

Индуктивное построение регрессионных моделей волатильности опционных торгов*

В. В. СТРИЖОВ

Вычислительный центр РАН, Москва, Россия

e-mail: strijov@ccas.ru

Р. А. СОЛОГУБ

Московский физико-технический институт

e-mail: roman.sologub@yahoo.com

Предложен алгоритм индуктивного порождения регрессионных моделей оптимальной структуры. Алгоритм использован для построения моделей опционных торгов. Уточняется заданная экспертами модель зависимости вычисленной волатильности опционов от времени и цены исполнения. Используются данные торгов опционами Brent Crude Oil.

Ключевые слова: нелинейная регрессия, порождение моделей, выбор моделей, анализ параметров моделей, биржевые опционы, моделирование волатильности.

Введение

Существуют по крайней мере два подхода к созданию регрессионных моделей. Первый подход — модель назначается, исходя из информации о моделируемом явлении, второй — модель выбирается из множества универсальных моделей. Оба подхода имеют свои преимущества и недостатки. Предложенный алгоритм сохраняет сильные стороны обоих подходов: получаемые модели, с одной стороны, являются интерпретируемыми в рамках рассматриваемой прикладной области, а с другой — достаточно точно аппроксимируют измеряемые данные.

В этой работе алгоритм используется для уточнения модели опционных торгов, предложенной экспертами. Опцион — договор, по которому покупатель получает право (но не обязанность) совершить покупку или продажу базового инструмента по заранее оговоренной цене — цене исполнения опциона в момент, называемый временем исполнения опциона (см. [1]). В качестве базового инструмента рассматривается нефть (Brent Crude Oil, символ NYM).

Справедливая цена опциона (теоретически обоснованная минимальная цена, при которой продавец может выполнить свои обязательства по договору) вычисляется с помощью модели Блэка—Шоулза [2]. Эта модель включает оценку волатильности (изменчивости) цены базового инструмента. Волатильность — величина, равная стандартному отклонению стоимости базового инструмента, вычисленная на основе текущей стоимо-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-07-00181).

© ИВТ СО РАН, 2009.

сти финансового инструмента в предположении, что рыночная стоимость финансового инструмента отражает ожидаемые риски.

В предположениях, на которых основана модель Блэка—Шоулза, волатильность не зависит ни от цены исполнения опциона, ни от времени до его исполнения. На практике волатильность зависит от этих двух величин. Предполагаемое значение волатильности σ^{imp} вычисляют как аргумент минимума разности между исторической (зафиксированной на бирже) и справедливой (полученной из модели) оценками стоимости опциона в модели Блэка—Шоулза:

$$\sigma^{\text{imp}} = \arg \min_{\sigma} (C_{\text{hist}} - C(\sigma, P, B, K, t)), \quad (1)$$

где C_{hist} — историческая цена опциона; C — справедливая цена опциона, вычисленная по формуле Блэка—Шоулза; P — цена базового инструмента; B — банковская процентная ставка; K — цена исполнения опциона; t — время до исполнения опциона.

При исследовании справедливой оценки стоимости опционов возникает задача аппроксимации $\sigma(K, t)$ зависимости волатильности опциона от цены исполнения опциона и времени до его исполнения.

Центральная задача данной работы — уточнение модели вычисления предполагаемой волатильности опциона, предложенной экспертами. Эта модель имеет вид

$$\sigma = \sigma(\mathbf{w}) = w_1 + w_2(1 - \exp(-w_3x^2)) + \frac{w_4 \arctan(w_5x)}{w_5}, \quad (2)$$

где

$$x = \frac{\ln K - \ln C(t)}{\sqrt{t}}$$

и вектор параметров $\mathbf{w} = \langle w_1, \dots, w_5 \rangle$. Оптимальные параметры модели получены с помощью алгоритма Левенберга—Марквардта [3], начальное приближение параметров задано экспертами. При практическом использовании модели полученные параметры экспертами не интерпретировались.

Для уточнения модели (2) был предложен алгоритм, индуктивно порождающий регрессионные модели. Впервые методы последовательного порождения моделей были предложены А. Г. Ивахненко. В его методе группового учета аргументов [4] регрессионные модели-претенденты порождались как линейные суперпозиции. Модель оптимальной структуры выбирается из множества моделей-претендентов согласно назначенному критерию.

Так как модели вычисления предполагаемой волатильности зависят от своих параметров нелинейно, требуется снять ограничения на линейность суперпозиции. Регрессионную модель как произвольную суперпозицию порождающих функций можно построить методами символьной регрессии [5]. Для индуктивного порождения моделей задаются порождающие функции заданного числа аргументов и правила построения этих моделей. Выбор моделей при этом выполняется с помощью методов связанного байесовского вывода [6] и оптимального отсечения [7, 8].

Согласно последнему методу те компоненты суперпозиции, изъятие которых незначительно влияет на точность аппроксимации, изымаются или заменяются другими элементами. В случае замены предполагается, что вероятность получения более точной модели увеличивается.

Предложенный алгоритм уточнения регрессионных моделей развивает алгоритм, описанный в [9], и включает следующие основные шаги.

1. Задана обучающая регрессионная выборка; заданы набор порождающих функций и набор начальных моделей, требующих уточнения.
 2. Параметры моделей-претендентов настраиваются в соответствии с заданной целевой функцией.
 3. Вычисляются значения информативности элементов суперпозиции.
 4. Выбираются лучшие модели.
 5. Модели модифицируются: порождаются новые модели-претенденты, алгоритм повторяется с шага 2.
 6. Алгоритм останавливается после отыскания модели оптимальной структуры или через заданное число шагов.
- Результатом работы алгоритма является регрессионная модель оптимальной структуры с настроенными параметрами.

1. Постановка задачи

Задана регрессионная выборка — множество пар $D = \{(\mathbf{x}_n, y_n)\}_{n=1}^N$, в котором $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^P$ — свободная переменная и $y \in \mathbf{R}^1$ — зависимая переменная. В контексте рассматриваемой задачи вектор $\mathbf{x}_n = \langle t_n, C_n \rangle$ содержит значения времени до исполнения опциона и цены его исполнения. Скаляр $y_n = \sigma_n$ есть предполагаемая волатильность базового инструмента в момент времени t_n при цене исполнения опциона C_n .

Задано конечное множество порождающих функций $G = \{g | g : \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\}$. Функция $g = g(\mathbf{b}, \cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ — гладкая параметрическая. Первый аргумент функции — вектор параметров, последующие аргументы — функции свободных переменных, принимающие значения в \mathbf{R}^1 . Множество G индуктивно определяет набор допустимых суперпозиций $F = \{f_i\}$. На эти суперпозиции накладывается ограничение сложности: каждая суперпозиция f_i состоит не более чем из R функций $g \in G$.

Суперпозиция f определяет параметрическую регрессионную модель $f = f(\mathbf{w}, \mathbf{x})$. Она зависит от независимых переменных \mathbf{x} и вектора параметров \mathbf{w} . Вектор $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^W$ состоит из присоединенных векторов — параметров функций g_1, \dots, g_r , входящих в эту суперпозицию, т. е. $\mathbf{w} = \mathbf{b}_1 \dot{\vdots} \mathbf{b}_2 \dot{\vdots} \dots \dot{\vdots} \mathbf{b}_r$, где $\dot{\vdots}$ — знак присоединения векторов.

Сложностью регрессионной модели называется число r элементов g в суперпозиции f , задающих эту модель.

Требуется отыскать в множестве F модель f_i , максимизирующую заданную целевую функцию $p(\mathbf{w} | D, \beta, f_i)$. Число параметров модели не должно превышать заданное число W^* , число порождающих функций, из которых она состоит, не должно превышать заданное число r^* . Модель, удовлетворяющую вышеперечисленным требованиям, будем называть моделью оптимальной структуры.

Целевая функция включает в себя данные D , модель $f_i = f_i(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ и ее дополнительный параметр β . Вид целевой функции зависит от предположений относительно характера распределения данных. Эта функция задана следующим образом. Пусть ν случайная величина в задаче восстановления регрессии

$$y = f_i(\mathbf{w}, \mathbf{x}) + \nu$$

с аддитивным некоррелированным гауссовым шумом с дисперсией σ_ν^2 и нулевым математическим ожиданием.

Тогда, согласно методу наибольшего правдоподобия, целевая функция будет определена как

$$p(y|\mathbf{x}, \mathbf{w}, \beta, f_i) \triangleq p(D|\mathbf{w}, \beta, f_i) = \frac{\exp(-\beta E_D(D|\mathbf{w}, f_i))}{Z_D(\beta)},$$

где $\beta = \sigma_\nu^{-2}$ и $Z_D(\beta)$ — нормирующая константа. Функция ошибки E_D — сумма квадратов разности значений модели f_i и зависимых переменных,

$$E_D = \sum_{n=1}^N (f_i(\mathbf{w}, \mathbf{x}_n) - y_n)^2. \quad (3)$$

Модель f_i является отображением из пространства независимых переменных $X \ni \mathbf{x}$ и параметров $W \ni \mathbf{w}$ в пространство зависимых переменных $Y \ni y$:

$$f_i : X \times W \rightarrow Y.$$

Параметр, доставляющий максимум целевой функции p , называется наиболее правдоподобным, $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w}^{\text{MP}}$. После отыскания \mathbf{w}^{MP} отображение f_i сужается на отображение $f_i : X \rightarrow Y$ и может быть использовано для вычисления значений предполагаемой волатильности.

2. Порождение и выбор оптимальной регрессионной модели

Ниже описаны правила порождения моделей и алгоритм, позволяющий существенно сократить число рассматриваемых моделей-претендентов за счет введения понятия влияния параметра модели на функцию ее ошибки. Алгоритм порождения моделей выполняется итеративно. На каждой итерации выполняются следующие шаги: порождение моделей, модификация моделей и выбор моделей с наименьшей ошибкой для новой итерации. При порождении те элементы моделей, которые незначительно влияют на функцию ошибки, заменяются другими. При этом ожидается, что новые модели точнее приближают регрессионную выборку. Так как это стохастический оптимизационный алгоритм, то модели, полученные в результате его работы, имеют локально-оптимальную структуру.

2.1. Порождение суперпозиции

Функции $g_v \in G$ проиндексированы числами $v \in \mathcal{V} = \{1, \dots, V\}$. Задано отображение $\iota : \mathcal{V}^R \rightarrow \mathcal{A}$. Элементы $A_\iota \in \mathcal{A}$ — всевозможные сочетания с повторениями из \mathcal{V} по K , где $K = 1, \dots, R$. Мощность множества \mathcal{A} равна

$$|\mathcal{A}| = \sum_{K=1}^R \bar{C}_K^V = \sum_{K=1}^R \frac{(K+V-1)!}{(K-1)!V!},$$

где \bar{C} — число сочетаний с повторениями.

Элементы набора $A_\iota = \{a_\iota(k)\}$ проиндексированы числами $k = 1, \dots, K_\iota$. Так как $a \in \mathcal{V}$, элементы $a_\iota(k)$ однозначно соответствуют функциям g_v из G . Каждому набору A_ι

поставим в соответствие набор матриц инцидентности $\{\rho_i(A_l)\}$, $i \in \mathbb{N}$. Индекс i матрицы ρ задает уникальную суперпозицию f_i функций g из G ; обозначим $\rho_i = \rho_i(A_l)$. Число элементов этой суперпозиции равно K_l . Матрица инцидентности

$$\rho_i : \{1, \dots, K_l\} \times \{1, \dots, K_l\} \rightarrow \{0, 1\}$$

задает орграф и суперпозицию функций f_i нескольких аргументов. Суперпозиция f_i называется *допустимой*, если выполнены следующие условия.

1. Орграф ρ_i является ациклическим.

2. Орграф является односвязным без изолированных вершин, т.е. справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{K_l} \sum_{l=1}^{K_l} \rho_i(l, k) = \sum_{k=1}^{K_l} s(a_l(k)),$$

где $s = s(v)$ — число аргументов функции g_v . Иначе, число единиц в орграфе ρ_i равно суммарному числу аргументов в суперпозиции f_i .

3. Число аргументов каждого элемента суперпозиции должно совпадать с числом аргументов соответствующей порождающей функции

$$\sum_{l=1}^{K_l} \rho_i(l, k) = s(a_l(k)), \quad \text{для всех } k = 1, \dots, K_l.$$

Иначе, число вершин орграфа, смежных вершине с номером k , есть число $s(a_l(k))$ аргументов функции g_v при $v = a_l(k)$.

2.2. Оптимальное упрощение модели

Те элементы g_{ik} модели f_i , которые незначительно влияют на ошибку аппроксимации $E_D(\mathbf{w}|D, f_i)$, можно исключить из модели без заметного ухудшения качества аппроксимации. Для определения таких элементов необходимо выполнить следующее.

Найдем локальную аппроксимацию функции (3) в окрестности точки \mathbf{w}^{MP} с помощью разложения в ряд Тейлора:

$$E_D(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}) = E_D(\mathbf{w}) + \mathbf{g}^T(\mathbf{w})\Delta\mathbf{w} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{w}^T H \Delta\mathbf{w} + o(\|\Delta\mathbf{w}\|^3),$$

где $\Delta\mathbf{w}$ — возмущение вектора параметров \mathbf{w} , $\mathbf{g} = \partial E_D / \partial \mathbf{w}$ — градиент и $H = H(\mathbf{w}) = \partial^2 E_D / \partial \mathbf{w}^2$ — матрица Гессе.

Предполагается, что функция $E_D(\mathbf{w})$ достигает своего минимума при значении параметров $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{\text{MP}}$ и ее поверхность в окрестности этой точки квадратична. Таким образом, предыдущее выражение можно упростить и представить в виде

$$\Delta E_D = E_D(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}) - E_D(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{w}^T H \Delta\mathbf{w}.$$

Пусть исключение элемента модели есть исключение одного параметра модели, w_s . Исключенный параметр будем считать равным нулю. Это самое сильное ограничение, не позволяющее применять данный метод для регрессионных моделей произвольного вида. Исключение элемента эквивалентно выражению $\Delta w_s + w_s = 0$, иначе

$$\mathbf{e}_s^T \Delta\mathbf{w} + w_s = 0,$$

где \mathbf{e}_s — вектор, i -й элемент которого равен единице, все остальные элементы равны нулю.

Для нахождения исключаемого элемента требуется минимизировать квадратичную форму $\Delta \mathbf{w}^T H \Delta \mathbf{w}$ относительно $\Delta \mathbf{w}$ при ограничениях $\mathbf{e}_s^T \Delta \mathbf{w} + w_s = 0$ для всех значений i . Индекс i , который доставляет минимум квадратичной форме, задает номер исключаемого элемента:

$$i = \arg \min_s \left(\min_{\Delta \mathbf{w}} (\Delta \mathbf{w}^T H \Delta \mathbf{w} | \mathbf{e}_s^T \Delta \mathbf{w} + w_s = 0) \right).$$

Задача условной минимизации решается с помощью введения лагранжиана

$$L = \Delta \mathbf{w}^T H \Delta \mathbf{w} - \lambda (\mathbf{e}_s^T \Delta \mathbf{w} + w_s),$$

в котором λ — множитель Лагранжа.

Дифференцируя лагранжиан по приращению параметров и по множителю λ , получаем

$$\Delta \mathbf{w} = -\frac{w_s}{[H^{-1}]_{ss}} H^{-1} \mathbf{e}_s.$$

Этому значению вектора приращений параметров соответствует минимальное значение лагранжиана

$$L_s = \frac{w_s^2}{2[H^{-1}]_{ss}}.$$

Полученное выражение называется мерой выпуклости функции ошибки E_D при изменении параметра w_s .

Функция L_s зависит от квадрата параметра w_s . Это говорит о том, что параметр с малым значением можно удалить из модели. Однако если величина $[H^{-1}]_{ss}$ достаточно мала, это означает, что данный параметр существенно влияет на качество аппроксимации модели.

В дальнейшем рассматривается влияние не отдельных параметров модели, а элементов суперпозиции. Будем считать, что элемент оказывает влияние, равное максимальному влиянию параметра, входящего в этот элемент. Для этого поставим в соответствие каждому элементу g_{ik} суперпозиции f_i скаляр

$$\alpha_{ik} = \max_{i \in I_k} L_s,$$

где I_k — множество индексов тех параметров, которые принадлежат функции g_{ik} .

2.3. Модификация суперпозиций

На каждой итерации алгоритма порождения моделей выполняется следующая последовательность шагов.

1. Каждая модель из множества моделей претендентов f_1, \dots, f_M настраивается, т. е. отыскиваются наиболее правдоподобные параметры \mathbf{w}^{MP} :

$$\mathbf{w}^{\text{MP}} = \arg \min_{\mathbf{w}} E_D(\mathbf{w} | D, f_i).$$

2. Выполняется обмен элементами суперпозиций между случайными парами моделей. Для этого:

а) случайно выбирается пара индексов $i, j \in \{1, \dots, M\}$;

б) в моделях f_i и f_j выбираются элементы g_{ik} и g_{jl} с вероятностью, пропорциональной значениям α_{ik} и α_{jl} соответственно;

в) порождаются новые модели f'_i и f'_j путем обмена моделями выбранными элементами.

Описанная последовательность выполняется M раз.

3. Выполняется модификация полученных моделей. Для этого в каждой модели из множества порожденных моделей $\{f'_i\}$ с заданной вероятностью выполняется замена элемента суперпозиции. Для этого:

а) рассматривается множество элементов $\{g_{ik}\}$ модели f_i , из этого множества случайно выбирается элемент g_{ik} ;

б) из подмножества порождающих функций G , имеющих такое же число аргументов, что и у элемента g_{ik} , случайно выбирается элемент g_s ;

в) элемент модели g_{ik} заменяется на элемент g_s в том случае, если число их аргументов совпадает.

4. Параметры порожденного множества моделей $\{f'_i\}$ настраиваются.

5. Из объединенного множества моделей $\{f_i\} \cup \{f'_i\}$ выбираются M моделей, которые имеют наименьшие значения функции ошибки $E_D(\mathbf{w}|D, f_i)$, $i = 1, \dots, M$. Выбранные модели используются в качестве моделей-претендентов на следующем шаге итерации.

Итеративный алгоритм останавливается, когда значение функции ошибки одной из моделей-претендентов имеет значение, меньше заданного, либо после заданного числа итераций. При этом считается, что искомая модель — модель с наименьшим значением функции ошибки.

3. Вычислительный эксперимент

На практике при моделировании зависимости волатильности $\sigma(K, t)$ эксперты учитывают факторы, определяемые типом опциона и контекстом торгов. В [10] были предложены правила построения математических моделей предполагаемой волатильности. Цель вычислительного эксперимента — сравнение моделей, полученных с помощью алгоритмов, предложенных в данной работе, и моделей начального приближения, предложенных экспертами с учетом упомянутых правил.

3.1. Исходные данные

Для анализа выбраны исторические данные торгов опционом Brent Crude Oil. Срок действия опциона — полгода, с 02.01.2001 по 26.06.2001. Тип опциона — put (право на продажу базового инструмента), символ CLG01. Базовый инструмент — нефть, символ NYM. Использовались ежедневные цены закрытия опциона и базового инструмента. Сетка цен исполнения опциона $\mathcal{K} = \{13.5, 13.0, 12.5, 12.0, 11.5, 11.0\}$.

Данный выбор обусловлен тем, что объемы торговли инструментом велики. Инструмент имеет низкую волатильность, вследствие чего среди точек $\sigma^{\text{imp}}(K, t)$ нет выбросов. В исходных данных имеются пропуски, так как опционы с ценами, далекими от цен базового инструмента, не торговались непосредственно после выпуска опционов. Эти данные исключены из регрессионной выборки.

Регрессионная выборка $\{(\mathbf{x}_n, y_n)\} = \{(\langle K_n, t_n \rangle, \sigma_n)\}$ была построена с помощью исходных данных — исторических цен опциона $C_{K,t}$ и базового инструмента P_t , где $K \in \mathcal{K}$,

$t \in T$, следующим образом. Для каждого значения $K \in \mathcal{K}$ и $t \in T$ вычисляется значение предполагаемой волатильности как аргумент минимума

$$\sigma_{K,t}^{\text{imp}} = \arg \min_{\sigma \in [0, 1.5]} (C_{K,t} - C(\sigma, P_t, B, K, t)),$$

где справедливая цена опциона C вычислена по формуле Блэка—Шоулза. Время t , выраженное в годах до момента исполнения опциона, рассчитывается по формуле $t = \tau/365$, где τ — число дней, оставшихся до исполнения опциона. Длина истории составляет 112 отсчетов времени. Для индексации выборки задана произвольная биекция $t, K \mapsto n$. Безрисковая ставка доходности $B = 0.075$, что соответствует исторической безрисковой ставке за рассматриваемый период. При отыскании минимума введено ограничение на значение волатильности, $\sigma \leq 1.5$; ни в одной точке исходных данных она не принимает большее значение.

3.2. Множество порождающих функций

Был выбран набор порождающих функций, наиболее часто встречающихся в используемых экономических моделях (табл. 1).

Т а б л и ц а 1. Порождающие функции

Функция	Описание	Параметры
$g(\mathbf{w}, x_1, x_2)$		
plus	$y = x_1 + x_2$	—
times	$y = x_1 x_2$	—
$g(\mathbf{w}, x_1)$		
divide	$y = 1/x$	—
multiply	$y = ax$	a
add	$y = x + a$	a
omexpl	$y = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}\right) + a$	λ, σ, ξ, a
linear	$y = ax + b$	a, b
parabolic	$y = ax^2 + bx + c$	a, b, c
cubic	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	a, b, c, d

3.3. Модели начального приближения

В качестве моделей начального приближения был взят набор из четырех моделей: f_1 — модель (2), предложенная экспертами, и ее вариации:

а) сумма параболической функции от цены исполнения и гауссиана от цены исполнения, умноженного на обратный корень времени, до исполнения

$$f_2 = (w_1 + w_2 K + w_3 K^2 + w_4 \exp(-w_5 K^2)) \sqrt{w_6 t};$$

б) квадратичная поверхность по времени и цене исполнения

$$f_3 = w_1 + w_2 K + w_3 t + w_4 K t + w_5 K^2 + w_6 t^2;$$

в) сумма гауссиана и линейной функции от цены исполнения, умноженная на кубическую функцию времени до исполнения,

$$f_4 = (w_1 + w_2 K + w_3 \exp(-w_4 K^2)) (w_5 t^3 + w_6 t^2 + w_7 t + w_8).$$

3.4. Параметры алгоритма модификации суперпозиций

Для модификации моделей был использован набор порождающих функций, описанный в работе [9]. При каждой итерации на основе множества моделей-претендентов порождались 40 новых моделей, из них 20 — модифицировались. Для следующей итерации выбиралось 20 лучших моделей. Алгоритм останавливался при достижении функции ошибки $E_D(\mathbf{w}|f, D) < 0.01$ или после 5000 генераций нового набора моделей-претендентов.

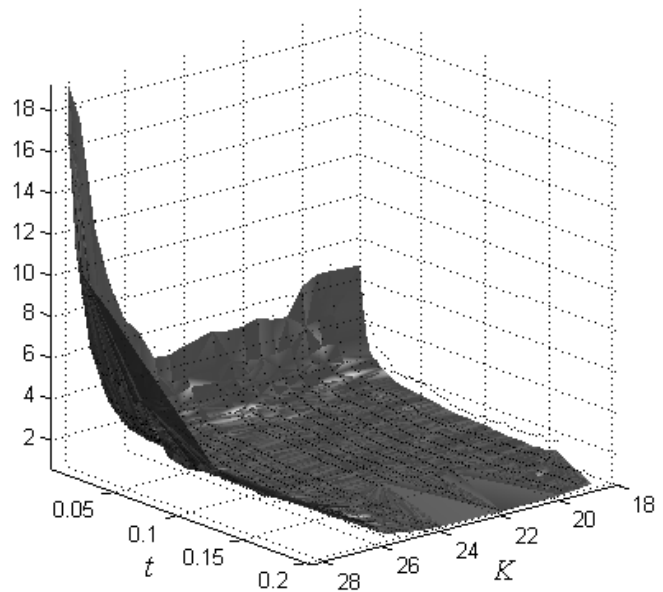
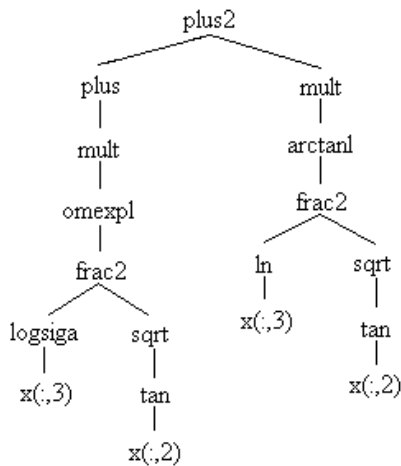
3.5. Результаты

Полученная модель имеет вид

$$f_{\text{best}} = (w_1 + w_2 K + w_3 \exp(-w_4 K^2)) (w_5 t^3 + w_6 t^2 + w_7 t + w_8).$$

Т а б л и ц а 2. Порожденные модели с наименьшей ошибкой SSE

Модель	Ошибка SSE	Число параметров	Мах ошибка на выборке	Число порождающих функций в суперпозиции
f_1	0.0590	15	1.5989	15
f_2	0.0593	12	1.8325	14
f_3	0.0596	15	1.6055	15
f_4	0.0601	15	1.5754	15
f_5	0.0602	14	1.5532	15
f_6	0.0603	14	1.4684	15
f_7	0.0603	15	1.4324	14
f_8	0.0603	15	1.4409	15
f_9	0.0603	14	1.5203	15
f_{10}	0.0604	14	1.7636	15



Одна из лучших полученных моделей

Даже при малом числе итераций в множестве моделей-претендентов остаются в основном те модели, в которых волатильность зависит от времени как обратный квадратный корень. Структура выбираемых моделей имеет вид произведения функции от времени на функцию от цены исполнения, что говорит о независимости профиля волатильности от времени. Это подтверждает гипотезу о малости изменчивости самой волатильности, высказанную в [1], и гипотезу об обратной зависимости времени и волатильности, высказанную в [10].

Полученные модели не обладают высокой сложностью, что позволяет экспертам легко их интерпретировать. В табл. 2 представлены доставляющие наименьшую ошибку модели, созданные программой, на рисунке показана одна из лучших полученных моделей.

3.6. Обсуждение

В [10] предложены математическое описание моделей волатильности и правила построения функции $\sigma(K, t)$. Правила используются для моделирования волатильности в случае относительно малого количества опционов.

Функция $\sigma(K, t)$ волатильности от цены исполнения представляется в виде суммы четной и нечетной функций, каждая — от одного аргумента. Четная функция экспертами называется *smile*, нечетная — *skew*.

В работе [10] рассматриваются регрессионные модели типа *smile*. Правило *sticky strike* предполагает, что $\sigma(K, t)$ не зависит цены исполнения K . Это предположение требуется для того, чтобы чувствительность цены опциона к K была равна $\Delta = \frac{\partial C}{\partial K}$, где Δ является чувствительностью по отношению к цене базового инструмента. Величина Δ для инструмента — это частная производная цены опциона C по отношению к цене базового инструмента S , $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$.

Здесь для целей вычисления частная производная цены опциона C полагается функцией цены базового инструмента S , волатильности $\sigma(K, t)$ и времени t . Это предположение позволяет пользоваться формулой Блэка—Шоулза для вычисления Δ с волатильностью, равной предполагаемой волатильности опциона.

В модели, основанной на правиле *sticky strike*, σ является функцией только от цены исполнения K и времени до исполнения t и не зависит от цены базового инструмента S .

Был проведен вычислительный эксперимент, в котором модели могли зависеть от цены базового инструмента наравне с ценой опциона, временем до исполнения и ценой исполнения, однако в таком случае лучшие модели от цены базового инструмента не зависели.

Правило *square root of time* предполагает связь между волатильностями опционов различных цен исполнения и времен до исполнения. В работе это правило использовано в формулировке

$$\sigma(K, t) = \Phi \frac{\ln(K)}{\sqrt{t}}.$$

Таким образом, волатильность — это функция одного параметра, являющегося функцией от переменных K и T .

В лучших из полученных моделей волатильность зависит от времени обратно-корневым образом.

Заключение

Предложен алгоритм индуктивного порождения допустимых регрессионных моделей. Модели представлены в виде произвольной суперпозиции заданных нелинейных параметрических функций. На каждой итерации работы алгоритма модели-претенденты последовательно порождаются и настраиваются по исходной выборке. Для следующей итерации выбираются модели, имеющие наибольшее значения заданной целевой функции.

Для иллюстрации работы алгоритма рассмотрена модель зависимости волатильности биржевого опциона от цены исполнения и времени до исполнения. Используются исторические цены опциона и базового инструмента за полгода. Модели, полученные в ходе вычислительного эксперимента, сравнивались с моделями, которые были предложены экспертами.

В результате исследований получены интерпретируемые модели волатильности биржевого опциона. Качество аппроксимации этих моделей выше, чем у начальной модели, а сложность моделей не превышает сложности начальной модели.

В полученных моделях зависимость волатильности от времени является обратно-корневой, что соответствует гипотезе, высказанной в [10]. Также наблюдается логарифмическая зависимость волатильности от цены исполнения, что соответствует экспертной оценке (2). При этом среди лучших моделей присутствуют зависящие не от каждого из параметров в отдельности, а от частного логарифма цены исполнения и корня времени до исполнения, что полностью соответствует гипотезам, высказанным в [10–12].

Разработанное программное обеспечение и исходные данные вычислительного эксперимента находятся в репозитории [13] и свободно распространяются на условиях лицензии GNU GPL.

Список литературы

- [1] ШИРЯЕВ А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС, 2004. Т. 1. Факты. Модели.
- [2] HULL J.C. Options, Futures and Other Derivatives. New Jersey, USA: Prentice Hall, 2000.
- [3] KELLY C.T. Iterative Methods for Optimization. North Carolina State University: SIAM, 1999. 188 p.
- [4] MALADA H.R., IVAKHNENKO A.G. Inductive Learning Algorithms for Complex Systems Modeling. USA: CRC Press, 1994.
- [5] ZELINKA I., OPLATKOVA Z., NOLLE L. Analytic programming — symbolic regression by means of arbitrary evolutionary algorithms // Intern. J. of Simulation Systems, Science & Technology. 2005. Vol. 6, N 9. P. 44–56.
- [6] BISHOP C. Pattern Recognition And Machine Learning. Springer Verlag, 2006.
- [7] LECUN Y., DENKER J.S., SOLLA S.A. Optimal brain damage / Touretzky D.S. Advances in Neural Information Processing Systems 2. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann. 1990. P. 598–605.
- [8] HASSIBI B., STORK D.G. Second order derivatives for network pruning: Optimal brain surgeon / Hanson S.J., Cowan J.D., Giles C.L. Advances in Neural Information Processing Systems 5. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann. 1993. P. 164–171.

- [9] СТРИЖОВ В.В. Поиск параметрической регрессионной модели в индуктивно заданном множестве // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 1. С. 93–102.
- [10] DAGLISH T., HULL J., SUO W. Volatility surfaces: theory, rules of thumb, and empirical evidence // Quantitative Finance. 2007. Vol. 7, N 5. P. 507–524.
- [11] DERMAN E. Modeling the Volatility Smile. USA: Columbia University, 2006. 30 p.
- [12] DERMAN E., KANI I. The volatility smile and its implied tree // RISK. 1994. Vol. 7. N 2. P. 139–145.
- [13] STRIJOV V. ET AL. MVR Composer, software package. <http://www.sourceforge/mvr>. 2008.

*Поступила в редакцию 3 сентября 2008 г.,
в переработанном виде — 12 января 2009 г.*