Численное решение существенно нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Н. Г. Бандурин
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, Россия
e-mail: bandurin_ng@mail.ru

Кратко излагаются численный метод и алгоритм для решения систем существенно нелинейных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Созданная компьютерная программа работает в автоматическом режиме. Приводятся результаты решения трех тестовых примеров.

Ключевые слова: численные методы, существенно нелинейные интегро-дифференциальные уравнения, запаздывающий аргумент, компьютерные программы.

Введение

Рассматривается следующая система N в общем случае существенно нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянной величиной запаздывания τ, одинаковой для всех функций

$$\mathbf{f}[x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \ldots, \mathbf{y}(x-\tau), \mathbf{y}'(x-\tau), \ldots, \mathbf{I}(x)] = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{f}$ — вектор-столбец размером N;

$$(\mathbf{y}(x))^{\text{т}} = (y_1(x), y_2(x), \ldots y_N(x))\,;$$

$$(\mathbf{I}(x))^{\text{т}} = (I_1(x), I_2(x), \ldots,)\,;$$

$$\mathbf{I}_i(x) = \int\limits_0^x \psi_i[x, u, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \ldots, \mathbf{y}(u), \mathbf{y}'(u), \ldots, \mathbf{y}(u-\tau), \ldots]\, du.$$

Начальная вектор-функция $\mathbf{y}(x) = \boldsymbol{\varphi}(x)$ при $-\tau \le x \le 0$ считается известной. Ставится задача найти решение системы (1) на равномерной сетке $x_1 = 0$, $x_2, \ldots, x_M = b$ отрезка $[0, b]$.

1. Вывод формул интегрирования и дифференцирования

Для получения формулы интегрирования предположим, что на отрезке $[0, \tau]$ вещественной оси x задана равномерная сетка, в m узлах которой известны значения производной

k-го порядка достаточно гладкой функции $y = f(x)$, определенной на $[0, b]$, и значения производных низших порядков в начальном узле $x = x_1$. Ставится задача вычисления в этих же узлах значений функции, ее производных и интегралов, выраженных через узловые значения производной порядка k и производные при $x = x_1 = 0$.

Вначале интерполируем производную $y^{(k)}(x)$ на отрезке $[x_1, x_n]$ $(n \le m)$ многочленом степени $(n-1)$ [1, 2] и результат запишем в виде

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{x}^{\text{т}}\mathbf{p}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}^{\text{т}} = (1, x, \ldots, x^{n-1}), \mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Полагая в (2) $x = x_1$, $x = x_2, \ldots$, $x = x_n$, получим матричное соотношение

$$\mathbf{y}^{(k)}(x) = Z\mathbf{p}, \tag{3}$$

где $\mathbf{y}^{(k)}$ — матрица-столбец узловых значений производной k-го порядка, $z_{ij} = x_i^{j-1}$.

Так как определителем матрицы Z является определитель Вандермонда, то можно записать

$$\mathbf{p} = Z^{-1}\mathbf{y}^{(k)}, \tag{4}$$

тогда (2) примет вид

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{x}^{\text{т}} Z^{-1}\mathbf{y}^{(k)}. \tag{5}$$

Интегрируя последнее равенство последовательно в пределах отрезков $[x_1, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_1, x_n]$, получим

$$\mathbf{y}^{(k-1)} = \mathbf{I}y_1^{(k-1)} + BZ^{-1}\mathbf{y}^{(k)}. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{y}^{(k-1)}$ — вектор-столбец узловых значений производной $(k-1)$-го порядка; $\mathbf{I}$ — единичный вектор размером n; элементы матрицы B $b_{ij} = (x_i^j - x_1^j)/j$.

Из (6) получаем формулу интегрирования

$$\mathbf{Y}^{(k-1)} = \mathbf{I}y_1^{(k-1)} + s\mathbf{Y}^{(k)}, \tag{7}$$

где $s = BZ^{-1}$ — матрица интегрирования порядка n на отрезке $[x_1, x_n]$.

Если $m > n$, то, применяя последовательно формулу (5) на отрезках $[x_{j(n-1)+1}, x_{j(n-1)+n}]$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, можно получить компоненты вектора производной $\mathbf{Y}^{(k-1)}$ во всех узлах отрезка $[0, \tau]$

$$\mathbf{Y}^{(k-1)} = \mathbf{I}y_1^{(k-1)} + S\mathbf{Y}^{(k)}, \tag{8}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный вектор, S — квадратная матрица интегрирования порядка m. Например, при $b = 6$, $n = 3$, $m = 7$ эта матрица имеет вид

$$S = \begin{vmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.4167 & 0.6667 & -0.0833 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 1.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 1.3333 & 0.7500 & 0.6667 & -0,0833 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.6667 & 1.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 1.3333 & 0.6667 & 1.3333 & 0.7500 & 0.6667 & -0.0833 \\ 0.3333 & 1.3333 & 0.6667 & 1.3333 & 0.6667 & 1.3333 & 0.3333 \end{vmatrix}$$

Выполнив интегрирование в соответствии с (8) r раз, получим формулы для вычисления производных в узлах интерполяции, выраженных через значения производных порядка k в этих же узлах и значения производных низших порядков в начальном узле $x = x_1$:

$$\mathbf{Y}^{(k-r)} = \sum_{i=0}^{r-1} S^i \mathbf{I} y_1^{(k-r+i)} + S^r \mathbf{Y}^{(k)} \text{ при } r \le k. \tag{9}$$

Эту формулу можно использовать для решения обыкновенных ИДУ в случае, когда за неизвестные дискретной модели приняты значения производной наивысшего порядка в узлах интерполяции и значения производных низших порядков в узле $x = x_1$.

Если $r > k$, то компонентами вектора $\mathbf{Y}^{(k-r)}$ в (9) будут значения интегралов, а формула примет вид

$$\mathbf{Y}^{(k-r)} = \sum_{i=r-k}^{r-1} S^{r-k+i} \mathbf{I} y_1^{(i)} + S^r \mathbf{Y}^{(k)}. \tag{10}$$

В последнем равенстве учтено, что $y_1^{(k-r)} \equiv 0$ при $r > k$, поскольку в соответствии с принятыми обозначениями эти величины являются значениями интегралов в узле $x = x_1$.

Для получения формулы дифференцирования матрицу интегрирования представим в виде

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

где $s_{11} = 0$, элементы матрицы-строки s_{12} равны нулю, а квадратная матрица s_{22} — не особенная. Теперь равенство (8) примет вид

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 \\ \mathbf{I}_2 y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1' \\ \mathbf{y}_2' \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Здесь $\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2'$ — векторы-столбцы узловых значений функции и ее производных размером $(m-1)$ соответственно, $\mathbf{I}_2$ — единичный вектор размером $(m-1)$. Из (12) получим

$$\begin{vmatrix} y_1' \\ \mathbf{y}_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -s_{22}^{-1} & s_{21} \end{vmatrix} \mathbf{I} y_1' + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -s_{22}^{-1}\mathbf{I}_2 & s_{22}^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{vmatrix},$$

или в принятых ранее обозначениях

$$\mathbf{Y}' = (E - DS)\mathbf{I} y_1' + D\mathbf{Y}, \tag{13}$$

где $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -s_{22}^{-1}\mathbf{I}_2 & s_{22}^{-1} \end{vmatrix}$ — матрица дифференцирования. При $b = 6$, $n = 3$, $m = 7$ матрица дифференцирования имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.25 & 1 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2.25 & 1 & 0.25 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -2.25 & 1 & 0.25 \\ 2 & -4 & 4 & -4 & 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выполнив дифференцирование в соответствии с (13) r раз, получим формулу для вычисления производных r-го порядка в узлах интерполяции, выраженных через производные в начальной точке $x = x_1$ и значения функции в этих узлах:

$$\mathbf{Y}^{(r)} = \sum_{i=0}^{r-1} D^i (E - DS)\mathbf{I} y_1^{(r-i)} + D^r \mathbf{Y}. \tag{14}$$

Формула (14) применима для решения как обыкновенных ИДУ, так и уравнений с частными производными.

Для любого целого $r \geq 0$ имеют место равенства

$$\sum_{j=1}^{N} S_{ij}^r = (x_i - x_1)^r / r!,$$

$$\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{r+1} = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, N),$$

которые выражают результаты интегрирования и дифференцирования функции $f(x) = 1$.

Использование формул (9) и (14) [1, 2] при численном решении краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений позволяет:

1) с высокой точностью аппроксимировать системы ИДУ, имеющие достаточно гладкие решения, их дискретными аналогами, так как формулы являются точными на отрезке $[0, \tau]$ для всех многочленов степени не выше n;

2) решать уравнения с заданными значениями производных не только на краях, но и внутри области интегрирования, поскольку при решении краевых задач имеется возможность за начальную точку на отрезке $[0, b]$ принимать любой узел x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$;

3) при решении ИДУ высокого порядка с использованием интерполирования многочленами исключить необходимость выполнения алгебраических преобразований на краях области, как это рекомендуется, например, в [3], так как формулы (9) и (14) не зависят от номеров узлов, расположенных вне области интегрирования, и содержат в явном виде необходимые для постановки граничных условий производные. Используя формулу Тейлора, можно получить оценку погрешности аппроксимации функции и ее производных, равную $O(h^{n+1})$, где h — шаг сетки.

В литературе предложено много методов численного решения систем уравнений вида (1), причем большинство из них основаны на процедуре Рунге — Кутты [4–7] и имеют невысокий порядок точности. В работе [8] задача решается с позиции метода продолжения по наилучшему параметру, а в [9] используется способ преобразования к наилучшему аргументу.

В данной работе для решения системы (1) принят метод шагов [10, 11], в соответствии с которым весь промежуток интегрирования $[0, b]$ должен быть представлен в виде Q больших шагов длиной τ, т. е. принимается $b = Q\tau$. Для численной реализации метода каждый большой шаг разбивается на $m - 1$ малых шагов и для выражения узловых значений функций и их производных низшего порядка через производные наивысшего порядка используется формула интегрирования (9).

Ниже приводится алгоритм итерационного процесса для вычисления узловых значений функции $y = f(x)$, являющейся решением одного нелинейного ИДУ k-го порядка с постоянной величиной запаздывания аргумента τ на отрезке $[0, Q\tau]$, которое имеет в своем составе один интеграл $I(x)$ с переменным верхним пределом

$$f[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k)}(x), y(x-\tau), \ldots, y^{(k)}(x-\tau), I(x)] = 0, \tag{15}$$

где

$$I(x) = \int_0^x \psi[x, u, y(u), y'(u), \ldots, y^{(k)}(u), y(u-\tau), \ldots, y^{(k)}(u-\tau)]\, du.$$

Начальные условия при $x = 0$

$$y(0) - c_0 = 0, \quad y'(0) = c_1, \ldots, y^{(k-1)}(0) = c_{k-1}. \tag{16}$$

Числа c_i могут быть определены как производные функции $\varphi(x)$ при $x = 0$, но также могут быть заданы независимо от этой функции [11].

Рассмотрим алгоритм получения решения на первом шаге, т. е. на отрезке $[0, \tau]$. В соответствии с методом шагов [10, 11] на первом шаге значения функции с запаздыванием $y(x-\tau)$ и ее производных определяются из выражения начальной функции $\varphi(x)$. На последующих шагах эти значения выбираются из результатов решения на предыдущем шаге. Последовательно подставляя в (15) $x_1 = 0,\ x_2 = \tau/(m-1), \ldots,\ x_m = \tau$, можно получить m уравнений относительно узловых значений функции y и ее производных. Дискретизация интегралов выполняется с использованием формулы (10). Эти уравнения и начальные условия (16) можно записать в виде системы нелинейных уравнений относительно узловых значений функции и ее производных

$$\mathbf{F}(c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}', \ldots, \mathbf{Y}^{(k)}) = \mathbf{0}, \tag{17}$$

где $\left(\mathbf{Y}^{(s)}\right)^{\mathrm{T}} = \left(y_1^{(s)}, y_2^{(s)}, \ldots, y_m^{(s)}\right),\ s = 0, 1, 2, \ldots, k$. В систему (17) в качестве известных величин входят узловые значения начальной функции $\varphi(x)$.

Исключая узловые значения функции и ее производных низших порядков с помощью формулы интегрирования (9), получим следующую систему разрешающих нелинейных уравнений относительно узловых значений производной наивысшего порядка $\mathbf{Y}^{(k)}$:

$$\mathbf{\Phi}(c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, \mathbf{Y}^{(k)}) = \mathbf{0}, \tag{18}$$

которая решается с высокой точностью известными итерационными методами [12, 13]. Итерационный процесс завершается при достижении невязки в (18) заданной малой величины IterTol. При известном векторе $\mathbf{Y}^{(k)}$ производные низших порядков на шаге вычисляются по формуле интегрирования (9). Второй шаг при $\tau \le x \le 2\tau$ выполняется при известных узловых значениях функции и ее производных, вычисленных на первом шаге. Очевидно, что при условии независимости подынтегрального выражения от x вычисление интеграла на шаге выполняется только в пределах этого шага и результат суммируется со значением интеграла, полученным в результате выполнения предыдущего шага. Если же подынтегральное выражение зависит от x, то для каждого узла x_i текущего шага интегрирование должно быть выполнено по отрезку $[0, x_i]$, что многократно увеличивает время счета.

Для решения систем интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом алгоритм естественно обобщается. Точность решения конкретной задачи зависит от параметров m и IterTol, варьируя которые можно получить максимальную точность вычисления искомых функций. Следует учитывать, что с увеличением числа узлов m нарастает погрешность округления чисел. Заметим, что решение систем линейных ИДУ получается в результате выполнения одной итерации. Эффективность применения разработанной программы иллюстрируется приведенными ниже результатами решения трех тестовых примеров при $\mathrm{Iter}Tol = 10^{-12}$.

2. Тестовые примеры

Пример 1. Существенно нелинейное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка с запаздыванием аргумента $\tau = \pi/2$

$$y''(x) + \sin\left[y''(x)\right] + y^3(x) - \int\limits_0^x \left[y(s-\tau) + y'(s)\right] ds + \exp\left[-\int\limits_0^x y'(s-\tau)y''(s-\tau)\, ds\right] -$$

$$-\exp[0.25(\cos 2x - 1)] + \sin(y'(x-\tau)) + \sin x \cos^2 x = 0.$$

Известно точное решение $y(x) = \sin x$. Поэтому начальная функция на отрезке $[-\pi/2, 0]$ принимается в виде $\varphi(x) = \sin x$.

Начальные условия: $y(0) = 0,\ y'(0) - 1 = 0$.

Интегрирование выполнялось при различных m в области $0 \le x \le 10$. В результате решения получены следующие значения максимального отклонения приближенного решения от точного:

$$\Delta_{M=7} = 7 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta_{M=11} = 3 \cdot 10^{-7}, \quad \Delta_{M=31} = 5 \cdot 10^{-10}, \quad \Delta_{M=151} = 4 \cdot 10^{-10}.$$

Пример 2. Система двух существенно нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента $\tau = \pi/2$

$$y^{(VIII)}(x) + \exp\left[\int\limits_0^x y_1''(s-\tau)y_2(s-\tau)\, ds\right] + y_2(x-\tau) - \exp[0.25(1 - \cos 2x)] = 0,$$

$$y_2(x) + \left[y^{(VIII)}(x)\right]^3 - y_1(x-\tau) - \cos^3 x = 0.$$

Точное решение: $y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \sin x$. Начальные условия для функции $y_1(x)$ при $x = 0$ очевидны и здесь не приводятся.

Значения отклонения Δ при $b = 3\pi$ и разных значениях m для функции $y_1(x)$

$$\Delta_{m=9} = 1.5 \cdot 10^{-5}, \quad \Delta_{m=11} = 6.5 \cdot 10^{-7}, \quad \Delta_{m=21} = 1.7 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta_{m=31} = 1.0 \cdot 10^{-3},$$

для функции $y_2(x)$

$$\Delta_{m=9} = 2.1 \cdot 10^{-5}, \quad \Delta_{m=11} = 1.4 \cdot 10^{-7}, \quad \Delta_{m=21} = 4.6 \cdot 10^{-5}, \quad \Delta_{m=31} = 4.0 \cdot 10^{-4}.$$

Пример 3. Система существенно нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента $\tau = 1$

$$y_1''(x) + \exp\left[\int\limits_0^x y_1''(s-1)y_2''(s-1)\,ds\right] -$$

$$-2\exp(x)\cos x - \exp[\cos 2(1-\cos 2x)] - \sin 2\sin 2x = 0;$$

$$y_2''(x) + \sin\left[y_1(x-1)\right] - 2\exp(-x)\sin x - \sin[\exp(x-1)\sin(x-1) - 10x + 10] = 0.$$

Точное решение: $y_1(x) = \exp(x)\sin x - 10x,\ y_2(x) = \exp(-x)\cos x$.

Начальные условия при $x = 0$ очевидны и здесь не приводятся. Значения отклонения Δ при $b = 8$ для функции $y_1(x)$

$$\Delta_{m=9} = 1.5\cdot 10^{-5},\quad \Delta_{m=15} = 7.5\cdot 10^{-8},\quad \Delta_{m=21} = 7.6\cdot 10^{-11},\quad \Delta_{m=31} = 3\cdot 10^{-9},$$

для функции $y_2(x)$

$$\Delta_{m=9} = 1.3\cdot 10^{-6},\quad \Delta_{m=15} = 4.6\cdot 10^{-9},\quad \Delta_{m=21} = 1.4\cdot 10^{-11},\quad \Delta_{m=31} = 3\cdot 10^{-10}.$$

Из анализа результатов решения этих примеров можно заключить, что при некоторых значениях m достигается максимальная точность решения, в то время как при уменьшении m погрешность нарастает в связи с разрежением сетки, а при увеличении m — по причине округления чисел при нарастающем объеме арифметических действий.

Список литературы

[1] Бандурин Н.Г. Новый численный метод порядка n для решения интегро-дифференциальных уравнений общего вида // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 2. С. 3–10.

[2] Бандурин Н.Г., Игнатьев В.А. Пакет программ для решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (одно-, двух- и трехмерные начально-краевые задачи) // Мат. моделирование. 2007. Т. 19, № 2. С. 105–112.

[3] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 720 с.

[4] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

[5] Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений. М.: Наука, 1985.

[6] Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.

[7] Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. М.: Мир, 1979. 312 с.

[8] Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б. Численное решение систем интегро-дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 3. С. 430–444.

[9] Кузнецов Е.Б., Микрюков В.Н. Численное интегрирование системы интегро-дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом // Там же. 2007. Т. 47, № 1. С. 83–95.

[10] Каменский Г.А. Общая теория уравнений с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 4. С. 697–700.

[11] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

[12] Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.

[13] Денис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.

Поступила в редакцию 4 июня 2009 г.