

Численное исследование свойств решений нелинейного уравнения Шредингера при распространении лазерных импульсов в световодах*

В. Э. Витковский, М. П. Федорук

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: wsiewolod@gmail.com, mife@ict.nsc.ru

We present numerical simulations of nonlinear Schrodinger (NLS) equation with cubic nonlinearity for the Gauss and ring ($m = 1$) initial spatial profiles. We determine a threshold power for the self-focusing collapse in a bulk dielectric medium and analyze solution properties that are independent of geometry of the experiment and the initial conditions. We observe oscillatory behaviour for different magnitudes near critical power and phase singularities. To approximate smooth solutions of this problem we construct special boundary conditions and implement a numerical algorithm based on a parallel sweep method for implicit Crank—Nicolson scheme. We then equip this scheme with an adaptive spatial and temporal mesh refinement mechanism that enables the numerical technique to correctly approximate singular solutions of the NLS equation. The calculations were performed using a high performance computer cluster allowing acceleration of 28 times over the sequential algorithm.

Введение

В данной работе численно исследуются свойства решений нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью в цилиндрических координатах для начальных условий ($z = 0$) типа “чирпованных” гауссова импульса Ψ_G (в дальнейшем обозначается как G) и кольцевого распределения с $m = 1$ Ψ_{Rm} (R1). Параметр чирпа в представленных ниже расчетах $C = 50$, что соответствует фокусному расстоянию около 2280 мкм. Входной радиус лазерного пучка $a = 100$ мкм (на поверхности образца).

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью описывает эффект Керра, заключающийся в зависимости показателя преломления среды от квадрата модуля электрического поля светового излучения [1]. Таким образом, в физической постановке моделируется нелинейное распространение лазерного импульса в прозрачной диэлектрической среде [2] в приближении медленной огибающей электрического поля Ψ :

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z'} + \frac{1}{2n_0 k_0} \Delta_{\perp} \Psi + k_0 n_2 |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}. \quad (1)$$

*Работа выполнена при поддержке междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 31.
© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2008.

Для данного уравнения безразмерные переменные и единицы измерения используемых в расчетах величин записываются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{z'}{L_D}, \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}'}{r_0}, \quad L_D = 2n_0k_0r_0^2, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}, \quad r_0 = 1\mu m, \\ \lambda_0 &= 0.8\mu m, \quad n_0 = 1.4533, \quad n_2 = 2.66 \cdot 10^{-16} \frac{cm^2}{W}, \\ I(\mathbf{r}', z') &= |\Psi(\mathbf{r}', z')|^2 = \frac{\lambda_0^2}{8\pi^2 n_0 n_2 r_0^2} |A(\mathbf{r}, z)|^2, \\ P &= \frac{\lambda_0^2}{8\pi^2 n_0 n_2} \int |A|^2 d\mathbf{r}, \quad P_0 = \frac{2\pi\lambda_0^2}{8\pi^2 n_0 n_2} = 1.32 MW, \\ I_0 &= \frac{\lambda_0^2}{8\pi^2 n_0 n_2 r_0^2} = 20.9678 \frac{TW}{cm^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Тогда, используя цилиндрическую симметрию, исходное уравнение в безразмерных переменных записываем как

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \Delta_r \Psi + |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad \Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right), \quad (3)$$

с начальными условиями вида

$$\Psi_G(r) = A_G \exp\left(-\frac{(1+iC)r^2}{2a^2}\right), \quad \Psi_{Rm}(r) = A_{Rm} r^m \exp\left(-\frac{(1+iC)r^2}{2a^2}\right), \quad m = 1. \quad (4)$$

Параметр чирпа — $C = \frac{\pi(F-d)\eta^2}{\lambda_0 n_0 (1-\eta^2)}$. Здесь F — расстояние от линзы до точки фокусировки, d — расстояние от линзы до образца, $\eta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + f^2}}$ — численная апертура, λ_0 — длина волны лазерного излучения. В работе за фокусное расстояние принимается величина $f = F - d$.

1. Интегральная теория НУШ

Следствия теоремы Таланова предсказывают параболическую зависимость среднеквадратичного радиуса (СКР) светового пучка от пройденного пучком расстояния z ; стремление СКР к нулю при критической мощности, величина которой не зависит от масштабных характеристик пучка (радиуса и фокусного расстояния [3, 4]). Интегралами движения для НУШ являются гамильтониан и мощность:

$$H = \int_0^\infty \left(\left| \frac{\partial \Psi(z, r)}{\partial r} \right|^2 - \frac{1}{2} |\Psi(z, r)|^4 \right) r dr; \quad P = \int_0^\infty |\Psi(z, r)|^2 r dr. \quad (5)$$

Ниже приведены следующие из теоремы о вириале выражения для среднеквадратичного радиуса и его фокусного расстояния для гауссова и кольцевого распределений соответственно [5]:

$$(R_{\min}^G)^2 = \frac{a^2 \left(1 - \frac{P}{P_{\text{cr}}^G}\right)}{1 + C^2 - \frac{P}{P_{\text{cr}}^G}}, \quad Z_{\min}^G = \frac{ka^2 C}{1 + C^2 - \frac{P}{P_{\text{cr}}^G}}, \quad (6)$$

$$(R_{\min}^{\text{R1}})^2 = \frac{a^2 \left(1 - \frac{P}{P_{\text{cr}}^{\text{R1}}}\right)}{1 + C^2 - \frac{P}{P_{\text{cr}}^{\text{R1}}}}, \quad Z_{\min}^{\text{R1}} = \frac{ka^2 C}{1 + C^2 - \frac{P}{P_{\text{cr}}^{\text{R1}}}}.$$

Верхняя граница критической мощности определяется из условия равенства нулю гамильтониана [6, 7]:

$$P_{\text{cr}}^f = \frac{2 \int_0^\infty |f|^2 r dr \cdot \int |\nabla f|^2 r dr}{\int_0^\infty |f|^4 r dr}, \quad P_{\text{cr}}^G = 2, \quad P_{\text{cr}}^{\text{R1}} = 4. \quad (7)$$

Нижняя граница критической мощности для НУШ следует из фундаментального, убывающего на бесконечности стационарного решения НУШ (мода Таунса) [8, 9]:

$$\Delta_\perp R - R + R^3 = 0, \quad R'(0) = 0, \quad R(\infty) = 0, \quad (8)$$

$$R(r) \approx \sqrt{\frac{N_{\text{cr}}}{\pi B^2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2B^2}\right), \quad B^2 \approx 0.8, \quad N_{\text{cr}} \approx 11.67, \quad P_{\text{cr}}^T = 1.86.$$

2. Численный алгоритм

Численные расчеты проводились по разностной схеме Кранка–Николсон $\sigma = 0.5$, использовалась сетка с переменным шагом по r :

$$i \frac{\hat{\Psi}_n - \Psi_n}{\tau} + \sigma L \hat{\Psi}_n + (1 - \sigma) L \Psi_n + |\Psi_n|^2 (\sigma \hat{\Psi}_n + (1 - \sigma) \Psi_n) = 0,$$

$$L \Psi_n = \frac{1}{r_n} \left[\frac{\left(r_n + \frac{h_{n+1}}{2}\right) \left(\frac{\Psi_{n+1} - \Psi_n}{h_{n+1}}\right) - \left(r_n - \frac{h_n}{2}\right) \left(\frac{\Psi_n - \Psi_{n-1}}{h_n}\right)}{\frac{h_n}{2} + \frac{h_{n+1}}{2}} \right], \quad (9)$$

$$h_{n+1} = h_n + \frac{h_n}{M}, \quad M = 25000, \quad h_1 = 10^{-6}.$$

Такой способ построения сетки (очевидно, не единственный) позволяет учесть возможность возникновения особенности в центре пучка.

Граничные условия в центре пучка (слева) формулируются исходя из разностной схемы НУШ (9), построенной в декартовых координатах для $\Psi(Z, X, Y)$ [10]:

$$i \frac{\hat{\Psi}_0 - \Psi_0}{\tau} + 2\sigma \frac{(\hat{\Psi}_1 - \hat{\Psi}_0)}{h_1} + 2(1 - \sigma) \frac{(\Psi_1 - \Psi_0)}{h_1} + |\Psi_0|^2 (\sigma \hat{\Psi}_0 + (1 - \sigma) \Psi_0) = 0, \quad (10)$$

$$\Psi(0, X_1, 0) = \Psi(0, 0, Y_1), \quad X_1 = Y_1 = h_1.$$

По мере приближения к фокусу амплитуда интенсивности электрического поля возрастала более чем на семь порядков (при околоритических значениях мощности) по сравнению с начальной величиной. Вследствие этого, с ростом интенсивности, по мере распространения пучка, уменьшался шаг по z : $\tau = \frac{\tau_0 |\Psi(z', 0)|^2}{|\Psi(z, 0)|^2}$, здесь $|\Psi(z', 0)|^2$ — заданное наперед значение интенсивности в центре пучка, шаг начинал уменьшаться, если интенсивность становилась выше этого значения, что значительно увеличивало время расчета.

Точность расчетов определялась по сохранению численных интегралов движения. В расчетах гамильтониан и мощность (5), сохранялись с точностью вплоть до 10^{-4} %, при распространении по z на два фокусных расстояния с общим числом шагов τ до $\approx 10^8$.

Для вычислений по разностной схеме использовался алгоритм параллельной прогонки (Н.Н. Яненко, А.Н. Коновалов) [11, 12, 13, 14, 15], реализованный по технологии MPI на языке Фортран-77. Выполненные тесты по ускорению показали 22-кратное ускорение на 36 процессорах для рабочей сетки, состоящей из $2.5 \cdot 10^5$ ячеек [16] (рис. 1).

Для постановки граничных условий справа при $r \rightarrow \infty$ (в расчетах $r_\infty^G = 5a$ и $r_\infty^{R1} = 7a$) для гауссова пучка использовалось точное решение линейного уравнения:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \Delta_r \Psi = 0, \quad (11)$$

которое имеет вид

$$\Psi_G(z, r) = A_G \frac{\alpha}{\beta} \xi. \quad (12)$$

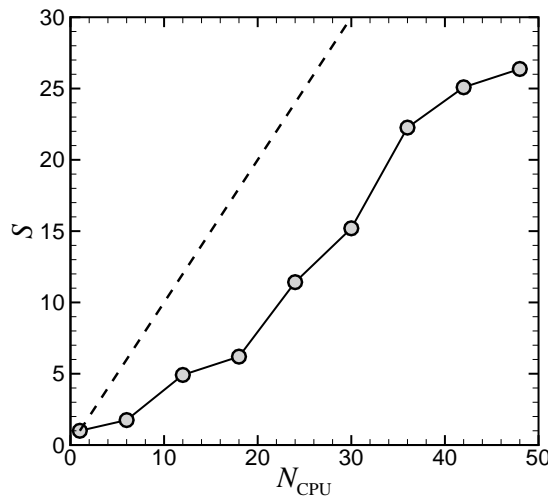


Рис. 1. Ускорение S параллельной прогонки относительно последовательного алгоритма: N_{CPU} — число процессоров, штриховая линия $S = N_{\text{CPU}}$

Здесь Ψ_G — точное решение НУШ для начального распределения, полученное методом функций Грина; $A_G = \frac{\sqrt{2P}}{a}$ — нормировочный коэффициент; $\alpha = (1 - DC) - iD$, $\beta = D^2 + (1 - DC)^2$, $D = \frac{2z}{a^2}$, $\xi = \exp\left(-\frac{(1 + iC)r^2}{2a^2\beta}\right) \exp\left(\frac{ir^2 D(1 + C^2)}{2a^2\beta}\right)$.

Такой способ постановки граничных условий позволяет с хорошей точностью определить критическую мощность, при которой происходит локальный коллапс гауссова пучка $P_{cr}^G = 1.9$, т.е. мощность, при которой интенсивность в центре пучка вблизи фокуса стремится к бесконечности и при этом среднеквадратичный радиус остается ненулевым.

Для расчетов с начальным кольцевым распределением на правой границе используется асимптотика решения, полученная из формулы Грина методом перевала при $r \rightarrow \infty$, $A_{R1} = \frac{\sqrt{2P}}{a^2}$ — нормировочный коэффициент:

$$\Psi_{R1}(z, r) = A_{R1} r \sqrt{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \exp\left(i \arctg\left(\frac{D}{1 - DC}\right)\right) \xi. \quad (13)$$

Этот прием позволяет подавить нефизические возмущения, идущие с правой границы, вплоть до достаточно больших величин z . С другой стороны, при малых значениях эволюционной переменной z возникают нефизические возмущения, распространяющиеся с левой границы из-за особенности начального условия при кольцевом распределении (вторая производная равна бесконечности). Это приводит к необходимости начинать расчеты с очень малым шагом по эволюционной переменной z и с $\sigma = 0.5 + O(h_1)$, пока особенность в центре пучка не исчезает.

3. Результаты математического моделирования

На графиках зависимости центральной интенсивности от z для начальных распределений при околоскритической мощности соответственно $P_G = 1.895$ и $P_{R1} = 2.131$ представлены также кривые $I_{\text{eff}}(z) = \frac{2 \cdot 1.519}{R_{\text{FWHM}}^2(z)}$, где $R_{\text{FWHM}}(z)$ — зависимость ширины пучка на полувысоте интенсивности от z (рис. 2, а). Для обоих распределений зависимость $I_{\text{eff}}(z)$ хорошо описывает кривую $I_0(z)$ вблизи фокуса и после фокусировки [17, 18, 19]. Также было обнаружено, что профиль интенсивности решений НУШ аппроксимируется гауссовым распределением для достаточно больших z :

$$I_{\text{eff}}(r, z) = \frac{2P_{\text{eff}}}{R_{\text{FWHM}}^2(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{R_{\text{FWHM}}^2(z)}\right)$$

с мощностью

$$P_{\text{eff}} = \frac{R_{\text{FWHM}}^2(z^*) I_0(z^*)}{2},$$

отличной от входной мощности пучка, по аналогии с нормировочным коэффициентом для распределения Гаусса (12). Здесь $I_0(z^*)$ — интенсивность в центре пучка $r = 0$ при любом z^* вблизи области фокусировки, $R_{\text{FWHM}}(z^*)$ — ширина на полувысоте интенсивности. Зависимость $I_0(z)$ для кольцевого распределения явно обнаруживает появление второго максимума вслед за главным пиком интенсивности, в то время как для гауссова распределения образование второго максимума только начинается и слабо выражено.

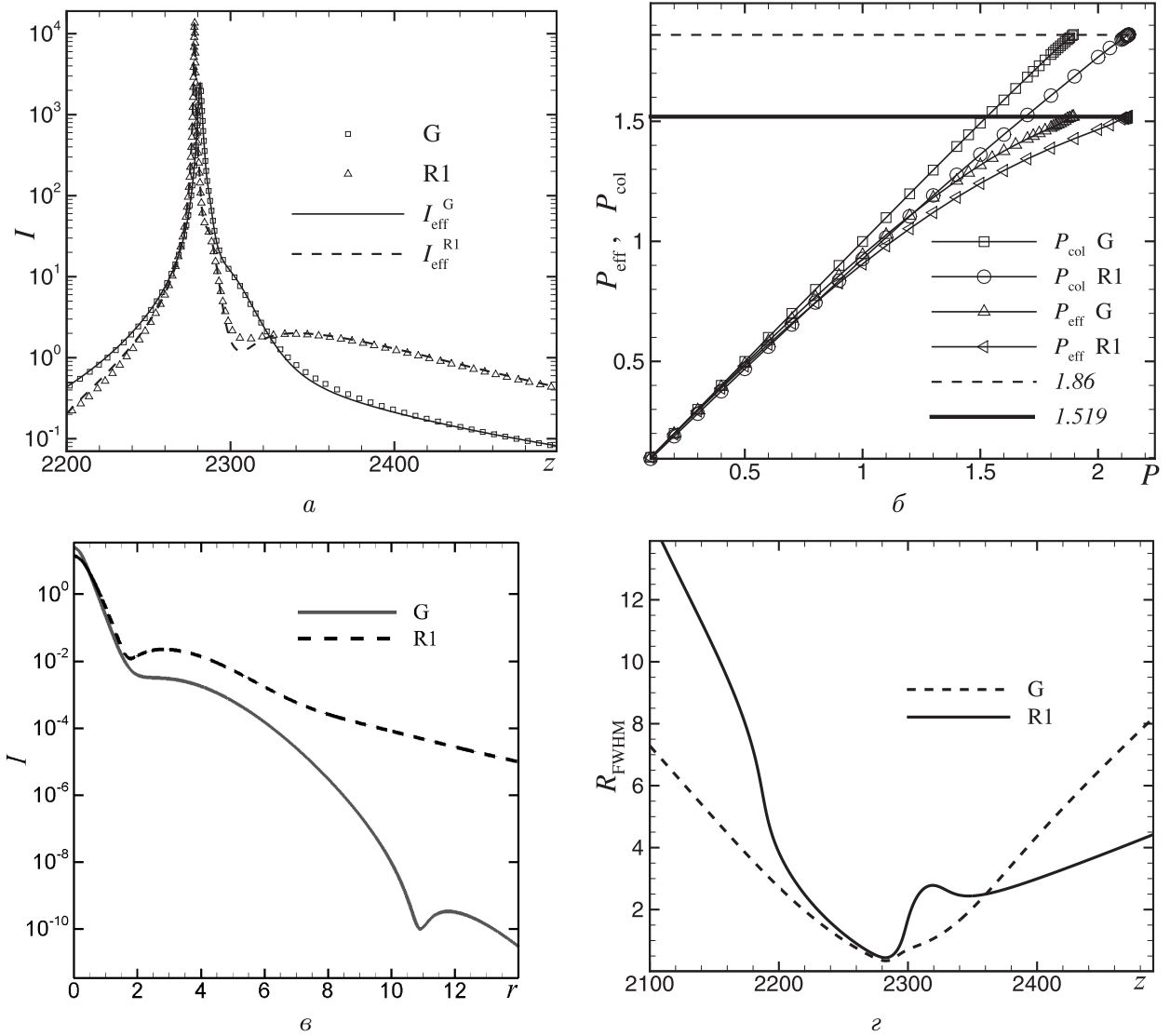


Рис. 2. Зависимость интенсивности в центре пучка от z и $I_{\text{eff}}(z) = \frac{2 \cdot 1.519}{R_{\text{FWHM}}^2(z)}$ для гауссова распределения $P = 1.895$ и кольцевого распределения $P = 2.131$ (а); кривые зависимости мощности коллапсирующей части P_{col} и коэффициента P_{eff} от входной мощности P (б); распределение интенсивности по радиусу $P = 1.8$ (в); зависимость $R_{\text{FWHM}}(z)$ $P = 1.8$ (г): все зависимости приведены для гауссова и кольцевого распределений; интенсивность I — в единицах I_0 , z и r — в микрометрах

Зависимости P_{eff} для гауссова и кольцевого распределений от входной мощности представлены на рис. 2, б. Видно, что при стремлении входной мощности к критической $P_{\text{eff}} \rightarrow 1.519$ для обоих распределений. На этом графике также представлены кривые зависимости мощности, содержащейся в коллапсирующей части профиля P_{col} для обоих начальных распределений при $z = z_f^{\text{FWHM}}$. Здесь имеется в виду мощность между центром пучка и ближайшим минимумом, z_f^{RMS} — фокусное расстояние для среднеквадратичного радиуса, z_f^{FWHM} — фокусное расстояние для ширины на полувысоте интенсивности. В расчетах наблюдалось, что величина z_f^{RMS} для различных P совпадает с теоретическим значением (6) и отличается от z_f^{FWHM} . Было замечено, что мощность P_{col} в этой области при стремлении входной мощности к критической стремится к величине

нижней границы коллапса $P_{cr} \approx 1.86$. Каждому начальному распределению (гауссовому или кольцевому) соответствует собственная кривая $P_{eff}(P)$ и $P_{col}(P)$. Зависимости $P_{col}(P)$ и $P_{eff}(P)$ от входной мощности были также рассчитаны для параметров чирпа $C = 100$ и $C = 0$. Расчеты обнаружили независимость от фокусного расстояния значений критической мощности, кривых $P_{eff}(P)$ и $P_{col}(P)$.

На рис. 2, в показано распределение интенсивности в коллапсирующей части профиля для гауссова и кольцевого распределений. Зависимости $R_{FWHM}(z)$ для этих распределений (рис. 2, з) имеют явные отличия в соответствии с зависимостью $I_0(z)$ (рис. 2, а). На кривой $R_{FWHM}(z)$, соответствующей кольцевому распределению, проявляется объединение двух пиков из начального профиля в один в виде скачка на расстоянии примерно 2200 мкм.

На рис. 3 показана зависимость максимальной интенсивности (в центре пучка) от мощности входного пучка для гауссова и кольцевого распределений. Здесь обнаруживается одинаковая зависимость от мощности для гауссова и кольцевого распределений. У интенсивности при $z = z_f^{RMS}$ для кольцевого распределения возникают осцилляции по мощности, схожие по характеру с осцилляциями по мощности у угла наклона $R_{FWHM}(z)$ после прохождения фокуса. Для кольцевого распределения интенсивность в центре при z_f^{RMS} приблизительно на два порядка меньше интенсивности при $z = z_f^{FWHM}$ для мощностей, близких к критической величине. Интересно заметить, что при предкритических мощностях интенсивность в локальном фокусе z_f^{FWHM} кольцевого распределения на порядок выше интенсивности гауссова распределения.

В вычислительных экспериментах было обнаружено, что коллапс для гауссова распределения происходит при мощности $P_{cr}^G = 1.90$, а для кольцевого распределения он происходит при $P_{cr}^{R1} = 2.132$. Отметим, что при коллапсе решений среднеквадратичный радиус остается конечным при коллапсирующей внутренней части профиля.

На рис. 4, а, б представлены развертки профилей по мощности в фокусе z_f^{FWHM} для гауссова и кольцевого распределений соответственно. На рисунках хорошо заметно появление областей более низкой интенсивности по сравнению с окрестностью, вблизи критической мощности. На рисунках с развертками профилей по z для гауссова профиля (рис. 4, в) и кольца (рис. 4, г) в фокальном объеме также возникают световые пустоты. Графики приведены для предкритических мощностей $P_G = 1.895$ и $P_{R1} = 2.131$.

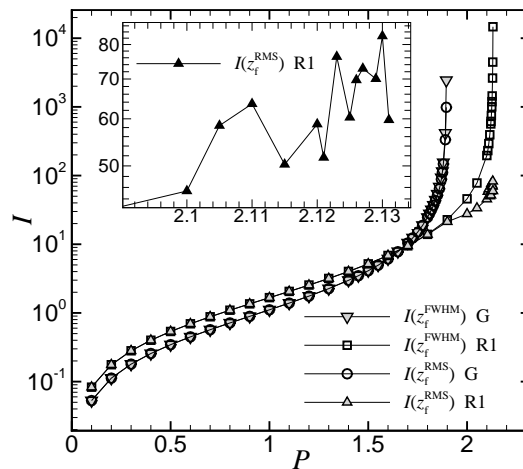


Рис. 3. Зависимость интенсивности при $r = 0$, $z = z_f^{FWHM}$ и $z = z_f^{RMS}$ для гауссова и кольцевого распределений от мощности P

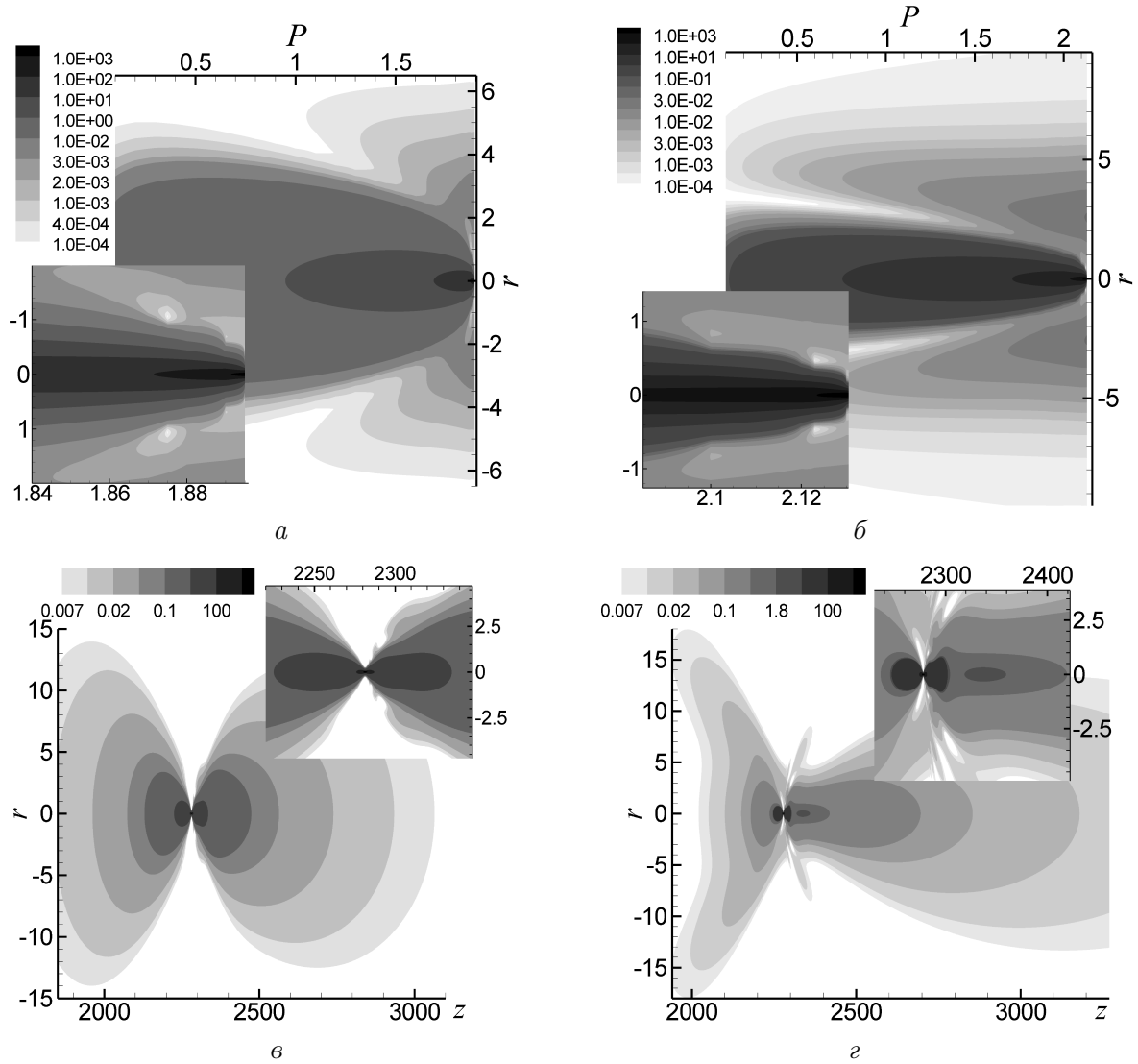


Рис. 4. Зависимость распределения интенсивности по r от мощности P при $z = z_f^{\text{FWHM}}$ для гауссова распределения (а); зависимость распределения интенсивности по r от мощности P при $z = z_f^{\text{FWHM}}$ для кольцевого распределения (б); эволюция гауссова профиля $P = 1.895$ (в); эволюция кольцевого профиля $P = 2.131$ (г)

На увеличенном изображении развертки профиля для кольца видно появление вторичного фокуса. После фокусировки пучок не рассеивается в соответствии с условиями фокусировки, а заметно сужается. На рисунках также представлены изолинии в плоскости (z, r) фазы электрического поля для гауссова и кольцевого распределений (рис. 5). Здесь можно заметить возникновение спиралевидных особенностей и резкой фазовой границы в окрестности фокальной плоскости.

Выводы

В соответствии с результатами работы расчетный профиль интенсивности для начальных распределений хорошо описывается гауссовым профилем с эффективной мощностью P_{eff} для достаточно больших величин z :
$$I_{\text{eff}}(r, z) = \frac{2P_{\text{eff}}}{R_{\text{FWHM}}^2(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{R_{\text{FWHM}}^2(z)}\right).$$

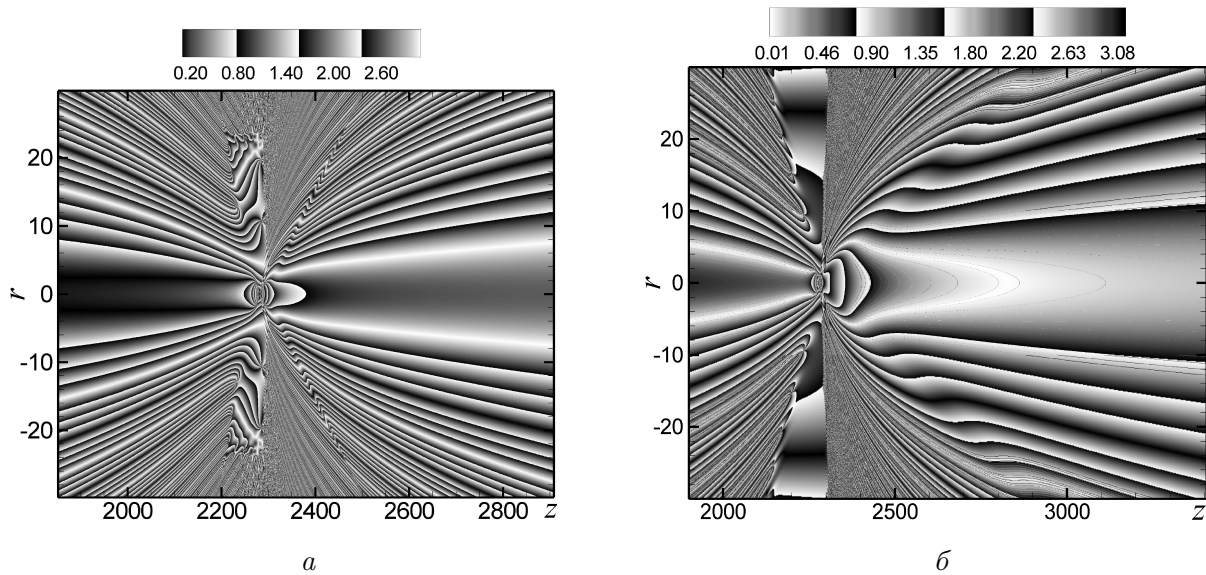


Рис. 5. Эволюция фазы амплитуды электрического поля: *a* — гаусс, $P = 1.895$; *б* — кольцо, $P = 2.131$

Зависимости P_{eff} и P_{col} стремятся к величинам 1.52 и 1.86 соответственно при стремлении входной мощности пучка к критической для каждого из распределений. Каждому начальному распределению соответствуют собственные кривые $P_{\text{eff}}(P)$ и $P_{\text{col}}(P)$, не зависящие от входного радиуса пучка и фокусного расстояния. Определены критические мощности локального коллапса для распределений $P_{\text{cr}}^{\text{G}} = 1.900$ и $P_{\text{cr}}^{\text{R1}} = 2.132$, при которых центральная часть профиля коллапсирует и интенсивность в ней стремится к бесконечности, а мощность остается постоянной: $P_{\text{col}} = 1.86$; среднеквадратичный радиус соответствует теоретическому значению, отличному от нуля. Фокус для среднеквадратичного радиуса $z_{\text{f}}^{\text{RMS}}$ не совпадает с фокусом для ширины на полувысоте интенсивности $z = z_{\text{f}}^{\text{FWHM}}$. Обнаружены также спиралевидные фазовые особенности на графиках эволюции фазы в координатах z и r .

Выражаем благодарность В.И. Паасонену и Д.Л. Чубарову за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] УИЗЕМ ДЖ. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1974. 622 с.
- [2] АГРАВАЛ Г. Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1996. 324 с.
- [3] КОЛОКОЛОВ И.В., КУЗНЕЦОВ Е.А., МИЛЬШТЕЙН А.И. и др. Задачи по математическим методам физики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 288 с.
- [4] TALANOV V. Focusing of light in cubic media // JETP Lett. 1970. Vol. 11. P. 199–201.
- [5] TURITSYN S.K., MEZENTSEV V.K., FEDORUK M.P. ET AL. Sub-critical regime of femtosecond inscription // Optics Express. 2007. Vol. 22, N 15. P. 14750.
- [6] JOHANNISSON P., ANDERSON D., LISAK M. ET AL. Nonlinear Bessel beams // <http://eprintweb.org/physics/0305085> (May 2003)
- [7] FIBICH G., GAETA A. L. Critical power for self-focusing in bulk media and in hollow waveguides // Opt. Lett. 2000. Vol. 25. P. 335–337.

- [8] CHIAO R., GARMIRE E., TOWNES C. Self-trapping of optical beams // Phys. Rev. Lett. 1964. Vol. 13. P. 479–482.
- [9] WEINSTEIN M. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates // Commun. Math. Phys. 1983. Vol. 87. P. 567–576.
- [10] ПААСОНЕН В.И. Граничные условия повышенной точности в полюсах координатных систем // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 1. С. 93–105.
- [11] ЯНЕНКО Н.Н., КОНОВАЛОВ А.Н., БУГРОВ А.Н., ШУСТОВ Г.В. Об организации параллельных вычислений и “распараллеливание” прогонки // Числ. методы механики сплош. среды. 1978. Т. 9, № 7. С. 139–146.
- [12] ПААСОНЕН В.И. Параллельный алгоритм для компактных схем в неоднородных областях // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 3. С. 98–106.
- [13] ПААСОНЕН В.И. Сходимость параллельного алгоритма для компактных схем в неоднородных областях // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 81–89.
- [14] ВОЕВОДИН А.Ф. Метод прогонки для разностных уравнений, определенных на комплексе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13, № 2. С. 494–497.
- [15] КУДРЯШОВА Т.А., ПОЛЯКОВ С.В. О некоторых методах решения краевых задач на многопроцессорных вычислительных системах // Тр. IV междунар. конф. по математическому моделированию. М.: “СТАНКИН”, 2001. Т. 2. С. 134–145.
- [16] ВИТКОВСКИЙ В.Э., ФЕДОРУК М.П. Вычислительная производительность параллельного алгоритма прогонки на кластерных суперкомпьютерах с распределенной памятью // Вычисл. методы и программирование. 2008. Т. 9, № 1. С. 305–310 (<http://nummeth.srcc.msu.ru/>).
- [17] AKRIVIS G.D., DOUGALIS V.A., KARAKASHIAN O.A., MCKINNEY W.R. Numerical approximation of blow-up of radially symmetric solutions of the nonlinear Schrödinger equation // SIAM J. Scientific. 2003. Vol. 25, N 1. P. 186–212.
- [18] FIBICH G. Adiabatic law for self-focusing of optical beams // Opt. Lett. 1996. Vol. 21. P. 1735–1737.
- [19] LE MESURIER B.J., CHRISTIANSEN P.L., GAIDIDEI Y.B., RASMUSSEN J.J. Beam stabilization in the 2D nonlinear Schrödinger equation with attractive potential by beam splitting and radiation // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 046614.

*Поступила в редакцию 17 апреля 2008 г.,
в переработанном виде — 28 июля 2008 г.*