

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ О ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН ПОГРУЖЕННЫМ В ЖИДКОСТЬ ТЕЛОМ*

С. И. ГОРЛОВ

Омский филиал Института математики

им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия

e-mail: gorlov@iitam.omsk.net.ru

The review of the numerical methods for the solution of non-linear boundary-value problems on surface and internal waves caused by the contour motion is given. The horizontal and vertical oscillations, acceleration from the rest as well as the vertical rise of the contour to the free surface are considered. The problems of simulating separated flow about the contour and the interaction of vortical wakes with the interface of fluids are considered. The research results obtained with the help of the above-mentioned methods are analysed.

Нестационарные нелинейные задачи генерации поверхностных и внутренних волн движущимся в жидкости телом являются предметом интенсивного исследования. Этот интерес вызван возможностью моделирования сложных физических течений и решения целого ряда практических задач. В частности, решение задачи в полной нелинейной постановке позволяет исследовать обрушение волн за телом, приближение контура к границе раздела на малое расстояние, колебания тела с большой амплитудой под свободной поверхностью и ряд других. Это обстоятельство, несомненно, делает подобный класс задач актуальным.

Успехи в решении нелинейных нестационарных волновых задач связаны с развитием численных методов, наиболее полный обзор которых составил R. W. Yeung в [60], где даны классификация различных методик, особенности их использования, представлены оценки эффективности алгоритмов решения задач, приведены некоторые результаты по расчету волновых течений. В обзоре И. В. Стуровой [9] представлены результаты численных расчетов поверхностных волн в однородной несжимаемой жидкости. Рассмотрены случаи генерации волн различными возмущениями, в том числе погруженным в жидкость телом. Для некоторых задач приведено сопоставление с результатами линейной теории. Систематизации численных методов решения нелинейных нестационарных задач о генерации гравитационных волн посвящен обзор J. E. Romate [42], в котором представлены некоторые теоретические результаты, касающиеся устойчивости и точности числовых расчетов. Особое внимание уделено методам, позволяющим моделировать обрушение волн.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №96-01-00093.

© С. И. Горлов, 1998.

В области задач подобного класса наибольшее число работ посвящено нестационарному горизонтальному движению тела под свободной поверхностью тяжелой жидкости. Первые результаты, ставшие классическими, получены при помощи метода конечных разностей в работах Н. J. Haussling и R. M. Coleman [24, 25], где рассмотрено течение несжимаемой жидкости, вызванное равномерным ускорением до постоянной скорости кругового цилиндра из состояния покоя. Задача исследовалась в полной нелинейной постановке, свободная поверхность описывается однозначной функцией. Изучен период разгона до постоянной скорости и момента появления крутых волн. Описаны профили свободной поверхности, а также распределение давления по контуру. Полученные результаты сравниваются с соответствующим линейным стационарным решением. Исследован переход по параметру из режима глубокого погружения, где нелинейные эффекты незначительны, к режимам малых отстояний от свободной поверхности, где линейная теория дает неприемлемые результаты. Особого внимания заслуживает методика использования подвижной системы координат, получившая широкое распространение и позволившая рассмотреть широкий круг задач (см. обзор Н. J. Haussling [23]). S. P. Shanks и J. F. Thompson при помощи метода конечных разностей и криволинейных координат рассмотрели систему уравнений Навье—Стокса для задачи о разгонном и колебательном движении контура под свободной поверхностью [43]. Жидкость предполагается вязкой. Приведены результаты расчетов гидродинамических реакций крылового профиля и кругового цилиндра. Более подробное описание используемого численного метода приведено в обзорной работе J. F. Thompson, Z. U. Warsi и C. W. Mastin [50]. Разгон крыла и эллиптического контура рассмотрен S. M. Yen, K. D. Lee, T. J. Akai [59]. Используется метод конечных элементов для вычисления поля скоростей. Дискретизация по времени проведена с помощью метода конечных разностей. В данной работе рассмотрено также нестационарное движение области давления.

Следует отметить, что в последнее время интерес к сеточным методам решения задач о взаимодействии тела и свободной поверхности значительно возрос. В частности, в работах D. M. Greaves, A. G. L. Borthwick, G. X. Wu, R. Eatock Taylor [19, 20] разработан метод подвижных конечных элементов. Используется специальная сетка узлов, которая адаптируется на каждом шаге по времени с учетом особенностей течения. Обзор численных методов, использующих подвижную сетку узлов, выполнен Н. Miyata [38]. При помощи таких методов можно добиться высокой точности решения задач и моделировать сложные волновые движения, вызванные нестационарным движением контура. Обтекание погруженного крылового профиля рассмотрено K. J. Kang [31]. Для решения уравнений Эйлера, описывающих течение жидкости, используется метод конечных объемов. Отмечается, что метод неспособен моделировать волны большой крутизны. Некоторая модификация этого метода предложена в работе M. Vogt и K. J. Kang [56]. Рассмотрено обтекание гидропрофиля и обрушение волн над неровностью дна. Метод конечных объемов использован также C. de Jouët, J. M. Le Gouez, O. Put, S. Rigaud для решения системы уравнений Навье—Стокса и уравнений Эйлера [30]. Используется криволинейная адаптивная сетка. Рассмотрены особенности решения стационарных и нестационарных задач о движении контура под свободной поверхностью. Эта же задача исследована S. Muzaferija, M. Perić и S.-D. Yoo в работе [41]. Предложен новый численный метод, основанный на дискретизации при помощи конечных объемов законов сохранения. Сетка узлов меняется по времени вместе с формой свободной поверхности. Интегрирование по времени проводится по схеме Эйлера (первый порядок точности) или трехшаговой процедуры (второй порядок). Методом установления решена стационарная задача о движении крылового профиля. Получено хорошее соответствие экспериментальным данным из работы J. H. Duncan [17].

Значительные успехи при решении нелинейной начально-краевой задачи о горизонтальном движении контура под свободной поверхностью жидкости получены с помощью методов граничных интегралов. P. L.-F. Liu и J. A. Liggett [34] рассмотрели плавный разгон кругового цилиндра с постоянным ускорением. Использовались граничные элементы, свободная поверхность описывалась однозначной функцией. Метод граничных элементов использован также К. Mizumura [39] для решения задачи о генерации волн круговым цилиндром. Движение происходит по определенному закону под свободной поверхностью ограниченной снизу жидкости. Исследования проведены как при докритических, так и при закритических числах Фруда. При сверхкритическом режиме обнаружен подъем свободной поверхности над цилиндром, а при докритическом — понижение. В этой задаче течение остается устойчивым. Обрушение волн не происходит вследствие специального выбора закона движения тела. Y. J. Kim и H. J. Hwang [32] исследовали задачу горизонтального движения несущего профиля под свободной поверхностью. Предложен спектральный метод граничных элементов. Представлены расчеты формы свободной поверхности. Случай движения вблизи границы раздела водной и воздушной сред рассмотрен в работе L. Chen и S. W. Vorus [16]. Решение строится в лагранжевых координатах с использованием теории потенциала. Приведены результаты численного эксперимента по расчету профилей генерируемых волн.

Из работ отечественных авторов, посвященных генерации поверхностных волн при мгновенном разгоне кругового цилиндра, следует указать исследования, проведенные А. Г. Терентьевым и К. Е. Афанасьевым [10]. Решение строится на основе метода конечных элементов. Представлены результаты расчета формы свободной поверхности. Подробно рассмотрено решение задачи в момент опрокидывания волны. Обсуждаются вопросы точности полученного решения, приведены результаты тестовых расчетов. Как показано в работе К. Е. Афанасьева [1], описанный в [10] численный метод имеет ряд преимуществ. В частности, предложенная процедура решения задачи позволяет следить за отдельными частицами, что позволяет моделировать такие сложные процессы, как обрушение волн. Некоторые результаты по решению данной задачи содержатся в работе К. Е. Афанасьева, М. М. Афанасьевой и А. Г. Терентьева [3]. Другие исследования, проведенные К. Е. Афанасьевым, связаны с вопросами существования различных режимов течений жидкости, вызванных горизонтальным движением кругового цилиндра [2]. Для одного из таких режимов характерно формирование гармонических волн, убегающих вверх по потоку. Соответствующее волновое сопротивление имеет затухающий волнообразный характер. Подобное поведение гидродинамических нагрузок подтверждается недавними исследованиями Y. Liu и D. K. P. Yue [35] по асимптотическому анализу генерируемых возмущений на больших временах. Используется метод граничных интегральных уравнений, содержащих в качестве неизвестных интенсивности источников, расположенных вдоль контура. Обнаружено, что волновое сопротивление затухает как $t^{-3/2}$, что подтверждается результатами численного эксперимента.

Особое место в решении нелинейных нестационарных волновых задач принадлежит обобщенному вихревому методу, разработанному G. R. Baker, D. I. Meiron и S. A. Orszag [13]. Суть метода такова. Рассматриваются уравнения относительно координат частиц, лежащих на границе раздела сред, и интенсивностей особенностей (диполей, вихрей, источников), моделирующих жидкие и твердые границы течения. Результирующие интегральные уравнения относительно интенсивностей особенностей являются уравнениями Фредгольма второго рода. Эти уравнения могут быть эффективно решены при помощи итераций для плоских и пространственных задач. Показано применение разработанно-

го метода к обрушающимся волнам над дном определенной структуры, исследована задача взаимодействия поверхностных и внутренних волн. Большое внимание уделено вопросам постановки условий, связанных с излучением волн. На основе этого метода были решены следующие задачи: генерация поверхностных волн эллиптическим цилиндром и областью давления (G. R. Baker, D. I. Meiron и S. A. Orszag [14]); определение нелинейного потенциального течения около пары вихрей, приближающихся к свободной поверхности (J. G. Telste [47]); взаимодействие вихревого следа со свободной поверхностью (D. Yu и G. Tryggvason [62]); исследование неустойчивости Релея — Тейлора и Кельвина — Гельмгольца (G. R. Baker, D. I. Meiron и S. A. Orszag [15, 37]).

Следующий класс задач связан с определением возмущений свободной поверхности, вызванных поднимающимся контуром. В работе J. G. Telste [48] рассмотрено решение задачи об определении плоского потенциального течения вокруг кругового цилиндра, приближающегося к свободной поверхности. Цилиндр из состояния глубокого погружения плавно ускоряется от нулевой до постоянной вертикальной скорости. Для получения возвышения свободной поверхности и линий тока применен вихревой метод, разработанный G. R. Baker, D. I. Meiron и S. A. Orszag в [13]. Для нескольких значений скоростей приведены результаты расчетов, в том числе распределение давления по контуру. Приведено сравнение с цилиндром, приближающимся к стенке и движущимся в безграничной жидкости. В работе А. Г. Терентьева, К. Е. Афанасьева и М. М. Афанасьевой [49] при помощи метода граничных элементов выполнены расчеты по вертикальному движению (вверх и вниз) цилиндра под свободной поверхностью. Пересекая свободную поверхность, тело несет на себе слой жидкости. Этот эффект объясняется наличием инерционных сил. Плоская краевая нелинейная нестационарная задача о поверхностных волнах, вызванных вертикальным движением цилиндра, рассмотрена в работе Р. А. Туванд и Т. Милох [53]. Анализируется начальная стадия процесса. Условие безотрывного обтекания цилиндра выполнено точно. Потенциал скорости, смещение свободной поверхности и координаты цилиндра представлены в форме степенных рядов по времени. Получены и решены (с использованием биполярных координат) задачи для трех первых членов степенных рядов. Найдено аналитическое выражение для гидродинамической силы. Рассчитана форма свободной поверхности на начальной стадии процесса для цилиндра, поднимающегося к свободной поверхности. Рассмотрены также случаи горизонтального движения и под углом к горизонту. Эта же задача в дипольном приближении рассмотрена Р. А. Туванд и Т. Милох [54]. Также используется разложение в степенные ряды по времени. Получено выражение для гидродинамической силы, действующей на цилиндр на начальной стадии движения. Оно состоит из импульсного и степенного по времени слагаемых. Приведены зависимости импульсивных сил от радиуса цилиндра. Движение кругового цилиндра с постоянной скоростью к свободной поверхности тяжелой жидкости рассмотрено М. Greenhow и S. Moyn в работах [22, 40]. Результаты расчета формы свободной поверхности сравниваются с данными, полученными при помощи асимптотических методов Р. А. Туванд и Т. Милох [53]. Предложенный в работе метод позволяет рассчитывать течения на любых временах до выхода из воды. Следует отметить, что одним из авторов эта задача рассматривалась ранее в [21]. Использован метод комплексных граничных элементов, разработанный Т. Vinje и Р. Brevig [55]. Подробно описан процесс приближения к свободной поверхности. Сначала наблюдается подъем свободной поверхности, затем постепенное образование тонкого слоя над цилиндром и образование неоднозначности за ним. Такая картина наблюдается в эксперименте, представленном в монографии О. М. Faltinsen [18]. На цилиндре формируются большие области отрицательных давлений во время последней стадии выхода, которое

объясняет мгновенное обрушение свободной поверхности в эксперименте.

В этой области рассматривались также колебательные движения тел под свободной поверхностью тяжелой жидкости. В упомянутой ранее работе Н. J. Haussling и R. M. Coleman [24] исследовали возмущения свободной поверхности для кругового цилиндра, совершающего горизонтальные колебания. Приведены результаты по расчету формы свободной поверхности. Проведено сопоставление с результатами, полученными по линейной теории. Задача об определении гидродинамических нагрузок цилиндра, совершающего вертикальные колебания под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины, рассмотрены в работе S. Jagannathan [29]. Использован метод граничных интегральных уравнений. Приведены данные по расчету гидродинамических характеристик и формы свободной поверхности. Рассмотрена также задача об определении гидродинамических нагрузок, действующих на цилиндр в волновом потоке. Проведено сопоставление с экспериментальными данными. G. X. Wu и R. Eatock Taylor [57] рассмотрели двумерную нелинейную нестационарную задачу о колебаниях контура под свободной поверхностью. Предложенный метод основан на теории потенциала. Строится итерационный процесс по времени. На каждом шаге используются две альтернативные методики. Одна из них основана на методе граничных элементов в комплексной плоскости. Комплексный потенциал предполагается меняющимся вдоль каждого элемента по линейному закону, и решение получается выполнением граничных условий в узлах элементов. Другая методика основана на конечно-элементной формулировке, разработанной авторами в [58]. Используются треугольные элементы и линейные функции формы. Решение находится при помощи метода Галеркина. Получены результаты для возвышения волн, генерируемых волнопродуктором. Также представлены результаты для кругового цилиндра, совершающего колебания под свободной поверхностью. Для всех рассмотренных задач конечно-элементная формулировка оказалась более предпочтительной, чем метод граничных элементов. Колебательные движения полностью погруженного кругового цилиндра под свободной поверхностью жидкости конечной глубины рассмотрены в работе A. F. Teles da Silva и D. H. Peregrine [46]. Предложена аналитико-численная процедура расчета профилей неустановившихся волн. В любой фиксированный момент времени производится расширение области, занятой жидкостью, за счет симметричного относительно дна отражения жидкого объема. С помощью теоремы Коши о вычетах потенциал во внутренних точках жидкости выражен через интеграл по границе области. Применение этого интегрального соотношения приводит к сингулярному интегральному уравнению. Далее проводится дискретизация границы с аппроксимацией интегралов на звеньях ломаной по квадратурной формуле трапеций. В результате получена система алгебраических уравнений, которая решается численно. Шаг по времени проводится с использованием рядов Тейлора пятого порядка. В начальный момент времени жидкость предполагается невозмущенной. Представлены результаты численных экспериментов по расчету формы свободной поверхности и гидродинамических характеристик. Помимо колебательных движений рассмотрено также равномерное движение кругового цилиндра по окружности. Генерация неустановившихся волн круговым цилиндром, совершающим гармонические вертикальные и горизонтальные движения, рассмотрена в работе Y. J. Kim, D. J. Kim и J. H. Hwang [33]. Предложен численный метод расчета плоских нелинейных безвихревых волн в бассейне бесконечной глубины. Он использует снос граничных условий на свободной поверхности на горизонтальную плоскость путем разложений в ряды Тейлора и представление потенциала в форме степенного ряда по крутизне волн. В каждом приближении для заданного момента времени потенциал скорости представляется в виде суммы потенциала, связанного с волнами, и потенциала,

соответствующего обтеканию тела безграничным потоком. Численное нахождение этих потенциалов опирается на метод граничных элементов и быстрое преобразование Фурье. Для расчета по времени используется метод Рунге—Кутты четвертого порядка. Метод реализован для целого ряда задач. Учитываются нелинейности пятого порядка, на боковых стенках вычислительного бассейна вводится искусственное демпфирование в форме локальных диссипативных сил. Показана высокая вычислительная эффективность алгоритма.

Среди рассматриваемых вопросов отдельно стоят задачи обтекания гидродинамических особенностей неустановившимся потоком со свободной границей. В этом случае необходимость выполнения сложных граничных условий на контуре отпадает. Это обстоятельство позволяет использовать численно-аналитические методы решения задачи, обладающие высокой точностью. В частности, в работе E. M. Sozer и M. D. Greenberg [45] для решения интегральных уравнений задачи нестационарного обтекания вихря и источника применен как численный метод, так и метод возмущений. Для получения интегральных уравнений используется метод вихревых слоев, разработанный S. J. Zang и M. D. Greenberg [63]. Рассмотрены вопросы определения формы свободной поверхности и возможность существования стационарного решения. Как отмечается в работе, ранее рассматривались только стационарные течения, качественный характер которых был одинаков как для вихря, так и для источника. Нестационарное решение допускает оценки устойчивости найденных ранее стационарных решений, а также обнаруживает существенное различие между течениями, вызванными вихрем и источником. Получены следующие результаты: для безграничного течения стационарное предельное решение получено для интенсивностей источников, больших критических значений, найденных ранее; для жидкости конечной глубины стационарное предельное решение получено для вихря и источника, причем их интенсивности больше критических значений, найденных другими авторами; качественный характер линий тока одинаков для вихря и источника только в случае предельных стационарных режимов обтекания под свободной поверхностью неограниченной снизу жидкости. Решение линейной и нелинейной задач нестационарного обтекания диполя под свободной поверхностью тяжелой жидкости рассмотрено в работе W. K. Soh [44]. Разработан метод для вычисления нелинейных волн, основанный на формулировке комплексного потенциала. Представлены результаты по расчету формы свободной поверхности. Проведено сопоставление амплитуд и длин генерируемых волн для линейной и нелинейной задач.

Наибольший интерес в настоящее время вызывают задачи отрывного обтекания контура под свободной поверхностью тяжелой жидкости. Этот интерес обусловлен сложным характером взаимодействия генерируемых волн и вихревых следов, сходящих с контура. Результаты, полученные в этой области, немногочисленны и заслуживают особого внимания. Обзор работ по данной тематике выполнен H. J. Lugt [36]. В работе S. W. Hong и D. S. Gong [27] рассмотрена задача о влиянии волн, генерируемых эллиптическим контуром, на его волновое сопротивление и подъемную силу. Для моделирования следов, сходящих с контура, используется метод “вихревых зерен”. Для вычисления суммарного поля скоростей применен численный метод комплексных граничных элементов, разработанный одним из авторов в [26]. Условие затухания возмущений удовлетворяется введением демпфирующего слоя. Точка схода на контуре находится из решения стационарных уравнений пограничного слоя. Изучено влияние погружения на структуру вихревого следа и значения коэффициентов гидродинамических нагрузок. Приведены результаты по расчету формы свободной поверхности и вихревых следов. Влияние тела исследовалось вариацией параметра отношения полуосей эллипса. На основании проведенного численного экспе-

римента сделан вывод об адекватности такого моделирования. В частности, зависимость гидродинамических нагрузок от числа Струхала хорошо согласуется с известными результатами. Обнаружено сильное влияние свободной поверхности на структуру вихревого следа. R. W. Yeung и M. Vaidhyanathan в работе [61] рассмотрели задачи о колебаниях сильно заглубленного цилиндра под свободной поверхностью и о вертикальных колебаниях прямоугольного цилиндра и поверхности. Для численного моделирования отрывных течений вязкой жидкости за телами при образовании волн на свободной поверхности использован метод случайных вихрей. Получено хорошее соответствие результатам лабораторных измерений. Течение вокруг цилиндра, помещенного в волновой поток, рассмотрено в работе Н. Ishida, Т. Saitoh и С. Yatomі [28]. Использовался метод распределения особенностей по поверхности контура. Уравнения волновых сил получены с применением уравнения моментов, распространенного на неустановившиеся течения. Оценены коэффициенты волновых нагрузок на контур. В качестве примеров приведены картины течения, возникающего вокруг кругового цилиндра. Показаны зависимости волнового сопротивления, подъемной силы, а также момента от времени. Работа W. T. Tsai и D. K. P. Yue [51] посвящена исследованию нелинейного взаимодействия между свободной поверхностью и вихревым следом, сошедшим с вертикальной пластины, пересекающей свободную поверхность. Задача решается численно с использованием совместного эйлерово-лагранжевого подхода, описанного в [52]. Пластина начинает двигаться из состояния покоя. Основным параметром задачи является число Фруда Fr . В зависимости от этого параметра выделено три класса взаимодействия. Для докритических чисел Фруда ($Fr < 0.7$) обрушение волн происходит на обеих сторонах пластины до момента начала взаимодействия свободной поверхности и вихревых следов. Для около- и закритических чисел Фруда взаимодействие между свободной поверхностью и вихревой структурой сводится к развитию вихревой пелены, которая в конце концов сворачивается в спираль как результат действия неустойчивости Кельвина—Гельмгольца. В области $Fr \sim 0.7 - 1.0$ эффект влияния свободной поверхности на “жгутование” остается слабым. В то же время при $Fr > 1.0$ сильное взаимодействие приводит к входу спиралей в свободную поверхность. Приведены расчеты сил и формы свободной поверхности.

Среди работ отечественных авторов, посвященных исследованию отрывного обтекания тел нестационарным потоком тяжелой жидкости со свободной поверхностью, следует отметить исследования В. Г. Щигунова [11]. Рассмотрена двумерная задача о движении произвольного объекта под границей раздела двух идеальных несжимаемых жидкостей различной плотности. Для моделирования жидкой и твердой границ применен вихревой метод. Получено нелинейное уравнение для интенсивности вихревого слоя, моделирующего границу раздела жидкостей, без каких-либо дополнительных упрощений и содержащее члены всех порядков. В качестве иллюстрации и проверки модели решены задачи о движении из состояния покоя под границей раздела жидкостей таких объектов, как точечный вихрь, телесный профиль и круговой цилиндр. Моделирование в двух последних случаях выполнено с учетом эволюции вихревых следов, сходящих с задней кромки в случае профиля и с точек отрыва погранслоя для цилиндра. Результаты численного моделирования для вихря и цилиндра показали хорошее соответствие физической картине течения. Результаты расчетов для профиля хорошо согласуются с результатами линейной теории в том диапазоне чисел Фруда и глубин погружения, в котором такое сопоставление оправдано. Сделан вывод о применимости предлагаемого метода в широком диапазоне чисел Фруда и глубин погружения. Дальнейшее развитие метода, позволяющее более точно моделировать обрушение волн за контуром, предложено автором в [12]. При рассмотре-

нии работ, посвященных данной тематике, следует упомянуть метод дискретных вихрей. При помощи этого метода в работах В. И. Бабкина, С. М. Белоцерковского, С. И. Гуляева, А. В. Дворака, Н. М. Молякова, Д. А. Теселкина [4–8] рассмотрены двумерные нелинейные задачи нестационарного отрывного обтекания с учетом влияния силы тяжести, пространственные линейные и нелинейные задачи, а также задачи об импульсивном движении тел у жидкой границы. Отдельно рассмотрены вопросы организации эффективных вычислительных алгоритмов на основе разработанного метода.

Методы, описанные в настоящем обзоре, могут быть использованы для решения широкого класса задач нестационарной волновой гидродинамики, а приведенные результаты — для проверки правильности при отладке новых вычислительных алгоритмов.

Автор выражает глубокую признательность И. В. Стуровой, А. А. Коробкину, Б. Е. Протопопову и В. Г. Щигунову за материалы, предоставленные при составлении данного обзора.

Список литературы

- [1] АФАНАСЬЕВ К. Е. Моделирование свободных границ в гидродинамике идеальной жидкости. В *“Гидродинамика ограниченных потоков”*, Изд-во Чувашского гос. ун-та, Чебоксары, 1988, 9–18.
- [2] АФАНАСЬЕВ К. Е. Решение нелинейных задач гидродинамики идеальной жидкости со свободными границами методами конечных и граничных элементов: *Дис. . . . докт. физ.-мат. наук*, Казань, 1997.
- [3] АФАНАСЬЕВ К. Е., АФАНАСЬЕВА М. М., ТЕРЕНТЬЕВ А. Г. Исследование эволюции свободных границ методами конечных и граничных элементов при нестационарном движении тел в идеальной несжимаемой жидкости. *Изв. АН СССР. МЖТ*, №5, 1986, 8–13.
- [4] БАБКИН В. И., БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ С. М., ГУЛЯЕВ В. В., МОЛЯКОВ Н. М. Метод дискретных вихрей в задачах гидродинамики с жидкими границами. *Докл. АН СССР*, **254**, №5, 1980, 1092–1096.
- [5] БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ С. М., ДВОРАК А. В., МОЛЯКОВ Н. М. Метод дискретных вихрей в задачах гидродинамики с линейными условиями на границе раздела сред. *Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского*, **1311**, 1983, 133–147.
- [6] ДВОРАК А. В. Численный метод решения задач гидродинамики с жидкими границами. *Там же*, **1313**, 1986, 281–291.
- [7] ДВОРАК А. В., МОЛЯКОВ Н. М., ТЕСЕЛКИН Д. А. Движение тел у границы раздела сред. *Вопросы кибернетики. Численный эксперимент в прикладной аэрогидродинамике*, №124, 1986, 115–129.
- [8] МОЛЯКОВ Н. М. Нестационарное обтекание профиля у поверхности раздела жидкости. *Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского*, **1313**, 1986, 336–348.

- [9] СТУРОВА И. В. Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн. *Препринт №5*, ВЦ СО АН СССР, Красноярск, 1990.
- [10] ТЕРЕНТЬЕВ А. Г., АФАНАСЬЕВ К. Е. *Численные методы в гидродинамике*. Изд-во Чувашского гос. ун-та, Чебоксары, 1987.
- [11] ЩИГУНОВ В. Г. Вихревой метод решения нелинейных нестационарных волновых задач. В *“Вычисл. технологии”*, ИВТ СО РАН, Новосибирск, **4**, №11, 1995, 287–295.
- [12] ЩИГУНОВ В. Г. Численный метод решения задач нестационарного нелинейного волнообразования. *Тез. докл. научно-техн. конф. “Проблемы мореходных качеств судов и корабельной гидромеханики: XXXVIII Крыловские чтения”*. ЦНИИ им. ак. А. Н. Крылова, СПб, 1997, 186–187.
- [13] BAKER G. R., MEIRON D. I., ORSZAG S. A. Generalized vortex methods for free-surface flow problems. *J. Fluid Mech.*, **123**, 1982, 477–501.
- [14] BAKER G. R., MEIRON D. I., ORSZAG S. A. Application of a generalized vortex method to nonlinear free-surface flows. *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics*, Paris, 1981, 179–191.
- [15] BAKER G.R., MEIRON D.I., ORSZAG S.A. Vortex simulations of the Rayleigh — Taylor instability. *J. Phys. Fluids*, **23**, 1980, 1485–1488.
- [16] CHEN L., VORUS W. S. Application of a vortex method to free surface flows. *Int. J. Num. Methods in Fluids*, **14**, No. 11, 1992, 1289–1310.
- [17] DUNCAN J. H. The breaking and non-breaking wave resistance of a two-dimensional hydrofoil. *J. Fluid Mech.*, **126**, 1983, 507–520.
- [18] FALTINSEN O. M. *Sea loads on ships and offshore structures*. Cambridge University Press, 1990.
- [19] GREAVES D. M., BORTHWICK A. G. L., WU G. X., EATOCK TAYLOR R. A moving boundary finite element methods for fully nonlinear wave simulations. *J. Ship Research*, **41**, No. 3, 1997, 181–194.
- [20] GREAVES D. M., WU G. X. Quadtree-based methods for numerical simulation of fluid flow. *Proc. 97’National Conf. of China on Hydrodynamics*, 1997, 1–16.
- [21] GREENHOW M. Water entry and exit of horizontal circular cylinder. *Appl. Ocean. Res.*, **10**, No. 4, 1988, 191–198.
- [22] GREENHOW M., MOYO S. Water entry and exit of horizontal circular cylinders. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A355**, 1997, 551–563.
- [23] HAUSSLING H. J. Solutions of nonlinear water wave problems using boundary-fitted coordinate systems. *Appl. Math. and Comput.*, No. 10–11, 1982, 385–407.
- [24] HAUSSLING H. J., COLEMAN R. M. Finite-difference computations using boundary-fitted coordinates for free-surface potential flows generated by submerged bodies. *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics*, Berkeley, 1977, 221–233.

- [25] HAUSSLING H. J., COLEMAN R. M. Nonlinear water waves generated by an accelerated circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, **92**, No. 4, 1979, 767–781.
- [26] HONG S. W. A complex velocity boundary element method for nonlinear free surface problems. *J. Ocean Engng. and Technology*, **4**, No. 1, 1990, 62–70.
- [27] HONG S. W., GONG D. S. Forces on an elliptic cylinder in uniform free surface flow. *Proc. of the 10th Ocean Eng. Symp.*, Korea, 1991, 117–124.
- [28] ISHIDA H., SAITOH T., YATOMI C. Wave force equation by using singularity-distribution method. *Proc. of the 4th Int. Offshore and Polar Eng. Conf.*, Osaka, **3**, 1994, 263–268.
- [29] JAGANNATHAN S. Non-linear free surface flows and an application of the Orlanski boundary condition. *Int. J. Num. Methods in Fluids*, **8**, No. 9, 1988, 1051–1070.
- [30] JOUËTTE DE C., GOUEZ LE J.M., PUT O., RIGAUD S. Volume of fluid method (VOF) applied to non-linear wave problems on body-fitted grids. *Proc. 11th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Hamburg, 1996.
- [31] KANG K.J. Numerical simulation of nonlinear waves about a submerged hydrofoil. *Ibid.*, Hamburg, 1996.
- [32] KIM Y. J., HWANG J. H. Time-domain calculation of nonlinear free-surface flows around two-dimensional lifting foils. *Int. Conf. Hydrodyn.*, Wuxi, 1994, 436–442.
- [33] KIM Y. J., KIM D. J., HWANG J. H. Calculation of nonlinear free-surface flows using two-dimensional numerical wave tank. *Proc. of the 4th Int. Offshore and Polar Eng. Conf.*, Osaka, **3**, 1994, 25–31.
- [34] LIU P. L.-F., LIGGETT J. A. Boundary element formulation and solutions for some non-linear water waves problems. *Develop. Boundary Elem. Meth.*, London, New York, **3**, 1984, 171–189.
- [35] LIU Y., YUE D. K. P. On the time dependence of the wave resistance of a body accelerating from rest. *J. Fluid Mech.*, **310**, 1996, 337–364.
- [36] LUGT H. J. Numerical modelling of vortex flows in ship hydrodynamics. A review. *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics*, Paris, 1981, 297–316.
- [37] MEIRON D. I., BAKER G. R., ORSZAG S. A. Analytic structure of vortex sheet dynamics. Part 1. Kelvin—Hemholtz instability. *J. Fluid Mech.*, **114**, 1982, 283–298.
- [38] MIYATA H. Time-marching CFD simulation for moving boundary problems. *21st Symp. on Naval Hydrodynamics*, Trondheim, **2**, 1996, 1–21.
- [39] MIZUMURA K. Nonlinear water waves developed by an accelerated circular cylinder. *Boundary Element VII: Proc. of the 7th Int. Conf.*, Berlin, **2**, 1985, 9/49–9/59.
- [40] MOYO S. Hydrodynamic interaction of horizontal circular cylinders with a free surface: *Ph.D Thesis*, Brunel University, 1997.
- [41] MUZAFERIJA S., PERIC M., YOO S.-D. Computation of free-surface flows using moving grids. *Proc. 11th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Hamburg, 1996.

- [42] ROMATE J. E. The numerical simulation of nonlinear gravity waves. *Engng. Anal.*, **7**, No. 4, 1990, 152–166.
- [43] SHANKS S. P., THOMPSON J. F. Numerical solution of the Navier—Stokes equations for 2D hydrofoils in or below a free surface. *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics*, Berkeley, 1977, 202–220.
- [44] SOH W.K. A numerical method for non-linear water waves. *Computers and Fluids*, **12**, No. 2, 1984, 133–143.
- [45] SOZER E. M., GREENBERG M. D. The time-dependent free surface flow induced by a submerged line source or sink. *J. Fluid Mech.*, **284**, 1995, 225–237.
- [46] TELES DA SILVA A. F., PEREGRINE D. H. Nonlinear perturbations on a free surface induced by a submerged body: a boundary integral approach. *Engng. Anal.*, **7**, No. 4, 1990, 214–222.
- [47] TELSTE J. G. Potential flow about two counter-rotating vortices approaching a free surface. *J. Fluid Mech.*, **201**, 1989, 259–278.
- [48] TELSTE J. G. Inviscid flow about a cylinder rising to a free surface. *Ibid.*, **182**, 1987, 149–168.
- [49] TERENTIEV A. G., AFANASIEV K. E., AFANASIEVA M. M. Simulation of unsteady free surface flow problems by the direct boundary element method. *Symp. on Advanced Boundary Element Methods*, San Antonio, 1987, 1.21–1.24.
- [50] THOMPSON J. F., WARSI Z. U., MASTIN C. W. Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations. A review. *J. Comput. Phys.*, **47**, 1982, 1–108.
- [51] TSAI W. T., YUE D. K. P. Interactions between a free surface and a vortex sheet shed in the wake of a surface-piercing plate. *J. Fluid Mech.*, **257**, 1993, 691–721.
- [52] TSAI W. T., YUE D. K. P. Features of nonlinear interactions between a free surface and a shed vortex shear layer. *Phys. Fluids*, **A3**, 1991, 2485–2488.
- [53] TYVAND P. A., MILOH T. Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, **286**, 1995, 67–101.
- [54] TYVAND P. A., MILOH T. Free-surface flow generated by a small submerged circular cylinder starting from rest. *Ibid.*, 103–116.
- [55] VINJE T., BREVIG P. Nonlinear ship motions. *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics*, Paris, 1981, 257–266.
- [56] VOGT M., KANG K. J. A level set technique for computing 2D free surface flows. *Proc. 12th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Carry-le-Rouet, 1997, 261–263.
- [57] WU G. X., EATOCK TAYLOR R. Time stepping solutions of the two-dimensional nonlinear wave radiation problem. *Ocean Engng.*, **22**, No. 8, 1995, 785–798.

- [58] WU G. X., EATOCK TAYLOR R. Finite element analysis of two dimensional non-linear transient waves. *Appl. Ocean Res.*, **16**, 1994, 363–372.
- [59] YEN S. M., LEE K. D., AKAI T. J. Finite-element and finite-difference solutions of nonlinear free surface wave problems. *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics*, Berkeley, 1977, 305–318.
- [60] YEUNG R. W. Numerical methods in free-surface flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Palo Alto, **14**, 1982, 395–442.
- [61] YEUNG R. W., VAIDHYANATHAN M. Hyghly separated flows near a free surface. *Int. Conf. Hydrodyn.*, Wuxi, 1994, 118–128.
- [62] YU D., TRYGGVASON G. The free-surface signature of unsteady, two dimensional vortex flows. *J. Fluid Mech.*, **218**, 1990, 547–572.
- [63] ZAROODNY S. J., GREENBERG M. D. On a vortex sheet approach to the numerical calculation of water waves. *J. Comput. Phys.*, **11**, 1973, 440–446.

Поступила в редакцию 3 марта 1998 г.