О сходимости диагональных аппроксимаций

Д. С. Петкович, И. Д. Арангелович
Университет Приштины, Косовска Митровица, Сербия
e-mail: dojcin.petkovic@gmail.com

Исследована сходимость диагональных аппроксимаций Паде в предположении об их принадлежности специальным пространствам при достаточно больших n. Показано, что в этом случае для любого ряда Тейлора рассматриваемые последовательности равномерно сходятся внутри (на компактных подмножествах) к функции, голоморфной в круге.

Ключевые слова: таблицы Паде, диагональные аппроксимации.

1. Пусть

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \text{ — } \tag{1}$$

функция, голоморфная в точке $z = 0$, или формальный ряд по степеням z, $\mathcal{P}_n$ — множество всех многочленов степени не выше n и $R_{n,m}$ — множество рациональных функций вида $r = p/q$, где $p \in \mathcal{P}_n$, $q \in \mathcal{P}_m$, $q \neq 0$.

При любых целых неотрицательных n, m существует пара многочленов $p_{n,m} \in \mathcal{P}_n$, $q_{n,m} \in \mathcal{P}_m$, $q \neq 0$, для которых выполняется соотношение

$$(q_{n,m} f - p_{n,m})(z) = O(z^{n=m+1}), \quad z \to 0. \tag{2}$$

Отношение $\pi_{n,m}(z) = p_{n,m}(z)/q_{n,m}(z) \in R_{n,m}$ для любых пар таких многочленов единственно и называется аппроксимацией Паде типа $[n/m]$ для ряда (1). Из (2) следует, что нахождение знаменателя $q_{n,m}$ и затем числителя $p_{n,m}$ аппроксимации $\pi_{n,m}$ сводится к решению системы линейных уравнений (коэффициентами системы являются коэффициенты ряда (1)). Таким образом, все аппроксимации Паде определяются локальными данными (коэффициентами степенного ряда).

Один из основных теоретических вопросов, связанных с таблицей Паде, — изучение сходимости тех или иных последовательностей аппроксимаций Паде [1]. Наиболее интересными и сложными для изучения являются диагональные $\{\pi_{n+j,n}\}_{j=0}^{\infty}$ (и близкие к ним) последовательности, в частности — главная диагональ $\pi_n(z) = \pi_{n,n}(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Известно, что для произвольных функций f, голоморфных, например, в единичном круге $U = \{z : |z| < 1\}$, последовательность π_n не сходится даже по мере [2]. Очевидным препятствием для сходимости являются полюсы аппроксимации. Возникает естественный вопрос о том, что можно сказать о сходимости, если заранее предположить, что аппроксимации Паде не имеют полюсов в U, т. е.

$$\pi_n(z) \in H(U). \tag{3}$$

Этот вопрос был впервые рассмотрен в работе [3], где был получен ответ в предположении, что соотношение (3) выполняется при всех достаточно больших n. Тогда для любого ряда вида (1) последовательность π_n равномерно сходится внутри (на компактных подмножествах) U к функции f, голоморфной в этом круге:

$$\pi_n(z) \rightrightarrows f(z), \quad z \in U. \tag{4}$$

Отметим, что сходимость ряда (1) в условиях теоремы заранее не предполагается; теорема верна также для более широкого класса областей U.

Предположим теперь, что соотношение (3) справедливо не при всех $n \geq n_0$, а только для некоторой подпоследовательности $\Lambda = \{n_k\}_{k=1} 6\infty$. В этом случае соотношение (4) уже не выполняется при $n \to \infty$, $n \in \Lambda$ во всем круге U. Точнее, пусть ρ — радиус максимального круга $U_\rho = \{z : |z| < \rho\}$, для которого из (3) с $n \in \Lambda$ вытекает (4) при $n \to \infty$ для любой последовательности Λ. В работе [2] доказано, что $\rho \leq 4/5$.

Теорема 1. *Пусть* $r \in (0,1)$ *является корнем уравнения* $g(r,1) = 2g(r,0)$, *где* $g(z,t)$ *— функция Грина дуги* $\left\{e^{i\theta} : \dfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi\right\}$, *тогда* $\rho \geq r_1 = 0.629...$

2. В дальнейшем мера — это положительная борелевская мера в конечной плоскости, принимающая значения на компактах в C; $s(\nu)$ — носитель меры ν, $|\nu| = \nu(C)$; V^ν — ее логарифмический потенциал:

$$V^\nu(z) = \int \log \frac{1}{|t-z|} d\nu(t) \quad z \in C.$$

Потенциал V^ν — супергармоническая функция в C и гармоническая в $C \setminus s(\nu)$. Будем писать $\nu_n \to \nu$, если ν_n слабо сходится к ν, т. е. $\displaystyle\int \varphi d\nu_n \to \int \varphi d\nu$ для любой непрерывной финитной функции φ. Если $K \subset C$ — компакт в C и $s(\nu) \subset K$, то $V^{\nu_n} \rightrightarrows v^\nu$ внутри $C \setminus K$; при этом для любой точки $z \in C$ имеет место принцип понижения

$$\lim_{n\to\infty} V^{\nu_n}(z) \geq V^\nu(z). \tag{5}$$

Если K — регулярный компакт (обладает классической функцией Грина) и $\nu_n \to \nu$, то

$$\lim_{n\to\infty} \min_{z\in K} V^{\nu_n}(z) = \min_{z \in K} V^\nu(z). \tag{6}$$

Пусть G — область такая, что $\overline{G}$ — регулярный компакт в C, и пусть ν — мера такая, что $supp(\nu) \subset C \setminus G$. Мера ν' такая, что $supp(\nu') \subset \partial G$ и

$$V^\nu(z) = V^{\nu'}(z) + \mathrm{const}, \quad z \in \overline{G}, \tag{7}$$

называется продолжением меры ν на ∂G (мера ν' существует и единственна) [4].

Через $M(K)$ будем обозначать множество мер ν таких, что $supp(\nu) \subset K$ и $|\nu| = 1$. Множество $M(K)$ слабокомпактно.

Пусть K — регулярный компакт в C, μ — произвольная мера. Тогда существует единственная мера $\lambda = \lambda(\mu, K)$, $\lambda \in M(K)$ такая, что

$$(V^\lambda + V^\mu)(z) \begin{cases} = \omega, & z \in supp\,(\lambda), \\ \geq \omega, & z \in K. \end{cases} \tag{8}$$

Мера λ называется равновесной мерой компакта K во "внешнем поле V^{μ}"; $\omega = \omega(\mu, K)$ — константой равновесия. Условия (8) можно записать также в следующем виде:

$$(V^{\lambda} + V^{\mu})(z) = \min_{t \in K}(V^{\lambda} + V^{\mu})(t), \quad z \in K. \tag{9}$$

Для произвольного полинома $p(z) = z^n + \cdots = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ определим ассоциированную с ним меру $\nu_n = \nu_n(p)$ по формуле $\nu_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta(z_k)$, где $\delta(z_k)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке z_k. Тогда имеем

$$V^{\nu_n(p)}(z) = \frac{1}{n}\ln\frac{1}{|p(z)|}, \quad |p(z)|^{\frac{1}{n}} = e^{-V^{\nu_n(p)}(z)}. \tag{10}$$

3. Пусть $K = \partial U$ и $\mu = \delta(1)$ (μ — мера Дирака в точке 1). Из (8) следует, что существует единственная мера $\lambda_1 = \lambda(\delta(1), \partial U)$ такая, что

$$V^{\lambda_1}(z) + \log\frac{1}{|1-z|}\begin{cases} = \omega_1, & z \in supp\,(\lambda_1), \\ \geq \omega_1, & z \in \partial U, \end{cases}$$

где $\omega_1 = \omega(\delta(1), \partial U)$.

Лемма 1. *Пусть* $\Gamma_{\pi/3} = \left\{z = e^{i\theta} : \dfrac{\pi}{3} \leq |\theta| \leq \pi\right\}$, *тогда* $supp\,(\lambda_1) = \Gamma_{\pi/3}$ *и* $\omega_1 = \ln\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$.

Доказательство. Пусть $z = e^{i\varphi}$. Тогда

$$\ln\frac{1}{|1-z|} = \ln\frac{1}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}}$$

есть выпуклая функция от φ при $\varphi \in \partial U \backslash s(\nu)$. Пусть $\Gamma_{\theta} = \{z = e^{i\theta} : \theta \leq |\varphi| \leq \pi\}$ $(\theta < \pi)$. Докажем, что $supp\,(\lambda_1) = \Gamma_{\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$ (θ_0 — неизвестное число). Предположим противное: существуют θ', $\theta'' \in \Gamma_{\theta}$ и $(\theta', \theta'') \cap supp\,(\lambda) = \emptyset$, $\theta' \in supp\,(\lambda)$, $\theta'' \in supp\,(\lambda)$. Тогда из (8) следует, что

$$V^{\lambda_1}(e^{i\theta'}) + \ln\frac{1}{|1-e^{i\theta'}|} = w_1 = V^{\lambda_1}(e^{i\theta''}) + \ln\frac{1}{|1-e^{i\theta''}|}$$

и на (θ', θ'') выполняется неравенство $V^{\lambda}(e^{i\theta}) + \ln\dfrac{1}{|1-e^{i\theta}|} \geq w_1$. Но потенциал и внешнее поле — выпуклые вниз функции на (θ', θ''), поэтому

$$V^{\lambda_1}(e^{i\theta}) + \ln\frac{1}{|1-e^{i\theta}|} = w, \quad \theta \in (\theta', \theta''),$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(V^{\lambda_1}(e^{i\theta}) + \ln\frac{1}{|1-e^{i\theta}|}\right) = 0, \quad \theta \in (\theta', \theta''),$$

$$\frac{\partial^2}{d\theta^2}\left(V^{\lambda_1}(e^{i\theta}) + \ln\frac{1}{|1-e^{i\theta}|}\right) = 0, \quad \theta \in (\theta', \theta''),$$

что противоречит строгой выпуклости потенциала и внешнего поля. Таким образом, $supp\,(\lambda_1) = \Gamma_{\theta_1\theta_2} = \{e^{i\theta}, \theta_1 \le \theta \le 2\pi - \theta_2\}$.

Докажем, что $\theta_1 = \theta_2$. Предположим, что это не так. Равновесной мере λ_1 поставим в соответствие λ_1^*, $\lambda_1^*(e) = \lambda_1(\overline{e})$, e — борелевское множество на ∂U, $\overline{e}$ — множество, сопряженное множеству e. Тогда

$$V^{\lambda_1}(e^{i\theta}) + \ln\frac{1}{|1-e^{i\theta}|}\begin{cases} = w, & 0 \in \Gamma_{\theta_1\theta_2},\\ \ge w, & 0 \le \theta \le 2\pi.\end{cases}$$

Но

$$V^{\lambda_1}(e^{i\theta}) + \ln\frac{1}{|1-e^{i\theta}|} = \int \ln\frac{1}{|e^{i\theta}-e^{i\varphi}|}d\lambda_1(e^{i\varphi}) + \ln\frac{1}{|1-e^{i\theta}|} \overset{\theta\to-\theta}{=}$$

$$\overset{\theta\to-\theta}{=} \int \ln\frac{1}{|e^{-i\theta}-e^{i\varphi}|}d\lambda_1(e^{i\varphi}) + \ln\frac{1}{|1-e^{-i\theta}|} =$$

$$= \int \ln\frac{1}{|e^{-i\theta}e^{i\varphi}||e^{-i\varphi}-e^{i\theta}|} + \ln\frac{1}{|e^{-i\theta}||1-e^{i\theta}|} \overset{-\varphi\to\varphi}{=}$$

$$\overset{-\varphi\to\varphi}{=} \int \ln\frac{1}{|e^{i\theta}-e^{i\varphi}|}d\lambda_1(e^{i\varphi}) + \ln\frac{1}{|1-e^{i\theta}|} =$$

$$= \int \ln\frac{1}{|z-t|}d\lambda_1^*(t) + \ln\frac{1}{|1-z|},$$

$$\begin{cases} = w_1, & z \in \Gamma_{\theta_2\theta_1}\\ \ge w_1, & |z| = 1.\end{cases}$$

Отсюда следует, что λ_1^* — равновесная мера в поле $\ln\dfrac{1}{|1-z|}$. В силу единственности равновесной меры получаем, что $\lambda_1^* = \lambda_1 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow supp\lambda_1 = \Gamma_{\theta_0} = \{e^{i\theta},\, \theta_0 \le \theta \le 2\pi - \theta_0\}$.

Пусть $g_{\theta_0}(z,\infty)$, $g_{\theta_0}(z,1)$ — функции Грина области $\overline{C}\setminus\Gamma_{\theta_0}$ с полюсами в ∞ и 1 соответственно. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = V^{\lambda_1}(z) + \ln\frac{1}{|1-z|} + 2g_{\theta_0}(z,\infty) - g_{\theta_0}(z,1). \tag{11}$$

Очевидно, функция φ — гармоническая в $\overline{C}\setminus\Gamma_{\theta_0}$ и на Γ_{θ_0} и в силу (8) $\varphi(z) = \omega_1$. Из принципа максимума для гармонических функций следует, что $\varphi(z) \equiv \omega_1$, $z \in \overline{C}$. Устремляя z к бесконечности, находим, что $\omega_1 = 2\gamma_{\theta_0} - g_{\theta_0}(\infty,1) = 2\gamma_{\theta_0} - g_{\theta_0}(1,\infty)$, где γ_{θ_0} — постоянная Рабена дуги Γ_{θ_0}.

Пусть $w(z) = V^{\lambda_1}(z) + \ln\dfrac{1}{|1-z|} - g_\theta(z,1) + 2g_\theta(z,\infty)$. Функция φ — супергармоническая функция в $\overline{C}\setminus\Gamma_{\theta_0}$. Из принципа максимума для супергармонических функций следует, что

$$\begin{aligned} w(\infty) \geq \min_{z\in\Gamma_\theta} w(z) &= \min_{z\in\Gamma_\theta}\left(V^{\lambda_1}(z) + \ln\frac{1}{|1-z|}\right) \geq \\ &\geq \min_{|z|=1}\left(V^{\lambda_1}(z) + \ln\frac{1}{|1-z|}\right) = w_1 = 2\gamma_{\theta_0} - g_{\theta_0}(1,\infty). \end{aligned}$$

Но $w(\infty) = 2\gamma_\theta - g_\theta(\infty,1) = 2\gamma_\theta - g_\theta(1,\infty)$. Тогда для любой дуги Γ_θ имеем $2\gamma_\theta - g_\theta(1,\infty) \geq 2\gamma_{\theta_0} - g_{\theta_0}(1,\infty)$, где Γ_{θ_0} — носитель равновесной меры. Таким образом, θ_0 определяется из уравнения $\dfrac{d}{d\theta}(2\gamma_\theta - g_{\Gamma_\theta}(1,\infty)) = 0$.

Пусть $F(z,\Gamma_{\theta_0})$ — функция, конформно отображающая $\overline{C}\setminus\Gamma_\theta$ на внешность единичного круга и переводящая ∞ в ∞. Нетрудно вычислить, что

$$F(z,\Gamma_0) = \frac{z+1+\sqrt{z^2-2z\cos\theta+1}}{2\cos\theta b},$$

и значит

$$g_{\theta_0}(z,\infty) = \ln\left|\frac{z+1+\sqrt{z^2-2z\cos\theta_0+1}}{2\cos\dfrac{\theta_0}{2}}\right|, \tag{12}$$

$$g_{\theta_0}(z,1) = \ln\left|\frac{1-F(1,\theta_0)F(z,\theta_0)}{F(z,\theta_0)-F(1,\theta_0)}\right|. \tag{13}$$

Из (12) и (13) находим

$$\gamma_\theta = \ln\frac{1}{\cos\dfrac{\theta}{2}} \quad \text{и} \quad 2\gamma_\theta - g_\theta(1,\infty) = \ln\frac{1}{\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}. \tag{14}$$

Из (14) следует, что θ_0 определяется из уравнения

$$2\sin^2\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} - 1 = 0,$$

отсюда $\theta_0 = \dfrac{\pi}{3}$ и $\omega_1 = \ln\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. Лемма доказана. □

Из (11), (12) и (13) следует, что

$$V^{\lambda_1} + \ln\frac{1}{|1-z|} - \omega_1 = \ln\left|\frac{(z+1+\sqrt{z^2-z+1})(z-2+\sqrt{z^2-z+1})^2}{3\sqrt{3}(z+\sqrt{z^2-z+1})^2}\right|. \tag{15}$$

4. Пусть $\pi_n = \pi_n(f) = \dfrac{p_n}{q_n}$, $\deg p_n = n$, $\deg q_n = n$. Из (2) следует, что функция $((q_n f - p_n)(z))/\omega_n(z)$ голоморфна в U, $\omega_n = \prod_{k=1}^{2n+1}(z - z_k)$. Применяя формулу Коши, получаем

$$\left(Q\frac{q_n f - p_n}{\omega_n}\right)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\left(Q\frac{q_n f}{\omega_n}\right)(t)\frac{dt}{t-z},$$

где $Q(z)$ — произвольный полином степени не выше n. Отсюда имеем

$$\left(f - \pi_n\right)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\frac{Q(t)q_n(t)}{Q(z)q_n(z)}\frac{f(t)dt}{t-z}, \quad z \in U. \tag{16}$$

Пусть $\|f\|_{\partial U} = M$, $|t-z| \geq \min_{t\in\partial U}|t-z| = \rho(z,\partial U) \Rightarrow \dfrac{1}{|t-z|} \leq \dfrac{1}{\rho(z,\partial U)}$. Тогда из (10) следует

$$|f(z) - \pi(z)| \leq \frac{M}{\rho(z,\partial U)}\left|\frac{\omega_n(z)}{Q(z)q_n(z)}\right|\left\|\frac{Qq_n}{\omega_n}\right\|_{\partial U}, \;\; z \in K \subset U.$$

Если $z_1^{(n)} = z_2^{(n)} = \cdots z_{2n+1}^{(n)} = 0 \Rightarrow \omega_n(z) = \prod_{k=1}^{2n+1} z = z^{2n+1}$, то

$$|f(z) - \pi(z)| \leq \frac{M}{\rho(z,\partial U)}|z|^{2n+1}\frac{\|Qq_n\|_{\partial U}}{|Q(z)q_n(z)|}. \tag{17}$$

4.1. Если $Q(z) = 1$, то

$$|f(z) - \pi(z)| \leq \frac{M}{\rho(z,\partial U)}|z|^{2n+1}\frac{\|q_n(t)\|_{\partial U_1}}{|q_n(z)|} \leq \frac{M}{\rho(z,\partial U)}|z|^{2n+1}\frac{\left\|\prod_{j=1}^{n'}|t-z_j|\right\|_{\partial U_1}}{\left|\prod_{j=1}^{n'}(z-z_j)\right|} \leq$$
$$\leq \frac{M}{\rho(z,\partial U)}|z|^{2n+1}\prod_{j=1}^{n}\frac{|1+|z_j||}{|z_j|-|z|} \leq \frac{M}{\rho(z,\partial U)}|z|^{2n+1}\prod_{j=1}^{n}\frac{2}{1-|z_j|} \leq \frac{M}{\rho(z,\partial U)}\left(\frac{2r^2}{1-r}\right)^n$$

и получаем $\dfrac{2r^2}{1-r} < 1 \Rightarrow 2r^2 + r - 1 < 0 \Rightarrow r_{1,2} \leq \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \\ -1. \end{cases}$

4.2. Если $Q_n(z) = q_n(-z)$, то

$$|f(z) - \pi(z)| \le \frac{M}{\rho(z,\partial U)}|z|^{2n+1}\frac{\|Qq_n\|_{\partial U}}{|Q(z)q_n(z)|} = \frac{M}{\rho(z,\partial U)}|z|^{2n+1}\frac{\|q_n(t)q_n(-t)\|_{\partial U}}{|q_n(z)(z)q_n(-z)|} \le$$

$$\le \frac{M}{\rho(z,\partial U)}|z|^{2n+1}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}|z_j^2|\left\|1-\dfrac{t^2}{z_j^2}\right\|_{\partial U}}{\prod\limits_{j=1}^{n}|z_j^2|\left|1-\dfrac{z^2}{z_j^2}\right|} = \frac{M}{\rho(z,\partial U)}|z|^{2n+1}\prod_{j=1}^{n}\frac{\left\|1-\dfrac{t^2}{z_j^2}\right\|_{\partial U}}{\left|1-\dfrac{z^2}{z_j^2}\right|} =$$

$$= \frac{M}{\rho(z,\partial U)}|z|^{2n+1}\prod_{j=1}^{n}\frac{2}{1-z^2} \le \frac{M}{\rho(z,\partial U)}\left(\frac{2z^2}{1-z^2}\right)^n$$

и получаем $\dfrac{2r^2}{1-r^2} < 1 \Rightarrow 3r^2 < 1 \Rightarrow r^2 < \dfrac{1}{3} \Rightarrow r < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

4.3. Пусть ν_n и μ_n — меры, ассоциированные с полиномами Q и q_n соответственно. Тогда из (17) следует

$$\frac{1}{n}\ln|(f-\pi_n)(z)| \le 2\ln|z| + (V^{\nu_n}+V^{\mu_n})(z) - \min_{t\in\partial U}(V^{\nu_n}+V^{\mu_n})(t) + o(1), \quad n\to\infty. \quad (18)$$

Выберем полином Q так, чтобы носитель $supp(\mu_n) \subset \partial U$; по условию $supp\,(\lambda_n) \subset C\backslash U$ для $n \in \Lambda \subset N$. Пусть μ_n^* — продолжение меры μ_n на ∂U, т. е. $(V^{\mu_n^*} - V^{\mu_n})(z) = \text{const}$ для $\forall z \in U$. Тогда (18) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{n}\ln|(f-\pi_n)(z)| \le 2\ln|z| + (V^{\nu_n}+V^{\mu_n^*})(z) - \min_{t\in\partial U}(V^{\nu_n}+V^{\mu_n^*})(t) + o(1),$$
$$n\to\infty, \quad n\in\Lambda, \quad z\in U. \quad (19)$$

Отсюда получаем

$$(V^{\tilde\nu}+V^{\tilde\mu})\left(\frac{1}{z}\right) - \min_{|t|=1}(V^{\tilde\nu}+V^{\tilde\mu})\left(\frac{1}{t}\right) \le$$
$$\le \int\left(\left(V^{\lambda_t}+V^{\delta_t}\right)\left(\frac{1}{z}\right) - \min_{|u|=1}\left(V^{\lambda_t}+V^{\delta_t}\right)\left(\frac{1}{u}\right)\right)d\tilde\mu(t) \le$$
$$\le \left(V^{\lambda_\xi}+V^{\delta_\xi}\right)\left(\frac{1}{z}\right) - \min_{|t|=1}\left(V^{\lambda_\xi}+V^{\delta_\xi}\right)\left(\frac{1}{t}\right), \quad (20)$$

где $|\xi| = 1$, $\arg\xi = \arg\dfrac{1}{z}$, т. е.

$$\lim_{n\in\Lambda}\frac{1}{n}\ln|(f-\pi_n)(z)| \le \ln\left|\frac{\left(\dfrac{\xi}{z}+1+\sqrt{\left(\dfrac{\xi}{z}\right)^2-\dfrac{\xi}{z}+1}\right)\left(\dfrac{\xi}{z}-2+\sqrt{\left(\dfrac{\xi}{z}\right)^2-\dfrac{\xi}{z}+1}\right)^2}{3\sqrt{3}\left(\dfrac{\xi}{z}+\sqrt{\left(\dfrac{\xi}{z}\right)^2-\dfrac{\xi}{z}+1}\right)^2}\right|. \quad (21)$$

Нетрудно подсчитать, что правая часть неравенства (21) меньше нуля при $|z| < r$, где r определяется из уравнения

$$2g_{\pi/3}(r,0) - g_{\pi/3}(r,1) = 0.$$

Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.

[2] Рахманов А.Е. О сходимости аппроксимаций Паде в классах голоморфных функций // Мат. сборник. 1980. Т. 112(154), № 2(6). С. 162–169.

[3] Гончар А.А. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Там же. 1982. Т. 118(160), № 4(8). С. 535–556.

[4] Ландкоф С.Н. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 14 апреля 2010 г.