Бесконечнолинейная система массового обслуживания с входящим интегральным кумулятивным потоком

Е. В. Глухова
Московский физико-технический институт, Россия
e-mail: EVGlukhova@mail.ru
К. А. Горбенко
Томский государственный университет, Россия
e-mail: KirillGorbenko@narod.ru

We consider a multilinear queuing system with a recurrent service and conditional intensity of the input stream that integrally depends on the number of requests.

1. Описание системы

Вниманию предлагается бесконечнолинейная система массового обслуживания, описываемая двумя случайными процессами: $N(t)$ — число заявок, поступивших на обслуживание за время длительностью t, $N(0) = 0$; $k(t)$ — число заявок, находящихся на обслуживании в момент времени t, $k(0) = 0$.

Предположения:

1) вероятность поступления заявки на интервале $[t, t + \Delta t]$ равна

$$P\left\{\Delta N(t) = 1 \left| N_0^t \right.\right\} = \left(\lambda + \beta \int_0^t N(\tau) \exp\{-\delta(t-\tau)\} d\tau\right) \Delta t + o(\Delta t),$$

где $\lambda > 0$, $\beta > 0$, $\delta > 0$, $N_0^t = \{N(\tau) :\ 0 \le \tau \le t\}$;

2) время обслуживания заявки моделируется независимой случайной величиной с функцией распределения $B(x)$.

В работе [1] найдены математическое ожидание $m(t)$, дисперсия $D(t)$ и ковариация $C\{t_1, t_2\}$ процесса $N(t)$:

$$\frac{d^2 m(t)}{dt^2} + \delta \frac{dm(t)}{dt} - \beta m(t) = \lambda\delta,\ m(0) = 0,\ \left.\frac{dm(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lambda,$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = 2\beta \int_0^t C\{\tau, t\} \exp\{-\delta(t-\tau)\} d\tau + \frac{dm(t)}{dt},\ D(0) = 0,$$

$$\frac{d^2 C\{t_1, t_2\}}{dt_2^2} + \delta \frac{dC\{t_1, t_2\}}{dt_2} - \beta C\{t_1, t_2\} = 0,\ C\{t_1, t_1\} = D(t_1),$$

$$\left.\frac{dC\{t_1, t_2\}}{dt_2}\right|_{t_2 = t_1} = \beta \int_0^{t_1} C\{\tau, t_1\} \exp\{-\delta(t_1 - \tau)\} d\tau,\ t_1 \le t_2.$$

Для краткости изложения введем следующие обозначения:

$$m_x(t) = \mathrm{M}\{x(t)\}, \ D_x(t) = \mathrm{D}\{x(t)\}, \ C_x\{t_1, t_2\} = \mathrm{cov}\{x(t_1), x(t_2)\}.$$

Согласно [2] введем параметр T и процесс $n(t)$, равный числу заявок входящего потока, просеянных в моменты времени $t_i \le t$ с вероятностями $P(T - t_i) = 1 - B(T - t_i)$, тогда

$$n(T) = k(T). \tag{1}$$

Отметим очевидные свойства процесса $n(t)$:

$$P\left\{\Delta n(t) = 1 \left| N_0^t \right.\right\} = P\left\{\Delta N(t) = 1 \left| N_0^t \right.\right\} P(T - t) + o(\Delta t),$$
$$P\left\{\Delta N(t)\, \Delta n(t) = 1 \left| N_0^t \right.\right\} = P\left\{\Delta N(t) = 1 \left| N_0^t \right.\right\} P(T - t) + o(\Delta t).$$

2. Среднее значение процесса изменения числа обслуживаемых заявок

Рассмотрим соотношение

$$n(t + \Delta t) = n(t) + \Delta n(t). \tag{2}$$

Проведем условное усреднение правой и левой частей (2):

$$\mathrm{M}\left\{n(t + \Delta t) \left| n(t), N_0^t \right.\right\} = n(t) +$$
$$+ \left(\lambda + \beta \int\limits_0^t N(\tau) \exp\{-\delta(t - \tau)\}\, d\tau\right) P(T - t)\, \Delta t + o(\Delta t).$$

Осуществим безусловное усреднение и элементарные преобразования:

$$\frac{m_n(t + \Delta t) - m_n(t)}{\Delta t} = \frac{dm(t)}{dt} P(T - t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Выполним предельный переход:

$$\frac{dm_n(t)}{dt} = \frac{dm(t)}{dt} P(T - t).$$

Далее проинтегрировав и воспользовавшись (1), получим

$$m_k(t) = \int\limits_0^t P(t - \tau)\, dm(\tau).$$

3. Дисперсия процесса изменения числа обслуживаемых заявок

Теорема 1. *Дисперсия $D_k(t)$ процесса $k(t)$ определяется уравнением*

$$D_k(t) = 2\beta \int\limits_0^t P(t - \tau) \exp\{-\delta\tau\}\, d\tau \int\limits_0^\tau C_{Nn}\{x, \tau \left| t \right.\} \exp\{\delta x\}\, dx + m_k(t),$$

где $C_{Nn}\{t_1, t_2 \left| T \right.\} = \mathrm{M}\{(N(t_1) - m(t_1))(n(t_2) - m_n(t_2))\}$.

Доказательство. Возведем в квадрат правую и левую части (2):

$$n^2(t+\Delta t) = n^2(t) + 2n(t)\,\Delta n(t) + [\Delta n(t)]^2.$$

Как и прежде, проведя условное усреднение, получим

$$\mathrm{M}\left\{n^2(t+\Delta t)\left|n(t), N_0^t\right.\right\} = n^2(t) + (2n(t)+1)\,\mathrm{P}\left\{\Delta n(t) = 1\left|N_0^t\right.\right\} + o(\Delta t).$$

После безусловного усреднения и предельного перехода запишем

$$\frac{dm_{n^2}(t)}{dt} = \frac{dm_n(t)}{dt} + 2\left(\lambda m_n(t) + \beta\int\limits_0^t \mathrm{M}\left\{N(\tau)\,n(t)\right\}\exp\left\{-\delta(t-\tau)\right\}d\tau\right)P(T-t).$$

Далее, используя соотношение

$$\frac{dD_n(t)}{dt} = \frac{dm_{n^2}(t)}{dt} - 2m_n(t)\frac{dm_n(t)}{dt},$$

получим

$$\frac{dD_n(t)}{dt} = \frac{dm_n(t)}{dt} + 2\beta P(T-t)\int\limits_0^t C_{Nn}\left\{\tau, t\left|T\right.\right\}\exp\left\{-\delta(t-\tau)\right\}d\tau.$$

Интегрируя последнее уравнение и используя соотношение (1) метода просеянного потока, получим утверждение теоремы. □

Теорема 2. *Функция $C_{Nn}\left\{t_1, t_2\left|T\right.\right\}$ определяется уравнением*

$$C_{Nn}\left\{t_1, t_2\left|T\right.\right\} = C_{Nn}\left\{t_1\left|T\right.\right\} + \int\limits_{t_1}^{t_2} P(T-\tau)\,dC\left\{t_1, \tau\right\},$$

где $C_{Nn}\left\{t\left|T\right.\right\} = \mathrm{M}\left\{(N(t) - m(t))\,(n(t) - m_n(t))\right\}$.

Доказательство. Используя соотношение

$$N(t_1)\,n(t_2 + \Delta t_2) = N(t_1)\,n(t_2) + N(t_1)\,\Delta n(t_2)$$

и рассуждения теоремы 1, получим утверждение теоремы. □

Теорема 3. *Функция $C_{Nn}\left\{t\left|T\right.\right\}$ определяется уравнением*

$$\frac{d^2 C_{Nn}\left\{t\left|T\right.\right\}}{dt^2} + \delta\frac{dC_{Nn}\left\{t\left|T\right.\right\}}{dt} - \beta C_{Nn}\left\{t\left|T\right.\right\} = \delta A\left\{t, T\right\} + \frac{dA\left\{t, T\right\}}{dt},$$

$$C_{Nn}\left\{0\left|T\right.\right\} = 0,\ \left.\frac{dC_{Nn}\left\{t\left|T\right.\right\}}{dt}\right|_{t=0} = \lambda P(T),$$

где

$$A\left\{t, T\right\} = \beta\int\limits_0^t \exp\left\{-\delta(t-x)\right\}dx\int\limits_x^t P(T-\tau)\,dC\left\{x, \tau\right\} +$$
$$+ P(T-t)\left(\left.\frac{dC\left\{t, x\right\}}{dx}\right|_{x=t} + \frac{dm(t)}{dt}\right).$$

Доказательство. Представим

$$N(t+\Delta t)\, n(t+\Delta t) = N(t)\, n(t) + \Delta N(t)\, n(t) + N(t)\, \Delta n(t) + \Delta N(t)\, \Delta n(t)\,.$$

Применяя стандартные действия, придем к следующему уравнению:

$$\frac{dC_{Nn}\{t\,|T\}}{dt} = \beta \int\limits_0^t C_{Nn}\{x\,|T\} \exp\{-\delta(t-x)\}\, dx + A\{t,T\}\,,$$

дифференцируя которое по t, получим утверждение теоремы. □

Заключение

Для рассмотренной системы получили явный вид математического ожидания и дисперсии процесса изменения числа обслуживаемых заявок, при этом выражение для дисперсии содержит функцию, вид которой определяется на основе двух последних теорем.

Список литературы

[1] Горбенко К.А. Средние характеристики интегрального кумулятивного потока // Вест. ТГУ. Приложение. 2006. № 19. С. 145–148.

[2] Куликова О.А., Моисеева С.П., Назаров А.А. Метод просеянного потока для нахождения одномерного распределения вероятностей значений процесса изменения числа заявок в системе $M|G|\infty$ // Обработка данных и управление в сложных системах: Сб. ст. Томск: Изд-во ТГУ, 2005. Вып. 7. С. 134–137.

Поступила в редакцию 28 марта 2008 г.