - K(t)H.$$

Заметим, что процессы ξ и η являются некоррелированными. Ковариационные матрицы процессов $\tilde{x}(t)$, $\xi(t)$, $\eta(t)$ обозначим $P(t)$, $\Xi(t)$, $\bar{P}(t)$ соответственно. Фундаментальную матрицу, связанную с дифференциальным уравнением (6), обозначим $\Phi(t,s)$, т. е.

$$\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial t} = \tilde{A}(t)\Phi(t,s), \quad \Phi(s,s) = I.$$

Тогда

$$\eta(t) = -\int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)K(s)y(s)ds.$$

Ковариационная матрица вектора $\eta(t)$ равна

$$\bar{P}(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)K(s)R(s,s')K^T(s')\Phi^T(t,s')dsds', \tag{7}$$

где $R(s,s') = E\{y(s)y^T(s')\}$ — корреляционная матрица процесса y. Ковариационная матрица вектора $\xi(t)$ описывается уравнением [3]

$$\dot{\Xi} = \tilde{A}(t)\Xi + \Xi\tilde{A}^T + G(t)G^T(t), \quad \Xi(t_0) = P^0. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) имеет вид

$$\Xi(t) = \Phi(t,t_0)P^0\Phi^T(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)G(s)G^T(s)\Phi^T(t,s)ds. \tag{9}$$

Так как процессы ξ и η не коррелированы, ковариационная матрица вектора $\tilde{x}(t) = \xi(t) + \eta(t)$ равна

$$P(t) = \Xi(t) + \bar{P}(t).$$

Определим функцию риска, связанную с ошибкой оценивания вектора x, следующим образом:

$$F[P] = tr\left[LP(T)L^T\right] = tr\left[L^T LP(T)\right]. \quad (10)$$

Весовую матрицу фильтра K найдем из условия

$$\min_K \max_{R(s,s')} F[P]. \quad (11)$$

Так как Ξ от $R(s,s')$ не зависит, задачу (11) можно записать так:

$$\min_K \left\{ tr[L\Xi(T)L^T] + \max_{R(s,s')} tr[L\bar{P}L^T] \right\}, \quad (12)$$

$$R_{ii}(s,s) \le d_i, \quad i = \overline{1,n};\ s \in [t_0, T]. \quad (13)$$

Нетрудно показать с учетом (7), что ограничение (13) равносильно ограничению

$$R_{ii}(s,s) = d_i, \quad i = \overline{1,n};\ s \in [t_0, T]. \quad (14)$$

В общем случае задача (12), (14) весьма сложная. Для ее упрощения далее предположим, что компоненты вектора $y(t)$ являются взаимно некоррелированными марковскими процессами с корреляционными функциями

$$R_{ii}(s,s') = d_i e^{-\alpha_i|s-s'|}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Учитывая, что

$$\frac{dR_{ii}(s,s')}{d\alpha_i} = -d_i|s-s'|e^{-\alpha_i|s-s'|} \le 0, \quad i = \overline{1,n},$$

легко убедиться в том, что функция риска монотонно убывает по $\alpha_i \ge 0$, $i = \overline{1,n}$. Поэтому максимум $tr[L\bar{P}(T)L^T]$ по $\alpha_i \ge 0$, $i = \overline{1,n}$, достигается при $\alpha_i = \alpha_i^* = 0$, $i = \overline{1,n}$, и задача (12), (14) принимает вид

$$\min_K \{tr[L\Xi(T)L^T] + tr[L\bar{P}^*(T)L^T]\}, \quad (15)$$

где

$$\bar{P}^*(T) = \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} \Phi(T,s)K(s)DK^T(s')\Phi^T(T,s')ds ds', \quad (16)$$

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Задача (15), в которой $\Xi(T)$ и $\bar{P}^*(T)$ вычисляются по формулам (9) и (16), а матрица $\Phi(T,s)$ зависит от весовой матрицы фильтра K, является вариационной. Если записать дифференциальные уравнения для $\Xi(T)$ и $\bar{P}^*(T)$, ее можно интерпретировать как задачу оптимального управления, в которой K выступает как матричная управляющая переменная. Рассмотрим случай, когда весовая матрица фильтра ищется в классе постоянных матриц и матрица динамики A является постоянной. В этом случае фундаментальная матрица

$$\Phi(t,s) = e^{(A-KH)(t-s)};$$

$$\bar{P}^*(T) = \int\limits_{t_0}^{T} e^{(A-KH)(T-s)}ds\, KDK^T \int\limits_{t_0}^{T} e^{(A-KH)^T(T-s)}ds;$$

$$\Xi(T) = e^{(A-KH)(T-t_0)}P^0 e^{(A-KH)^T(T-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{T} e^{(A-KH)(T-s)}G(s)G^T(s)e^{(A-KH)^T(T-s)}ds.$$

Если G — постоянная матрица и при $T\to\infty$ существуют установившиеся значения $\bar{P}^*$ и Ξ, то для $P(\infty) = \lim\limits_{T\to\infty} P(T)$ получаем формулу

$$P(\infty) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{(A-KH)t}GG^T e^{(A-KH)^T t}dt + \int\limits_{0}^{\infty} e^{(A-KH)t}dt\, KDK^T \int\limits_{0}^{\infty} e^{(A-KH)^T t}dt. \tag{17}$$

В случае скалярных объектов с идентичными характеристиками, когда

$$A = \mathrm{diag}(-a;-a), \quad GG^T = \mathrm{diag}(q;q), \quad D = d, \quad K = (k;-k)^T, \quad H = (1;-1),$$

ковариационную матрицу $P(\infty)$ удается вычислить аналитически. В этом случае

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = -a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad KH = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} = kM, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

матрицы A и KH коммутируют, поэтому [4]

$$e^{(A-KH)t} = e^{At}e^{-KHt}, \quad e^{At} = e^{-at}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проделаем следующие выкладки:

$$e^{-KHt} = I - KHt + \frac{1}{2!}(KH)^2t^2 - \frac{1}{3!}(KH)^3t^3 + \dots =$$

$$= I - ktM + \frac{2(kt)^2}{2!}M - \frac{2^2(kt)^3}{3!}M + \dots = I + \frac{1}{2}M\left[-(2kt) + \frac{(2kt)^2}{2!} - \frac{(2kt)^3}{3!} + \dots\right] =$$

$$= I - \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}Me^{-2kt} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}e^{-2kt}.$$

Для матричной экспоненты получаем формулу

$$e^{(A-KH)t} = \frac{1}{2}e^{-at}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}e^{-(a+2k)t}.$$

Вычислим следующие интегралы:

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{(A-KH)t}dt = \frac{1}{2a}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2(a+2k)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\infty e^{(A-KH)t}GG^T e^{(A-KH)^T t}dt = q\left[\frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4(a+2k)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

$$\int_0^\infty e^{(A-KH)t}dt\, KDK^T \int_0^\infty e^{(A-KH)^T t}dt = \frac{k^2 d}{(a+2k)^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$P(\infty) = \frac{q}{4a}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \left[\frac{k^2 d}{(a+2k)^2} + \frac{q}{4(a+2k)}\right]\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Заметим, что эта формула справедлива в случае, когда записанные выше интегралы сходятся, т. е. в случае $a + 2k > 0$. Возьмем в качестве функции риска

$$P_{11}(\infty) = \frac{q}{4a} + \left[\frac{k^2 d}{(a+2k)^2} + \frac{q}{4(a+2k)}\right]. \tag{19}$$

При $d > \dfrac{q}{2a}$ существует минимум функции риска, который можно найти, приравняв нулю производную $P_{11}(\infty)$ по k:

$$k^* = \frac{qa}{2(2ad - q)}.$$

При $d \le \dfrac{q}{2a}$ экстремума нет, однако существует инфимум, равный $\lim\limits_{k\to\infty} P_{11}(\infty) = \dfrac{d}{4}$. Фильтр с бесконечным весовым коэффициентом невозможно реализовать. В этом случае для регуляризации задачи можно к ошибке наблюдения $y(t)$ добавить фиктивную очень высокочастотную составляющую с малой интенсивностью r. Это приведет к тому, что вместо (18) получим формулу

$$P(\infty) = \frac{q}{4a}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \left[\frac{k^2 d}{(a+2k)^2} + \frac{q}{4(a+2k)} + \frac{k^2 r}{2(a+2k)}\right]\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формула (19) изменится следующим образом:

$$P_{11}(\infty) = \frac{q}{4a} + \left[\frac{k^2 d}{(a+2k)^2} + \frac{q}{4(a+2k)} + \frac{k^2 r}{2(a+2k)}\right].$$

Экстремум этой функции существует и находится как решение уравнения

$$4k^3 r + 6k^2 ar + 2k(a^2 r + 2ad - q) - qa = 0.$$

Так как коэффициенты при второй и третьей степени k положительны, всегда существует корень этого уравнения в области $k > 0$.

Список литературы

[1] Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 496 с.

[2] Егоров М.Н., Якупов Р.Т. Минимаксная модель в задаче фильтрации для дискретных динамических систем при наблюдении разностей их векторов состояния // Вест. Том. гос. ун-та. Приложение № 19. Декабрь 2006. С. 148–153.

[3] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.

[4] Математические основы теории автоматического регулирования. Т. 1 / Под ред. Б.К. Чемоданова. М.: Высш. шк., 1977. 366 с.

Поступила в редакцию 28 марта 2008 г.