Вычислительные технологии **Том 15, № 2, 2010**

Об одном методе реализации в пространстве состояний динамических систем над нечеткими треугольными числами

В. А. Кожухарь
Бийский филиал Алтайского государственного университета, Россия
e-mail: djuka78@mail.ru

С. Г. Пушков
Оренбургский государственный университет, Россия
e-mail: psg@mail.osu.ru

Рассматривается задача реализации для линейных динамических систем с дискретным временем над нечеткими треугольными числами. Обобщается подход к решению проблемы реализации для класса интервальных динамических систем. Вводится понятие линейной динамической системы с дискретным временем над нечеткими числами. Предлагается метод нахождения нечеткой алгебраической реализации для последовательности матриц над нечеткими треугольными числами. Представленный метод иллюстрируется численными примерами.

Ключевые слова: динамические системы, задача реализации, пространство состояний, нечеткие треугольные числа.

Введение

В работе рассматривается проблема построения модели пространства состояний по данным о поведении вход-выход линейной динамической системы с параметрической неопределенностью в виде нечетких треугольных чисел. Для решения этой проблемы был использован подход, рассмотренный в работе [?] для интервальных динамических систем с дискретным временем. Любое нечеткое число можно рассматривать как интервальное, наделенное некоторой структурой, поэтому предлагаемое исследование является распространением подхода к решению проблемы реализации для класса интервальных динамических систем на класс систем над нечеткими числами.

Проблема построения модели пространства состояний, в классической теории систем известная как проблема реализации, для класса линейных стационарных динамических систем с дискретным временем успешно решается в рамках алгебраического подхода [?], некоторые вычислительные модификции которого развиты в [?, ?]. Общесистемные аспекты проблемы реализации достаточно полно освещены в монографии [?].

В работе [?] была предпринята попытка распространить подход к анализу общих систем [?] на класс нечетких систем, а в [?] исследованно понятие нечеткой линейности для класса нечетких динамических систем. В [?] был получен достаточный критерий алгебраической реализуемости для линейных динамических систем над нечеткими числами. Вместе с тем при построении надежных методов вычисления конечномерных реализаций возникают существенные трудности. Алгебраические свойства множества нечетких чисел (и треугольных в том числе) в рамках естественной нечеткой арифметики, основанной на принципе распространения, не являются достаточно "хорошими". Они не образуют таких удобных алгебраических структур, как кольцо или поле. Множество нечетких чисел, как и обычная интервальная арифметика, является коммутативной полугруппой относительно сложения и умножения. Это приводит к тому, что даже стандартные алгебраические задачи в данном случае становятся очень сложными, а задача реализации для заданной импульсной последовательности матриц над нечеткими числами является практически неразрешимой.

Указанные нечеткие арифметики допускают "улучшения", но при этом теряются естественная интерпретация операций и практическая применимость результатов. Предлагаемый в работе подход к решению задачи реализации для линейных систем над нечеткими числами основан на погружении множеств входных сигналов, состояний и выходных сигналов нечеткой системы в расширенные нечеткие пространства.

Заметим, что техника погружения алгебраических структур в структуры с более мощными алгебраическими свойствами является стандартным методологическим приемом решения многих алгебраических задач. Кроме того, эта техника удачно применялась как для решения систем интервальных алгебраических уравнений [?], так и для исследования проблемы реализации интервальных динамических систем [?].

Далее будут использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, $\mathbb{FR}$ — множество нечетких чисел, $\mathbb{FR}^{p\times m}$ — множество матриц с нечеткими числами размерности $p \times m$.

1. Естественная нечеткая арифметика

В данном разделе рассмотрено несколько основных понятий из теории нечетких чисел, которые будут полезны в дальнейших построениях [? – ?].

Определение 1. *Нечеткое число* A на вещественной прямой $\mathbb{R}$ есть нечеткое множество, характеризующееся функцией принадлежности μ_A:

$$\mu_A : \mathbb{R} \to [0, 1].$$

Определение 2. Нечеткое число A на $\mathbb{R}$ называется *выпуклым*, если для любых действительных чисел $x, y, z \in \mathbb{R}$ таких, что $x \le y \le z$,

$$\mu_A(y) \ge \mu_A(x) \wedge \mu_A(z),$$

где $\wedge$ означает min.

Нечеткое число A *унимодально*, если условие $\mu_A(x) = 1$ справедливо только для одной точки действительной оси.

Часто для определения выпуклых нечетких чисел используют множества уровня α.

Определение 3. *Множество уровня* α нечеткого числа A есть непустое множество, обозначаемое через A_α и определяемое как

$$A_\alpha = \{x \,|\mu_A(x) \ge \alpha\}, \quad 0 < \alpha \le 1.$$

Определение 4. *Носитель* Γ_A нечеткого числа A есть множество, определяемое как топологическое замыкание специального случая множества уровня следующим образом:

$$\Gamma_A = \overline{\{x|\, \mu_A(x) > 0\}}.$$

Нечеткое число A можно разложить по его множествам уровня

$$A = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha A_\alpha.$$

При решении задач математического моделирования нечетких систем часто используются нечеткие числа $(L-R)$-типа. *Нечеткое число* $(L-R)$-типа может быть задано с помощью функции принадлежности $(L-R)$-типа, удовлетворяющей свойствам

$$L(-x) = L(x), \quad R(-x) = R(x),$$
$$L(0) = R(0) = 1,$$

где L и R — невозрастающие функции на множестве неотрицательных действительных чисел.

Нечеткое унимодальное число A является нечетким числом $(L-R)$-типа тогда и только тогда, когда

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L((a-x)/\alpha & \text{для} \quad \forall x \le a,\ \alpha > 0, \\ R((x-a)/\beta & \text{для} \quad \forall x \ge a,\ \beta > 0, \end{cases}$$

где a — среднее значение (центр) нечеткого числа, $\alpha,\ \beta$ — левый и правый коэффициент нечеткости соответственно. Нечеткое унимодальное число $(L-R)$-типа можно представить в виде тройки параметров $A = (a, \alpha, \beta)$. Частным случаем нечетких унимодальных чисел $(L-R)$-типа являются нечеткие треугольные числа.

Определение 5. *Нечетким треугольным числом* A называется тройка действительных чисел (a, α, β) $(a - \alpha \le a \le a + \beta)$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a+\alpha}{\alpha}, & x \in [a-\alpha, a], \\ \dfrac{x-a-\beta}{-\beta}, & x \in [a, a+\beta], \\ 0. \end{cases}$$

Здесь a — центр, α — величина нечеткости слева, β — величина нечеткости справа. Функция принадлежности такого числа имеет вид треугольника. Часто под нечеткими треугольными числами понимают числа, у которых функции принадлежности не обязательно являются линейными, но могут быть любыми монотонными и дифференцируемыми функциями.

Пусть A и B — нечеткие числа в $\mathbb{R}$, и $*$ — бинарная операция, определенная на $\mathbb{R}$. Одним из способов нечеткого доопределения основных арифметических операций является следующее соотношение (*принцип распространения*):

$$\mu_{A*B}(x * y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y), \tag{1}$$

где $\wedge$ означает min. Если в (1) бинарную операцию $*$ заменить обычными арифметическими операциями $+$, $-$, $\times$ и $\div$, то можно получить соотношения для этих операций над нечеткими числами. Предполагая, что A и B — нечеткие числа в $\mathbb{R}$, согласно (1) имеем

$$\mu_{A+B}(x+y)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(y),$$
$$\mu_{A-B}(x-y)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(y),$$
$$\mu_{A\times B}(x\times y)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(y),$$
$$\mu_{A\div B}(x/y)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(y).$$

При этом нечеткие числа, полученные применением операций $+$, $-$, $\times$ к выпуклым нечетким числам, есть выпуклые нечеткие числа.

Эти определения можно использовать для любых нечетких чисел, однако для выпуклых нечетких чисел удобнее рассматривать множества уровня α.

Если A_α и B_α — множества уровня α выпуклых нечетких чисел A и B соответственно, то множества уровня α есть интервалы в $\mathbb{R}$, являющиеся специальными выпуклыми нечеткими числами, степени принадлежности которых равны 1 на $x\in A_\alpha$ и 0 в остальных случаях. Используя идентичность разрешимости, операции над нечеткими числами можно выразить в виде

$$A+B=\bigcup_{\alpha=0}^{1}\alpha\left(A_\alpha+B_\alpha\right),$$
$$A-B=\bigcup_{\alpha=0}^{1}\alpha\left(A_\alpha-B_\alpha\right),$$
$$A\times B=\bigcup_{\alpha=0}^{1}\alpha\left(A_\alpha\times B_\alpha\right),$$
$$A\div B=\bigcup_{\alpha=0}^{1}\alpha\left(A_\alpha\div B_\alpha\right).$$

Известно, что семейство действительных чисел образует поле относительно обычных операций сложения и умножения. Но для выпуклых нечетких чисел не существует обратных и не выполняется закон дистрибутивности. Поэтому множество выпуклых нечетких чисел не образуют таких алгебраических структур как кольцо или поле.

2. Расширенная нечеткая арифметика

Перейдем к построению расширенной нечеткой арифметики. Будем рассматривать нечеткие треугольные числа, т. е. числа, имеющие представление (a,α,β), и строить расширенную нечеткую арифметику $\langle\mathbb{EFR},\bar{+},\bar{\cdot}\rangle$, где $\bar{+}$, $\bar{\cdot}$ — операции сложения и умножения, определенные на нечетких треугольных числах в расширенной нечеткой арифметике.

Рассмотрим поле действительных чисел $\langle\mathbb{R},+,\cdot\rangle$ и возьмем некоторую взаимно-однозначную функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Определим операции $\oplus$ и $\otimes$ таким образом, чтобы f являлось изоморфизмом систем $\langle\mathbb{R},+,\cdot\rangle$ и $\langle\mathbb{R},\oplus,\otimes\rangle$. Для этого должны выполняться равенства

$$\bar{\alpha}\oplus\bar{\beta}=f(f^{-1}(\bar{\alpha})+f^{-1}(\bar{\beta})),\tag{2}$$
$$\bar{\alpha}\otimes\bar{\beta}=f(f^{-1}(\bar{\alpha})\cdot f^{-1}(\bar{\beta})).\tag{3}$$

Например, для функции $f(x) = x$ равенства (2) и (3) примут вид

$$\bar{\alpha} \oplus \bar{\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta},$$

$$\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}.$$

Определение 6. *Расширенная нечеткая арифметика* — это алгебраическая система $\langle \mathbb{EFR}, \bar{+}, \bar{\cdot} \rangle$, носитель которой — множество всех нечетких треугольных чисел вида $(\bar{a}; \bar{\alpha}, \bar{\beta})$, а операции $\bar{+}$ и $\bar{\cdot}$ определены следующим образом:

$$(\bar{a}_1,\, \bar{\alpha}_1,\, \bar{\beta}_1)\bar{+}(\bar{a}_2,\, \bar{\alpha}_2,\, \bar{\beta}_2) = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2,\, \bar{\alpha}_1 \oplus \bar{\alpha}_2,\, \bar{\beta}_1 \oplus \bar{\beta}_2),$$

$$(\bar{a}_1,\, \bar{\alpha}_1,\, \bar{\beta}_1)\bar{\cdot}(\bar{a}_2,\, \bar{\alpha}_2,\, \bar{\beta}_2) = (\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2,\, \bar{\alpha}_1 \otimes \bar{\alpha}_2,\, \bar{\beta}_1 \otimes \bar{\beta}_2).$$

При таком задании операций арифметика $\mathbb{EFR}$ будет коммутативной, ассоциативной и дистрибутивной. Роль нулевого элемента будет выполнять нечеткое треугольное число $(0, 0, 0)$, роль единичного элемента — нечеткое треугольное число $(1, 1, 1)$. Для произвольного нечеткого треугольного числа $\bar{A} = (\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ противоположным числом будет $-\bar{A} = (-\bar{a}, -\bar{\alpha}, -\bar{\beta})$ и обратным элементом — $\bar{A}^{-1} = \left(\dfrac{1}{\bar{a}}, \dfrac{1}{\bar{\alpha}}, \dfrac{1}{\bar{\beta}}\right)$.

Не обязательно для построения расширенной арифметики брать в качестве основной функцию $f(x) = x$. Построение можно вести и с помощью функции $f(x) = e^x$. Эта функция является взаимно-однозначным отображением $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^+$. Тогда равенства (2) и (3) примут вид

$$\bar{\alpha} \oplus \bar{\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta},$$

$$\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta} = e^{\ln \bar{\alpha} \ln \bar{\beta}}.$$

Роль нулевого элемента будет выполнять нечеткое треугольное число $(0, 1, 1)$, роль единичного элемента — нечеткое треугольное число $(1, e, e)$. Для произвольного нечеткого треугольного числа $\bar{A} = (\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ противоположным числом будет $-\bar{A} = (-\bar{a}, \dfrac{1}{\bar{\alpha}}, \dfrac{1}{\bar{\beta}})$ и обратным элементом — $\bar{A}^{-1} = \left(\dfrac{1}{\bar{a}}, e^{\frac{1}{\ln \bar{\alpha}}}, e^{\frac{1}{\ln \bar{\beta}}}\right)$.

Пусть (a, α, β) — нечеткое треугольное число в естественной арифметике, $(\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ — нечеткое треугольное число в расширенной арифметике. Переход от (a, α, β) к $(\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ и обратно будем осуществлять с помощью функции $f(x) = x$ по следующим правилам:

$$\bar{a} = a,\ \bar{\alpha} = a - \alpha,\ \bar{\beta} = a + \beta, \tag{4}$$

$$a = \bar{a},\ \alpha = a - \bar{\alpha},\ \beta = \bar{\beta} - a. \tag{5}$$

Тогда нечеткому треугольному числу (a, α, β) в естественной арифметике соответствует нечеткое треугольное число $(a, a-\alpha, a+\beta)$ в расширенной арифметике. Противоположный и обратный элементы, соответствующие (a, α, β) в расширенной арифметике, будут выглядеть так:

$$-(a, a - \alpha, a + \beta) = (-a, -a + \alpha, -a - \beta),$$

$$(a, a - \alpha, a + \beta)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a - \alpha}, \frac{1}{a + \beta}\right).$$

Теперь выполним операции сложения и умножения для чисел (a_1, α_1, β_1) и (a_2, α_2, β_2) в расширенной арифметике:

$$(a_1, a_1-\alpha_1, a_1+\beta_1) \oplus (a_2, a_2-\alpha_2, a_2+\beta_2) = (a_1+a_2, a_1+a_2-\alpha_1-\alpha_2, a_1+a_2+\beta_1+\beta_2),$$

$$(a_1, a_1-\alpha_1, a_1+\beta_1) \otimes (a_2, a_2-\alpha_2, a_2+\beta_2) =$$
$$= (a_1 \cdot a_2, a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot \alpha_2 - a_2 \cdot \alpha_1 + \alpha_1 \cdot \alpha_2, a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot \beta_2 + a_2 \cdot \beta_1 + \beta_1 \cdot \beta_2).$$

Заметим, что $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ в расширенной арифметике имеют естественную интерпретацию, они являются левой и правой границей интервала носителя нечеткого треугольного числа $\Gamma_A[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$.

3. Задача реализации для систем над нечеткими числами

Рассмотрим проблему построения модели пространства состояний по данным о поведении вход-выход линейной динамической системы с параметрической неопределенностью в виде нечетких треугольных чисел. Здесь используется подход, предложенный в работе [**?**]. Нечеткое треугольное число может быть представлено в виде интервального числа с выделенной структурой.

Определение 7. *Линейной стационарной динамической системой с дискретным временем (с m входами, n состояниями и p выходами) с нечеткими параметрами* будем называть объект $[\sum] = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$, динамическое поведение которого описывается уравнением

$$x(t+1) = \mathbf{F}x(t) + \mathbf{G}u(t), \quad y(t) = \mathbf{H}\mathrm{x}(\mathrm{t}), \tag{6}$$

где $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, и понимать его как семейство математических моделей

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad y(t) = Hx(t), \tag{7}$$

матрицы (F, G, H) которых принадлежат заданным матрицам $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ над нечеткими числами, т. е.

$$F \in \mathbf{F} \in \mathbb{FR}^{n\times n}, \quad G \in \mathbf{G} \in \mathbb{FR}^{n\times m}, \quad H \in \mathbf{H} \in \mathbb{FR}^{p\times n},$$

со степенями принадлежности $\mu(F) = \min\limits_{i,j} \mu(f_{i,j})$, $\mu(G) = \min\limits_{i,j} \mu(g_{i,j})$, $\mu(H) = \min\limits_{i,j} \mu(h_{i,j})$ соответственно, где $\mu(f_{i,j})$ — степень принадлежности элемента $f_{i,j}$ в матрице F, $\mu(g_{i,j})$ — степень принадлежности элемента $g_{i,j}$ в матрице G, $\mu(h_{i,j})$ — степень принадлежности элемента $h_{i,j}$ в матрице H. Степень принадлежности модели (7) семейству (6) в этом случае равна $\min(\mu(F), \mu(G), \mu(H))$.

Задача реализации в пространстве состояний динамических систем над нечеткими треугольными числами состоит в следующем: *для заданной последовательности матриц над нечеткими треугольными числами*

$$\left\{\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, ...\right\}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_i \in \mathbb{FR}^{p\times m}, \quad i = 1, 2, ... \tag{8}$$

построить тройку матриц $(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{H}})$ *над нечеткими треугольными числами таких, что выполняются матричные уравнения*

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{F}}^{i-1}\tilde{\mathbf{G}}, \quad i = 1, 2, ..., \tag{9}$$

где $\tilde{\mathbf{F}} \in \mathbb{FR}^{n\times n}$, $\tilde{\mathbf{G}} \in \mathbb{FR}^{n\times m}$, $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{FR}^{p\times n}$.

Как было показано выше, алгебраические свойства множества нечетких чисел в рамках естественной нечеткой арифметики, как и алгебраические свойства классической интервальной арифметики, не являются достаточно “хорошими”. Они не позволяют воспользоваться классическими методами для решения задачи реализации. Чтобы решить данную задачу, необходимо перенести ее из рамок естественной нечеткой арифметики в расширенную нечеткую арифметику, которая обладает более мощными алгебраическими средствами. Подход к решению задачи реализации для линейных систем над нечеткими числами, предлагаемый в данной работе, основан на погружении множеств входных сигналов, состояний и выходных сигналов нечеткой системы в расширенные нечеткие пространства. В этом случае имеет место следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{FR}^m & \underset{\tilde{\mathbf{G}}}{\longrightarrow} & \mathbb{FR}^n & \underset{\tilde{\mathbf{F}}}{\longrightarrow} & \mathbb{FR}^n & \underset{\tilde{\mathbf{H}}}{\longrightarrow} & \mathbb{FR}^p \\
\Omega \downarrow\uparrow \Omega^{-1} & & \Pi \downarrow\uparrow \Pi^{-1} & & \Pi \downarrow\uparrow \Pi^{-1} & & \Gamma \downarrow\uparrow \Gamma^{-1} \\
\mathbb{EFR}^m & \underset{\bar{G}}{\longrightarrow} & \mathbb{EFR}^n & \underset{\bar{F}}{\longrightarrow} & \mathbb{EFR}^n & \underset{\bar{H}}{\longrightarrow} & \mathbb{EFR}^p
\end{array}$$

На этой диаграмме $\mathbb{FR}$ означает множество нечетких чисел с обычной нечеткой арифметикой, а $\mathbb{EFR}$ — множество нечетких чисел относительно расширенной нечеткой арифметики; Π, Ω и Γ — изоморфизмы, индуцированные покомпонентным применением отображения $\mathbb{FR} \ni (a, \alpha, \beta) \leftrightarrow (a, f(a-\alpha), f(a+\beta)) \in \mathbb{EFR}$ для некоторой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяющей расширенную нечеткую арифметику.

Применим диаграмму для решения нашей задачи.

Динамическое поведение системы над нечеткими треугольными числами описывается следующими уравнениями:

$$x(t+1) = \tilde{\mathbf{F}}x(t) + \tilde{\mathbf{G}}u(t), \quad y(t) = \tilde{\mathbf{H}}x(t)$$

или

$$\tilde{\mathbf{F}}x(t) + \tilde{\mathbf{G}}u(t) \ominus x(t+1) = 0, \quad \tilde{\mathbf{H}}x(t) \ominus y(t) = 0.$$

Пусть состояниям системы $x(t)$ и $x(t+1)$ в моменты времени t и $t+1$, управлению $u(t)$ и выходу $y(t)$ соответствуют $\xi(t)$, $\xi(t{+}1)$, $\theta(t)$ и $\eta(t)$. Тогда, погружая динамическую систему над нечеткими треугольными числами над $\mathbb{FR}$ в $\mathbb{EFR}$, получим:

$$\Pi(\tilde{\mathbf{F}}\Pi^{-1}(\xi(t)) + \tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}(\theta(t)) \ominus \Pi^{-1}(\xi(t+1))) = 0, \quad \Gamma(\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}(\xi(t)) \ominus \Gamma^{-1}(\eta(t))) = 0.$$

Раскрывая скобки, имеем

$$\Pi\tilde{\mathbf{F}}\Pi^{-1}\xi(t) + \Pi\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}\theta(t) \ominus \xi(t+1) = 0, \quad \Gamma\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}\xi(t) \ominus \eta(t) = 0.$$

Таким образом, описание динамического поведения погруженной системы над $\mathbb{EFR}$ имеет вид

$$\xi(t+1) = \Pi\tilde{\mathbf{F}}\Pi^{-1}\xi(t) + \Pi\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}\theta(t), \quad \eta(t) = \Gamma\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}\xi(t).$$

Отсюда

$$\bar{\mathrm{F}} = \Pi\tilde{\mathbf{F}}\Pi^{-1}, \quad \bar{\mathrm{G}} = \Pi\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}, \quad \bar{\mathrm{H}} = \Gamma\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}.$$

Следовательно, при погружении последовательность матриц (8) примет вид

$$\begin{aligned}
&\bar{A}_1 = \bar{\mathrm{H}}\bar{\mathrm{G}} = \Gamma\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}\Pi\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1} = \Gamma\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1} = \Gamma\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{1}}\Omega^{-1}, \\
&\bar{A}_1 = \bar{\mathrm{H}}\bar{\mathrm{F}}\bar{\mathrm{G}} = \Gamma\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}\Pi\tilde{\mathbf{F}}\Pi^{-1}\Pi\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1} = \Gamma\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1} = \Gamma\tilde{\mathbf{A}}_2\Omega^{-1}, \\
&\ldots
\end{aligned}$$

$$\bar{A}_i = \bar{\mathrm{H}}\bar{\mathrm{F}}^{i-1}\bar{\mathbf{G}} = \Gamma\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}(\Pi\tilde{\mathbf{F}}\Pi^{-1})^{i-1}\Pi\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1} = \Gamma\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{F}}^{i-1}\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1} = \Gamma\tilde{\mathbf{A}}_i\Omega^{-1}. \qquad (10)$$

Итак, при переходе из расширенной нечеткой арифметики в естественную не всегда получаются нечеткие треугольные числа с положительной величиной нечеткости слева и справа.

Определение 8. *Нечеткое треугольное число* (a, α, β)*, полученное при переходе из расширенной нечеткой арифметики в естественную, будем называть правильным, если* $\alpha > 0$*,* $\beta > 0$*. В противном случае будем называть его неправильным.*

Определение 9. *Матрицу над нечеткими треугольными числами, полученную при переходе из расширенной нечеткой арифметики в естественную, будем называть правильной, если она содержит только правильные нечеткие треугольные числа.*

Пусть последовательности матриц (8) в расширенной арифметике соответствует последовательность матриц

$$\left\{\bar{\mathrm{A}}_1, \bar{\mathrm{A}}_2, ...\right\}, \quad \bar{\mathrm{A}}_i \in \mathbb{EFR}^{p\times m}.$$

Тогда можно сформулировать и с помощью диаграммы доказать следующий результат.

Теорема. *Если погруженная последовательность матриц над нечеткими треугольными числами*

$$\left\{\bar{\mathrm{A}}_1, \bar{\mathrm{A}}_2, ...\right\}, \quad \bar{\mathrm{A}}_i \in \mathbb{EFR}^{p\times m}, \quad i = 1, 2, ...$$

реализуема в расширенной арифметике с матрицами $(\bar{\mathrm{F}}, \bar{\mathrm{G}}, \bar{\mathrm{H}})$ *над нечеткими треугольными числами и если соответствующая им тройка матриц* $(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{H}})$ *над нечеткими треугольными числами в естественной арифметике является правильной, то* $(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{H}})$ *— нечеткая алгебраическая реализация исходной последовательности матриц*

$$\left\{\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, ...\right\}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_i \in \mathbb{FR}^{p\times m}, \quad i = 1, 2, ...$$

над нечеткими треугольными числами.

Доказательство. Применяя диаграмму, получим

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{G}} = \Gamma^{-1}\bar{\mathrm{H}}\Pi\Pi^{-1}\bar{\mathrm{G}}\Omega = \Gamma^{-1}\bar{\mathrm{H}}\bar{\mathrm{G}}\Omega = \Gamma^{-1}\bar{\mathrm{A}}_1\Omega,\\
&\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{G}} = \Gamma^{-1}\bar{\mathrm{H}}\Pi\Pi^{-1}\bar{\mathrm{F}}\Pi\Pi^{-1}\bar{\mathrm{G}}\Omega = \Gamma^{-1}\bar{\mathrm{H}}\bar{\mathrm{F}}\bar{\mathrm{G}}\Omega = \Gamma^{-1}\bar{\mathrm{A}}_2\Omega,\\
&\dots\\
&\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{F}}^{i-1}\tilde{\mathbf{G}} = \Gamma^{-1}\bar{\mathrm{H}}\Pi(\Pi^{-1}\bar{\mathrm{F}}\Pi)^{i-1}\Pi^{-1}\bar{\mathrm{G}}\Omega^{-1} = \Gamma^{-1}\bar{\mathrm{H}}\bar{\mathrm{F}}^{i-1}\bar{\mathrm{G}}\Omega = \Gamma^{-1}\bar{\mathrm{A}}_i\Omega.
\end{aligned}$$

Подставим в данные равенства $\bar{\mathbf{A}}_i$ из (10):

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{G}} = \Gamma^{-1}\bar{\mathrm{A}}_1\Omega = \Gamma^{-1}\Gamma\tilde{\mathbf{A}}_1\Omega^{-1}\Omega = \tilde{\mathbf{A}}_1,\\
&\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{G}} = \Gamma^{-1}\bar{\mathrm{A}}_2\Omega = \Gamma^{-1}\Gamma\tilde{\mathbf{A}}_2\Omega^{-1}\Omega = \tilde{\mathbf{A}}_2,\\
&\dots\\
&\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{F}}^{i-1}\tilde{\mathbf{G}} = \Gamma^{-1}\bar{\mathrm{A}}_i\Omega = \Gamma^{-1}\Gamma\tilde{\mathbf{A}}_i\Omega^{-1}\Omega = \tilde{\mathbf{A}}_i.
\end{aligned}$$

Таким образом, тройка матриц $(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{H}})$ над нечеткими треугольными числами является алгебраической реализацией последовательности матриц

$$\left\{\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, ...\right\}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_i \in \mathbb{FR}^{p\times m}, \quad i = 1, 2, ...$$

над нечеткими треугольными числами. □

Заметим, что множество нечетких чисел в расширенной арифметике образует структуру поля, поэтому при вычислении конечномерных реализаций можно пользоваться методами реализации систем над полями, например, алгоритмом Хо [?] или алгоритмом, основанным на псевдообращении ганкелевой матрицы поведения системы [?].

Продемонстрируем применение теоремы на примерах.

Пример 1. Рассмотрим последовательность матриц над нечеткими треугольными числами для системы с одним входом и одним выходом:

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = (0,\ 0,\ 0.1),\quad \tilde{\mathbf{A}}_2 = (1,\ 0.1,\ 0.1),\quad \tilde{\mathbf{A}}_3 = (1,\ 0.19,\ 0.32),\quad \tilde{\mathbf{A}}_4 = (2,\ 0.461,\ 0.662). \tag{11}$$

С помощью формулы (4) перейдем от этой последовательности матриц к последовательности матриц в расширенной нечеткой арифметике

$$\bar{\mathrm{A}}_1 = (0,\ 0,\ 0.1),\quad \bar{\mathrm{A}}_2 = (1,\ 0.9,\ 1.1),\quad \bar{\mathrm{A}}_3 = (1,\ 0.81,\ 1.32),\quad \bar{\mathrm{A}}_4 = (2,\ 1.539,\ 2.662). \tag{12}$$

Нечеткая алгебраическая реализация последовательности (12), вычисленная с помощью метода, представленного в [?], имеет вид

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} (0,0,0) & (1,1,1) \\ (1,0.9,1.1) & (1,0.9,1.1) \end{pmatrix},\quad \bar{G} = \begin{pmatrix} (0,0,0.1) \\ (1,0.9,1.1) \end{pmatrix},\quad \bar{H} = ((1,1,1)\ (0,0,0))\,.$$

Перейдем с помощью формулы (5) в естественную арифметику и получим нечеткую систему с матрицами

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} (0,0,0) & (1,0,0) \\ (1,0.1,0.1) & (1,0.1,0.1) \end{pmatrix},\quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} (0,0,0.1) \\ (1,0.1,0.1) \end{pmatrix},\quad \tilde{\mathbf{H}} = ((\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})\ (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}))\,. \tag{13}$$

Непосредственная проверка показывает, что матрицы (13) являются нечеткой алгебраической реализацией последовательности (11).

Данный метод применим не только для положительных нечетких, но и для смешанных нечетких треугольных чисел.

Пример 2. Рассмотрим последовательность матриц над нечеткими треугольными числами для системы с одним входом и одним выходом:

$$\begin{gathered} \tilde{\mathbf{A}}_1 = (0,\ 0.22,\ 0.22),\quad \tilde{\mathbf{A}}_2 = (1,\ 0.412,\ 0.474), \\ \tilde{\mathbf{A}}_3 = (1,\ 0.8222,\ 1.0108),\quad \tilde{\mathbf{A}}_4 = (2,\ 1.52864,\ 2.03436). \end{gathered} \tag{14}$$

С помощью формулы (4) перейдем от этой последовательности матриц к последовательности матриц в расширенной нечеткой арифметике

$$\begin{gathered} \bar{\mathrm{A}}_1 = (0,\ -0.22,\ 0.22),\quad \bar{\mathrm{A}}_2 = (1,\ 0.588,\ 1.474), \\ \bar{\mathrm{A}}_3 = (1,\ 0.1778,\ 2.0108),\quad \bar{\mathrm{A}}_4 = (2,\ 0.47136,\ 4.03436). \end{gathered} \tag{15}$$

Нечеткая алгебраическая реализация последовательности (15), вычисленная с помощью метода, представленного в [?], имеет вид

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} (0,0,0) & (1,1,1) \\ (1,0.638,1.1) & (1,0.541,1.2) \end{pmatrix},\quad \bar{G} = \begin{pmatrix} (0,-0.22,0.22) \\ (1,0.588,1.474) \end{pmatrix},$$

$$\bar{H} = ((1,1,1)\ (0,0,0))\,.$$

Если теперь с помощью формулы (5) перейдем в естественную арифметику, то получим нечеткую систему с матрицами

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} (0,0,0) & (1,0,0) \\ (1,0.362,0.1) & (1,0.459,0.2) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} (0,0.22,0.22) \\ (1,0.412,0.474) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = ((\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})\ (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}))\,. \tag{16}$$

Непосредственная проверка показывает, что матрицы (16) являются нечеткой алгебраической реализацией последовательности (14).

Список литературы

[1] Пушков С.Г., Кривошапко С.Ю. О проблеме реализации в пространстве состояний для интервальных динамических систем // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, № 1. С. 75–85.

[2] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

[3] Пушков С.Г. О вычислении конечномерной реализации // Кибернетика и системный анализ. 1991. № 6. С. 107–112.

[4] Пушков С.Г. Конечномерные реализации импульсной характеристики, основанные на псевдообращении ганкелевой матрицы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 3. С. 5–11.

[5] Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: Математические основы. М.: Мир, 1978.

[6] Пушков С.Г. Об общей теории нечетких систем: Глобальные состояния и нечеткая глобальная реакция нечеткой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 105–109.

[7] Пушков С.Г., Тырышкина В.А. Нечеткие динамические системы, линейные над полями // Фундамент. и прикл. математика. 2007. Т 13, № 3. С. 147–155.

[8] Кожухарь В.А., Пушков С.Г. О задаче реализации для линейных динамических систем над нечеткими числами // Изв. Алтайского гос. ун-та. Математика и информатика. Физика. 2007. № 1. С. 24–29.

[9] Шарый С.П. Алгебраический подход во “внешней задаче” для интервальных линейных систем // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 67–114.

[10] Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976.

[11] Mizumoto M., Tanaka K. Algebraic properties of fuzzy numbers // Proc. IEEE Intern. Conf. on Cybernetics and Society. USA, Washington, 1976. P. 559–563.

[12] Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф и др. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 9 августа 2007 г.,
с доработки — 20 июля 2009 г.