Вычислительные технологии **Том 13, Специальный выпуск 5, 2008**

О стохастических нелинейных моделях динамики процентных ставок

Г. А. Медведев
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: `MedvedevGA@bsu.by`

For processes of the interest rates both marginal and joint probability distributions are found. It appears that these distributions belong to a class of the mixed distributions. And at the fixed values of a mixing random variable, the sample values of processes are independently distributed. Some results on these problems are formulated.

Будем рассматривать такие случайные процессы процентных ставок $r(t)$, которые допускают существование стационарного режима со стационарным математическим ожиданием $E[r(t)] = E$ и стационарной дисперсией $\mathrm{Var}[r(t)] = V$. В классическом анализе обычно предполагается, что процентная ставка доходности финансовых активов имеет нормальное или логарифмически нормальное распределение с однородными по времени независимыми приращениями и стационарными параметрами.

Наиболее известной моделью динамики такой процентной ставки $r(t)$ является модель Васичека [1] (модель с нормальным распределением), когда процесс $r(t)$ порождается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dr(t) = k(E - r(t))dt + \sqrt{2kV}dW(t).$$

Смысл параметра k разъясняется ниже, а $dW(t)$ — стандартный винеровский процесс. Однако выборочные характеристики соответствующих временных рядов оказываются часто несовместимыми с характеристиками процесса $r(t)$ такой модели. Одно из важных отличий — то, что эмпирические распределения изменения процентной ставки часто в большей степени “островершинные”, асимметричные и имеют тяжелые правые хвосты, что несовместимо с нормальным распределением. Кроме того, рыночная процентная ставка положительная, а нормальное распределение определено на всей числовой оси. Устранить эти несоответствия пытались двумя различными способами.

Первый хотя и предполагал независимые приращения и предположения стационарности, но заменял предположение о нормальности более общим предположением о распределениях, устойчивых в смысле Парето — Леви. Хотя негауссовы члены устойчивого семейства распределений аппроксимируют хвосты эмпирических распределений лучше, чем нормальное, эмпирическое подтверждение пока еще слабое, чтобы обосновать принятие устойчивости Парето относительно какого-либо островершинного распределения. Помимо этого, свойство бесконечности дисперсии негауссовых устойчивых распределений подразумевает, что большинство наших статистических методов, которые основаны на конечности моментов (например, метод наименьших квадратов), бесполезно. Гипотеза устойчивости Парето также подразумевает, что даже первый момент изменения цен не существует. Отсутствие теории делает разработку требований к рассматриваемой модели при гипотезе устойчивости по Парето довольно сложной. Значительные теоретические и эмпирические трудности, связанные с гипотезой устойчивости Парето, побуждают рассматривать другие процессы с конечными моментами, чьи распределения не являются гауссовыми. Кроме того, обширная математическая литература по распределениям этих процессов и свойствам конечности моментов делает реализацию проверки гипотез значительно проще для таких процессов, чем для устойчивых процессов Парето — Леви.

Особенность стохастических моделей динамики процентных ставок состоит в том, что кроме прочего они должны порождать неотрицательные процессы. Модель Блэка — Карасинского [2] (логарифмически нормальная модель), когда процентная ставка порождается диффузионным процессом

$$dr(t) = kr(t)\ln\left[\frac{E}{r(t)}\sqrt{1+\frac{V}{E^2}}\right]dt + r(t)\sqrt{2k\ln\left[1+\left(\frac{V}{E^2}\right)\right]}dW(t),$$

генерирует неотрицательный процесс с несколько более островершинной плотностью вероятностей, чем нормальная. Однако правый хвост логарифмически нормальной плотности недостаточно тяжелый для описания реальных рыночных ставок (она чаще используется для описания процессов цен акций).

К настоящему времени наиболее известными моделями процессов процентных ставок являются модели, построенные на основе случайных процессов Бесселя. Приведем две из них:

модель Кокса — Ингерсолла — Росса (*модель CIR*) [3]

$$dr(t) = k(E - r(t))dt + \sqrt{2kV\frac{r(t)}{E}}dW(t); \tag{1}$$

модель Ана — Гао (*модель AG*) [4]

$$dr(t) = k\left(E + \frac{V}{E} - r(t)\right)r(t)dt + \frac{\sqrt{2kVr(t)^3}}{E}dW(t). \tag{2}$$

Здесь процесс $r(t)$ моделирует динамику процентной ставки; $dW(t)$ — стандартный винеровский процесс, а параметры уравнений (1) и (2) имеют следующий смысл: E — стационарное среднее и V — стационарная дисперсия процесса $r(t)$, а положительный параметр k определяет корреляционные свойства процесса $r(t)$ в обоих случаях таким образом, что коэффициент корреляции ρ случайных величин $r(t)$ и $r(t+\tau)$ равен $\rho = \exp(-k|\tau|)$ для процесса, определяемого уравнением (1), и $\rho = \exp(-k(E+V/E)|\tau|)$ для процесса, определяемого уравнением (2). Введем обозначения: $g(x|q,c) \equiv \dfrac{c^q x^{q-1}}{\Gamma(q)}e^{-cx}$ — плотность вероятностей гамма-распределения с параметром формы q и параметром масштаба c, $x \geq 0$; если $X \sim g(x|q,c)$, то $E[X] = q/c$, $\mathrm{Var}[X] = q/c^2$; $p(j|\lambda) \equiv \lambda^j e^{-\lambda}/j!$ — пуассоновское распределение вероятностей с параметром $\lambda > 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$; если $J \sim p(j|\lambda)$, то $E[J] = \mathrm{Var}[J] = \lambda$; $b(j|q,b) \equiv \dfrac{\Gamma(q+j)}{j!\Gamma(q)}b^j(1-b)^q$ — отрицательное биномиальное распределение вероятностей с параметрами $q > 0$, $b \in (0,1)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$; если $J \sim b(j|q,b)$, то $E[J] = qb/(1-b)$, $\mathrm{Var}[J] = qb/(1-b)^2$; $h(x|q,c) \equiv$

$\dfrac{c^{q+1}}{\Gamma(q+1)x^{q+2}}e^{-c/x}$ — плотность вероятностей для $x \geq 0$ с параметрами q и c, такими, что при $X \sim h(x|q,c)$, $E[X] = c/q$, $\mathrm{Var}[X] = c^2/(q-1)q^2$. Ниже для краткости случайные величины и их возможные значения обозначаются одинаковыми символами.

Утверждение 1. Маргинальные плотности вероятностей процессов (1) и (2) определяются соответственно функциями $g(x|q,c)$ и $h(x|q,c)$, причем параметры этих плотностей вычисляются по формулам $c = E/V$, $q = E^2/V$ для плотности g и $c = E(1 + E^2/V)$, $q = 1 + E^2/V$ для плотности h.

Уравнения (1) и (2) порождают процессы с неотрицательными значениями, причем, как мы увидим ниже, распределение процесса (2) обладает более тяжелым правым хвостом, чем распределение процесса (1). С практической точки зрения это более привлекательно, поскольку большинство стохастических моделей динамики показателей финансового рынка обычно критикуют за то, что они имеют правые хвосты распределений, спадающие быстрее, чем хвосты оценок плотностей по реальным финансовым показателям. Сравнительный анализ плотностей $g(r)$ и $h(r)$ можно провести с помощью отношения этих плотностей для одинаковых стационарных математического ожидания E и дисперсии V:

$$\frac{h(r)}{g(r)} = \left[\frac{V+E^2}{r^2}\right]^{1+E^2/V} \exp\left[\frac{Er}{V} - \frac{E}{r}\left(1+\frac{E^2}{V}\right)\right].$$

Это отношение является функцией со следующими особенностями:

$$\lim_{r\to 0}\frac{h(r)}{g(r)} = 0, \lim_{r\to\infty}\frac{h(r)}{g(r)} = \infty.$$

Имеется два экстремума: максимум в точке $r_{\max} = \dfrac{E}{1+1/\sqrt{1+E^2/V}} < E$ и минимум в точке $r_{\min} = \dfrac{E}{1-1/\sqrt{1+E^2/V}} > E$. Это означает, что на интервалах $(0, r_{\max})$ и $(r_{\min}, \infty)$ отношение возрастает, а на интервале $(r_{\max}, r_{\min})$ оно убывает. Так что у плотности $g(r)$ тяжелее левый хвост, а правый хвост тяжелее у плотности $h(r)$. Кроме того, при $r = E$ имеем $h(E)/g(E) = (1 + V/E^2)^{(1+E^2/V)}/e$. Поэтому $h(E)/g(E) \approx 1$ при $E^2/V \gg 1$, что обычно выполняется на практике. Например, для типичных рыночных значений средней годовой процентной ставки доходности и ее дисперсии для краткосрочных (один месяц) ценных бумаг Казначейства США в 1991–1998 гг. было $E = 0.08$, $V = 0.0016$, $E^2/V = 4$. Так что функции $g(r)$ и $h(r)$ пересекаются в окрестности точки $r = E$.

Следствие 1. Начальные моменты стационарных распределений процессов (1) и (2) вычисляются по формулам:

для процесса (1)

$$E[r^k] = \left(\frac{V}{E}\right)^k \frac{\Gamma(k+E^2/V)}{\Gamma(E^2/V)};$$

для процесса (2)

$$E[r^k] = E^k\left(1+\frac{E^2}{V}\right)^k \frac{\Gamma(2-k+E^2/V)}{\Gamma(2+E^2/V)}.$$

Таким образом, для процесса (1) существуют моменты любого порядка. Однако для процесса (2) это не так: момент порядка k существует только для $k < 2 + E^2/V$. Этого можно было ожидать, поскольку плотность вероятностей процесса (2) имеет тяжелый правый хвост. Заметим, что математическое ожидание и дисперсия процесса (2) существуют гарантированно. На практике обычно отношение E^2/V достаточно велико, так что, как правило, существуют как третьи, так и четвертые моменты распределения $h(r)$. Представляет интерес провести сравнительный анализ асимметрии и эксцесса процессов, моделирующих динамику процентной ставки. Обозначим для краткости записи: $a = E^2/V$, $\omega = 1+1/a$. Тогда асимметрия и эксцесс для рассмотренных процессов выражаются следующим образом: нормальный — 0 и 3; гамма-процесс — $2/\sqrt{a}$ и $3/(1+2/a)$; модель AG — $4\sqrt{a}/(a-1)$ и $3(a^2+7a)/(a^2-3a+2)$; логнормальный — $(3+1/a)/\sqrt{a}$ и $\omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 3$. Из вычислений становится ясным, что плотность вероятностей для модели AG при одинаковых среднем и дисперсии обладает наибольшей асимметрией и наибольшим эксцессом. Таким образом, эта модель оказывается наиболее подходящей для моделирования процессов изменения финансовых рыночных показателей. Интересно заметить, что с увеличением отношения $a = E^2/V$ плотности вероятностей всех моделей приближаются к нормальной. Вместе с тем сама нормальная плотность при этом приближается к дельта-функции.

Утверждение 2. Условные плотности вероятностей $f(r,t|R,s)$, где обозначено $r = r(t)$, $R = r(s)$, $s < t$, определяются в виде смеси распределений:

для процесса (1)

$$f(r,t|R,s) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{u^j}{j!}\right] e^{-u} \frac{c^{q+j} r^{q+j-1}}{\Gamma(q+j)} e^{-cr} = \sum_{j=0}^{\infty} p(j|u) g(r|q+j,c), \quad r \geq 0, \tag{3}$$

где $u = \dfrac{\rho E R}{V(1-\rho)}$, $c = \dfrac{E}{V(1-\rho)}$, $q = \dfrac{E^2}{V}$, $\rho = \exp\left[-k(t-s)\right]$;

для процесса (2)

$$f(r,t|R,s) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{u^j}{j!}\right] e^{-u} \frac{c^{q+j+1} r^{-q-j-2}}{\Gamma(q+j+1)} e^{-c/r} = \sum_{j=0}^{\infty} p(j|u) h(r|q+j,c), \quad r \geq 0, \tag{4}$$

где $u = \dfrac{\rho E(1+E^2/V)}{R(1-\rho)}$, $c = \dfrac{E(1+E^2/V)}{(1-\rho)}$, $q = 1 + \dfrac{E^2}{V}$, $\rho = \exp\left[-k\left(E + \dfrac{V}{E}\right)(t-s)\right]$.

Доказательство утверждений 1 и 2 основывается на результатах Феллера [5], который рассмотрел проблему решения уравнений Колмогорова для плотности вероятностей диффузионного процесса (1), а также получил и исследовал характеристическую функцию этого процесса. В частности, он показал, что достаточным условием строгой положительности процесса (1) (другими словами, что нулевой уровень процесса $r(t)$ недостижим сверху с вероятностью единица) является неравенство $E^2/V > 1$. Очевидно, что это тем более справедливо для процесса (2). Вид плотностей (3) и (4) можно прокомментировать следующим образом. Получается, что случайная величина $r(t)$ при фиксированном $r(s) = R$ с пуассоновскими вероятностями $\mathrm{p}(j|u)$ имеет соответствующую плотность вероятностей с параметром $q + j$. Причем пуассоновский параметр u зависит от фиксированного значения $r(s) = R$. Иначе говоря, плотности $f(r,t|R,s)$ — это смеси, в которых смешивающая случайная величина — пуассоновская.

Утверждение 3. Совместные плотности вероятностей $f(r,t;R,s)$ для $r = r(t)$, $R = r(s)$, $s < t$, определяются в виде смеси распределений:

для процесса (1)

$$f(r,t;R,s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j|q,\rho) g(r|q+j,c) g(R|q+j,c); \tag{5}$$

для процесса (2)

$$f(r,t;R,s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j|q,\rho) h(r|q+j,c) h(R|q+j,c). \tag{6}$$

Значения параметров q, c, ρ в формулах (5) и (6) определены так же, как в утверждении 2.

Таким образом, совместные плотности — смешанные, как и условные плотности, только смешивающая случайная величина здесь имеет отрицательное биномиальное распределение. Кроме того, особенностью плотностей (5) и (6) является то, что при фиксированном значении смешивающей случайной величины J выборочные значения процесса $r(t)$ и $r(s)$ в различные моменты времени оказываются независимыми, поскольку для всякого фиксированного значения $J = j$ совместная плотность выражается в виде произведения плотностей. Так что в некотором смысле смешивающая случайная величина "регулирует" зависимость между выборочными значениями процесса. Такая структура плотностей вероятностей удобна при аналитических расчетах, касающихся вычисления математических ожиданий от различных функций случайных процессов (1) и (2). Поскольку процессы (1) и (2) являются марковскими, с использованием утверждений 1–3 для обоих процессов можно последовательно получить совместные плотности большей размерности так, как это сделано ранее для модели CIR [6]. Для моментов времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ обозначим $r(t_i) \equiv r_i$, $i = 1,2,3,4$, а также $\rho_{il} = \exp\left[-k\left(E + \dfrac{V}{E}\right)(t-s)\right]$, $c_{il} \equiv \dfrac{c_0}{1-\rho_{il}}$, $i > l$, $i,l = 1,2,3,4$, $u_i \equiv \dfrac{c_0 \rho_{i+1,i} r_i}{1-\rho_{i+1,i}}$, $i = 1,2,3$. Заметим, что при этих обозначениях для всяких $j > i > l$ имеет место равенство $\rho_{ji}\rho_{il} = \rho_{jl}$.

Утверждение 4. Трехмерная совместная плотность вероятностей $f(r_1,r_2,r_3)$ значений процесса (2) имеет представление для $r_i \geq 0$, $i = 1,2,3$:

$$f(r_1,r_2,r_3) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} b(j,k|q,\alpha,\beta)\times$$
$$\times\, h(r_1|q+j,c_{21}) h(r_2|q+j+k, c_{32}+c_{21}-c_0) h(r_3|q+k,c_{32}), \tag{7}$$

где $b(j,k|q,\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(j+k+q)}{j!k!\Gamma(q)}\alpha^j\beta^k(1-\alpha-\beta)^q$ — двумерное отрицательное биномиальное распределение,

$$0 < \alpha = \frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})}{1-\rho_{32}\rho_{21}} = \frac{\rho_{21}-\rho_{31}}{1-\rho_{31}} < 1, \quad 0 < \beta = \frac{\rho_{32}(1-\rho_{21})}{1-\rho_{32}\rho_{21}} = \frac{\rho_{32}-\rho_{31}}{1-\rho_{31}} < 1.$$

Таким образом, из представления (7) видно, что совместная плотность трех значений $r(t_1)$, $r(t_2)$, $r(t_3)$ случайного процесса (2) является смесью плотностей, причем смешивающих случайных величин здесь уже две — J и K и они подчиняются двухмерному отрицательному биномиальному распределению вероятностей с параметрами, зависящими только от коэффициентов корреляции ρ_{il}.

Таким образом, по существу нами доказано

Следствие 2. Смешивающими случайными величинами трехмерной совместной плотности вероятностей значений процесса (2) являются случайные величины J и K, имеющие двухмерное отрицательное биномиальное распределение вероятностей

$$\frac{\Gamma(j+k+q)}{j!k!\Gamma(q)}\alpha^j\beta^k(1-\alpha-\beta)^q, \quad 0 \le j \le \infty, \quad 0 \le k \le \infty, \tag{8}$$

с параметрами

$$0 < \alpha = \frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})}{1-\rho_{32}\rho_{21}} = \frac{\rho_{21}-\rho_{31}}{1-\rho_{31}} < 1, \quad 0 < \beta = \frac{\rho_{32}(1-\rho_{21})}{1-\rho_{32}\rho_{21}} = \frac{\rho_{32}-\rho_{31}}{1-\rho_{31}} < 1,$$

которые зависят только от корреляционных свойств случайного процесса (2). Непосредственные вычисления показывают, что смешивающие случайные величины J и K имеют следующие первые и вторые моменты:

$$E[J] = \frac{q\rho_{21}}{1-\rho_{21}}, \quad E[K] = \frac{q\rho_{32}}{1-\rho_{32}}, \quad \mathrm{Var}[J] = \frac{q\rho_{21}}{(1-\rho_{21})^2}, \quad \mathrm{Var}[K] = \frac{q\rho_{32}}{(1-\rho_{32})^2},$$
$$\mathrm{Cov}[J,K] = \frac{q\rho_{32}\rho_{21}}{(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})}, \quad \mathrm{Corr}[J,K] = \sqrt{\rho_{32}\rho_{21}} = \sqrt{\rho_{31}}.$$

Здесь через $\mathrm{Corr}[J,K]$ обозначен коэффициент корреляции случайных величин J и K.

Список литературы

[1] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure // J. of Financial Economics. 1977. Vol. 5. P. 177–188.

[2] Black F., Karasinski P. Bond and options pricing when short rates are lognormal // Financial Analysts J. 1991. Vol. 47. P. 52–59.

[3] Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. A theory of the term structure of interest rate // Econometrica. 1985. Vol. 53. P. 385–467.

[4] Ahn D.H., Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics // The Review of Financial Studies. 1999. Vol. 12, N 4. P. 721–762.

[5] Feller W. Two singular diffusion problems // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54, N 1. P. 173–182.

[6] Медведев Г.А. О вероятностных свойствах случайных процессов Кокса — Ингерсолла — Росса // Вест. Том. гос. ун-та. 2006. Приложение № 16. С. 125–129.

Поступила в редакцию 28 марта 2008 г.