Вычислительные технологии **Том 15, № 3, 2010**

Тестовые эквивалентности для моделей структур событий с непрерывным временем*

Е. Н. Боженкова
Институт систем информатики СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, Россия
e-mail: `bozhenko@iis.nsk.su`

При верификации сложных вычислительных систем часто применяют понятия тестовой эквивалентности. В работе рассмотрена и решена проблема распознавания временных тестовых эквивалентностей в рамках модели временных структур событий с невидимыми действиями. Предлагаемый способ решения — сведение проблемы к проверке формулы на модели (model-checking). Для этого строятся логические формулы, характеризующие временную структуру событий с точностью до тестовых *must*- и *may*-предпорядков.

Ключевые слова: временные структуры событий, тестовые эквивалентности, реальное время, логическая характеризация.

Введение

Распределенные системы, работающие в режиме реального времени, сложны для разработки и проверки корректности. Для упрощения структуры и повышения уровня абстракции при спецификации и верификации таких систем, состоящих из большого числа взаимодействующих компонентов, важным является понятие эквивалентности.

В теории формальных моделей было предложено и изучено большое разнообразие эквивалентностных понятий. Один из известных подходов при определении эквивалентности — тестовый. Два процесса считаются тестово эквивалентными, если они могут (*may*) или должны (*must*) проходить одинаковый набор тестов. Тестовые эквивалентности используются для сравнения систем, проверки соответствия реализации ранее заданной спецификации, проверки выполнимости логических формул.

Существует несколько методов определения тестовых эквивалентностей. Один из них — метод тестирования соответствия спецификациям (conformance testing) [1], который состоит в генерации конечного множества тестов на основе спецификации и дальнейшей их проверке на реализованном процессе с неизвестной внутренней структурой. При таком подходе делается предположение, что при проверке теста за конечное число раз можно пройти все возможные пути исполнения процесса.

Другой, более формальный, метод тестирования состоит в следующем: внутренняя структура сравниваемых процессов предполагается известной, и сравнение проводится относительно множества всех возможных тестов. Для данного метода понятие тестовой эквивалентности дано Хеннесси и де Николой в работе [2], где для облегчения

*Работа выполнена при финансовой поддержке DFG-РФФИ (гранты № 436 РФФИ 113/1002/01 и 09-01-91334).

применения тестовых эквивалентностей были найдены их альтернативные характеризации для модели систем переходов и на их основе предложен метод построения тестов. Разрешимость тестовой эквивалентности обычно достигается ее сведением к бисимуляционной [3]. Тестовые эквивалентности исследованы и для других формальных моделей как безвременных, так и с временными характеристиками. Альтернативные характеризации через соотношения множеств возможных действий были даны для асинхронных моделей [4] и для моделей с вероятностными характеристиками [5, 6]. Для структур событий [7, 8] тестовые эквивалентности введены в контексте различных семантик (интерливинговой, пошаговой, частичного порядка) и изучены взаимосвязи между ними на различных подклассах. Хеннесси и Реган [9] дали альтернативную характеризацию и аксиоматизацию для тестовых эквивалентностей для модели алгебр процессов с дискретным временем. Нильсен и Скоу [10] рассмотрели тестовые эквивалентности для класса детерминизируемых временных автоматов с непрерывным временем и предложили метод генерации конечного и полного множества тестов для данной модели. Фоглером и Бихлером временные тестовые отношения (faster-than-relations) исследованы для асинхронной модели временных сетей Петри в статье [11], где дается характеризация через множество слов, включающих отклоняемые действия (refusal traces). Эти авторы показывают возможность дискретизации, что позволяет получить совпадение тестовых отношений с дискретным и непрерывным временами. Для временных структур событий с непрерывным временем найдены альтернативные характеризации тестовых предпорядков [12], рассмотрена проблема распознавания тестовых отношений и построены характеризационные формулы для подклассов без невидимых действий [13].

Данная работа исследует разрешимость тестовых $must$- и may-эквивалентностей для непрерывно-временных структур событий с невидимыми действиями. В этой модели временной интервал, сопоставленный событию, обозначает отрезок времени, в который событие должно случиться, после выполнения своих предшественников. Также предполагается, что выполнение события происходит мгновенно. Разрешимость тестовых отношений дается через построение логической формулы, характеризующей временную структуру событий с точностью до тестовой эквивалентности, и проблема распознавания, являются ли две временных структуры событий тестово эквивалентными, сводится к проверке, удовлетворяет ли одна из них характеризационной формуле другой. В качестве базовой логики использована временная модальная логика L_ν [14]. Характеризационная формула отражает структуру возможных выполнений временной структуры событий в удобном для анализа виде. Сложность при построении такой формулы состоит в организации пространства состояний таким образом, чтобы все состояния, достижимые одним временным словом, были собраны вместе.

Материал статьи излагается в следующем порядке. В разделе 1 вводятся основные понятия, связанные с временными структурами событий, 2 — определяются временные тестовые предпорядки и эквивалентности, 3 — рассматривается временная модальная логика L_ν, 4 — даются понятия, используемые для получения конечного представления пространства состояний. Раздел 5 посвящен построению характеризационных формул.

1. Временные структуры событий

Определим основные понятия, связанные с моделью временных структур событий, которая является расширением модели Винскеля [15] за счет введения временных интервалов на события структуры.

Пусть Act — конечное множество действий и τ — невидимое действие, причем $\tau \notin Act$, тогда $Act_\tau = Act \cup \{\tau\}$.

Определение 1. Структура событий, *помеченная над* Act_τ, *— это набор* $S = (E, \leq, \#, l)$, *где* E *— конечное множество событий;* $\leq \; \subseteq E \times E$ *— частичный порядок (отношение* причинной зависимости*);* $\# \subseteq E \times E$ *— симметричное и иррефлексивное отношение (отношение* конфликта*), удовлетворяющее принципу* наследования конфликта*:* $\forall e, e', e'' \in E \; . \; e \; \# \; e' \leq e'' \;\Rightarrow\; e \; \# e''$ *;* $l : E \to Act_\tau$ *— помечающая функция, сопоставляющая каждому событию из* E *действие из* Act_τ*.*

Пусть $S = (E, \leq, \#, l)$ — структура событий, $C \subseteq E$. Тогда C — *левозамкнутое*, если событие содержится в множестве вместе со своими предшественниками: $\forall e, e' \in E \; . \; e \in C \;\wedge\; e' \leq e \Rightarrow e' \in C$. Будем называть C *бесконфликтным*, если любая пара событий из C не находится в отношении конфликта. *Конфигурацией в* S назовем левозамкнутое и бесконфликтное множество. Множество всех конфигураций в S будем обозначать через $Conf(S)$. Назовем событие *готовым* для конфигурации $C \in Conf(S)$, если при включении его в множество C получаем конфигурацию. Множество готовых событий для конфигурации C обозначим через $En(C)$.

Для множеств натуральных и действительных чисел используются стандартные обозначения ($\mathbf{N}$, $\mathbf{R}_\mathbf{0}^+$, $\mathbf{R}^+$). Для числа $d \in \mathbf{R}_0^+$ $\lfloor d \rfloor$ ($\lceil d \rceil$) обозначает его наименьшую (наибольшую) целую часть, а $\{d\}$ — его дробную часть. Определим множество временных интервалов $Interv(\mathbf{R}_0^+) = \{[d_1, d_2] \subset \mathbf{R}_0^+ \mid d_1, d_2 \in \; \mathbf{N}\}$.

Теперь можем ввести понятие временной структуры событий.

Определение 2. Временная структура событий (ВСС), *помеченная над* Act_τ, *— это пара* $TS = (S, D)$, *где* $S = (E, \leq, \#, l)$ *— структура событий, помеченная над* Act_τ*;* $D : E \to \; Interv(\mathbf{R}_0^+)$ *— временная функция, сопоставляющая каждому событию из* E *временной интервал из* $Interv(\mathbf{R}_0^+)$*, такая, что* $D(e)$ *— точечный интервал из* $Interv(\mathbf{R}_0^+)$ *для всех* $e \in E$ *с* $l(e) = \tau$*.*

Временной интервал, приписываемый каждому событию, отражает отрезок времени, в который событие должно случиться.

В графическом представлении ВСС события изображаются вместе с сопоставленными им действиями и временными интервалами; между парами событий, включенными в отношение причинной зависимости, рисуются стрелки; между парами событий, включенными в отношение конфликта, рисуются символы $'\#'$. Обычно, чтобы избежать загромождения, имена событий опускаются и указываются только соответствующие помечающие действия.

Пример 1. На рис. 1 приведена временная структура событий TS_1, множество событий которой состоит из e_1, e_2, e_3. События e_1 и e_2 находятся в отношении причинной зависимости, e_2 и e_3 — в отношении конфликта.

Зафиксируем помеченные над Act_τ временные структуры событий $TS = (S = (E, \leq, \#, \; l), D)$ и $TS' = (S' = (E', \leq', \#', l'), D')$ и, если не оговорено другое, будем работать с ними.

$$
\begin{array}{llcll}
TS_1 : & [0,1] \quad a : e_1 & \longrightarrow & b : e_2 & [1,3] \\
 & & & \# & \\
 & & & \tau : e_3 & [2,2]
\end{array}
$$

Рис. 1. Пример временной структуры событий

Состоянием в TS называется пара $M = (C, \delta)$ такая, что C — конфигурация в S, $\delta : E \to \mathbf{R}_0^+$ — функция временных значений. Множество состояний в TS будем обозначать через $ST(TS)$. Пусть $M_{TS} = (\emptyset, 0)$ — *начальное состояние* в TS. Состояние $M = (C, \delta)$ называется *заключительным*, если для его конфигурации C нет готовых событий.

Выполнение временной структуры событий представляется последовательностью переходов из одного состояния в другое, которые осуществляются либо путем выполнения события, либо посредством истечения некоторого времени. Событие готово выполниться в некотором состоянии, если бесконфликтное множество его предшественников уже выполнилось, а значение временной функции находится в пределах временного интервала, приписанного данному событию. Предполагаем, что событие срабатывает мгновенно. В состоянии может пройти некоторое количество времени, если после этого временные значения готовых к выполнению событий не превысят границ временных интервалов.

Пусть $M_1 = (C_1, \delta_1), M_2 = (C_2, \delta_2) \in ST(TS)$, причем M не является заключительным состоянием. Состояние M_1 *переходит* в состояние M_2 посредством выполнения события e (обозначается $M_1 \stackrel{e}{\to} M_2$), если e готово для конфигурации C, $\delta_1(e) \in D(e)$, $C_2 = C_1 \cup \{e\}$ и

$$\delta_2(e') = \begin{cases} 0, & \text{если } e' \in En(C_2) \setminus En(C_1), \\ \delta_1(e'), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Примем $M_1 \stackrel{a}{\to} M_2$, если $M_1 \stackrel{e}{\to} M_2$ и $l(e) = a$. Также будем считать, что для таких состояний действие a (событие e) может выполниться: $M_1 \stackrel{a}{\to}$ ($M_1 \stackrel{e}{\to}$).

Состояние M_1 *переходит* в M_2 посредством истечения времени $d \in \mathbf{R}^+$ (обозначается как $M_1 \stackrel{d}{\to} M_2$), если $C_2 = C_1$, $\forall e \in En(C_1)\ \exists d' \geq d\ .\ \delta_1(e) + d' \in D(e)$ и для всех $e \in E$ $\delta_2(e) = \delta_1(e) + d$.

Чтобы абстрагироваться от выполнения невидимых действий, будем использовать понятие слабого перехода. *Слабое отношение перехода* на состояниях в TS определяется как отношение $\Rightarrow$ такое, что $\stackrel{\epsilon}{\Rightarrow} \iff \stackrel{\tau}{\to}^*$ и $\stackrel{x}{\Rightarrow} \iff \stackrel{\epsilon}{\Rightarrow}\stackrel{x}{\to}\stackrel{\epsilon}{\Rightarrow}$, где $\stackrel{\tau}{\to}^*$ — рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\stackrel{\tau}{\to}$ и $x \in Act \cup \mathbf{R}^+$. Предполагаем, что для отношения перехода $\stackrel{d}{\Rightarrow}$ выполняется *правило непрерывности времени*: если в некотором состоянии возможен переход по истечении времени d, то в этом состоянии возможны и последовательные переходы по истечении меньшего количества времен d_1 и d_2 таких, что $d = d_1 + d_2$.

Выполнение ВСС порождает язык ВСС, слова которого являются последовательностью временных действий.

Временное действие $a(d)$ — это видимое действие с указанием временной задержки перед его выполнением. Тогда для последовательности временных действий $w = a_1(d_1) \ldots a_n(d_n)$ ее длительность $\triangle(w)$ вычисляется как сумма всех временных задержек, входящих в w временных действий. Временное слово $\langle w, d\rangle$ состоит из последовательности временных действий w и длительности временного слова d, которая не может быть меньше длительности $\triangle(w)$. Множество временных слов будем обозначать $Dom(Act,\ \mathbf{R}_0^+)$. Естественным образом слабое отношение перехода обобщается на временные действия и на временные слова. *Языком* временной структуры событий TS будем называть множество временных слов, которые могут выполниться в начальном состоянии, $L(TS) = \{\langle w, d\rangle \in Dom(Act, \mathbf{R}_\mathbf{0}^+) \mid\ M_{TS} \stackrel{\langle w,d\rangle}{\Longrightarrow}\}$.

Пример 2. Для ВСС TS_1 (см. рис. 1) языком будет множество $L(TS_1) = \{\langle \epsilon, d_1 \rangle, \langle a(d_1), d_1 + d_2 \rangle, \langle a(d_1)b(d_3), d_1 + d_3 \rangle \mid 0 \le d_1 \le 1,\ 0 \le d_2 \le 2,\ 1 \le d_3 \le 2,\ d_1 + d_2 \le 2, d_1 + d_3 \le 2\}$.

2. Временная тестовая эквивалентность

Рассмотрим понятия временных тестовых предпорядков и эквивалентностей на ВСС. При тестовом подходе поведение системы исследуется посредством набора тестов [2].

Два процесса считаются тестово эквивалентными, если они могут (may) или должны ($must$) проходить одинаковый набор тестов. Тест является специальным процессом и выполняется параллельно с каждым из тестируемых процессов. Такое выполнение будет успешным, если тест достигнет специального успешного состояния. Процесс проходит тест, если каждое (в случае $must$-предпорядка) или хотя бы одно (в случае may-предпорядка) параллельное выполнение процесса и теста успешно.

Для ВСС была найдена альтернативная характеризация временных тестовых эквивалентностей [12], и в настоящей работе удобнее использовать ее в качестве формального определения временных тестовых отношений. Как оказалось, may-предпорядок характеризуется включением временных языков, а для $must$-предпорядка необходимо, чтобы между состояниями двух ВСС, полученными после выполнения временного слова языков ВСС, было некоторое соответствие ($\subset\subset$): а именно, должно быть включение множества действий, готовых к выполнению, и если в состоянии второй ВСС время не может пройти, то оно не может пройти и в состоянии первой ВСС.

Прежде введем ряд вспомогательных обозначений, полезных для формальных определений. Пусть M — некоторое состояние TS, $\langle w, d \rangle$ — временное слово. Множество действий, которые могут быть выполнены в состоянии M, обозначим как $S(M) = \{y \in Act_\tau \cup \mathbf{R}^+ \mid M \xrightarrow{y}\}$. Для всех состояний, достижимых выполнением временного слова $\langle w, d \rangle$, такие множества образуют множество $Acc(TS, \langle w, d \rangle) = \{S(M') \mid M_{TS} \overset{\langle w,d \rangle}{\Longrightarrow} M', M' \overset{\tau}{\not\to}\}$. Пусть $N, N' \subset 2^{Act \cup \mathbf{R}^+}$. Тогда $N' \subset\subset N \iff \forall S' \in N'\ \exists S \in N\ .\ (S\mid_{Act} \subseteq S'\mid_{Act}) \ \wedge\ (S'\mid_{\mathbf{R}^+} = \emptyset \Rightarrow S\mid_{\mathbf{R}^+} = \emptyset)$.

Теперь определим понятия временных тестовых предпорядков и эквивалентностей следующим образом.

Определение 3.

— $TS \ \le_{may}\ TS' \iff L(TS) \subseteq L(TS')$;

— $TS \ \le_{must}\ TS' \iff \forall \langle w, d \rangle \in Dom(Act, \mathbf{R}_0^+)\ Acc(TS', \langle w, d \rangle) \subset\subset Acc(TS, \langle w, d \rangle)$;

— $TS \simeq_\alpha TS' \iff TS \le_\alpha TS' \ \wedge\ TS' \le_\alpha TS$, *где* $\alpha \in \{may,\ must\}$.

Пример 3. Временные структуры событий TS_2 и TS_2' являются may-эквивалентными (рис. 2, *а* — $must$-эквивалентные, *б* — не $must$-эквивалентные). Рассмотрим $Acc(TS_3, \langle a(0), 1 \rangle) = \{\{c\} \cup (0, 1]\}$ и $Acc(TS_3', \langle a(0), 1 \rangle) = \{(\{c\} \cup (0, 1]), \{c\}\}$. Это означает, что в TS_3 после выполнения действия a и истечения времени 1 может быть выполнено действие c или может пройти время из интервала $(0, 1]$. В TS_3' после выполнения такого же временного слова можем получить два состояния, причем в одном, как и в TS_3, может быть выполнено действие c или может пройти время из интервала $(0, 1]$, но в другом может быть выполнено только действие c. Тогда не существует $S \in Acc(TS_3, \langle a(0), 1 \rangle)$ такого, что $\{c\}\mid_{\mathbf{R}^+} = \emptyset \Rightarrow S\mid_{\mathbf{R}^+} = \emptyset$, т. е. $\neg(Acc(TS_3', \langle a(0), 1 \rangle) \subset\subset Acc(TS_3, \langle a(0), 1 \rangle))$.

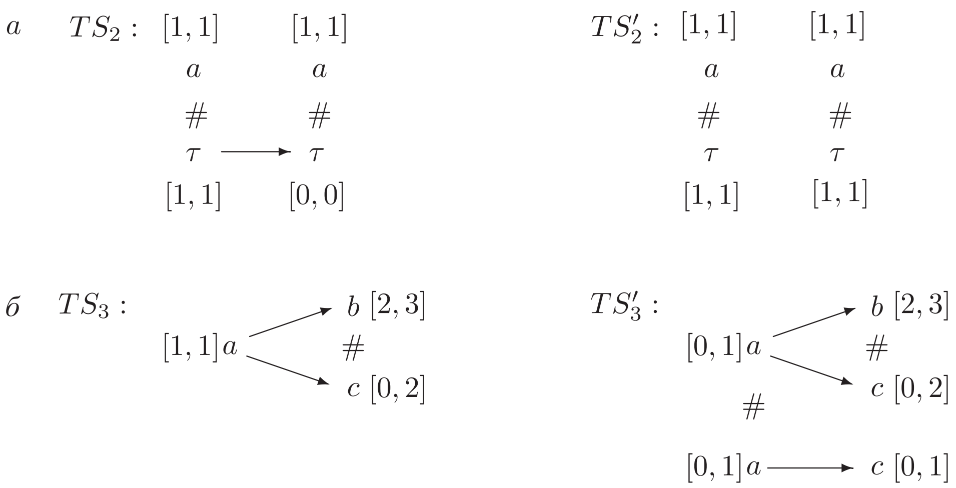

Рис. 2. Пример *must*-эквивалентных (*а*) и не *must*-эквивалентных (*б*) временных структур событий

3. Временная модальная логика

Рассмотрим основные понятия временной логики L_ν, предложенной в [14]. Логика L_ν является фрагментом μ-исчисления с максимальной рекурсией. В дальнейшем формулы данной логики будем использовать для характеризации ВСС с точностью до временной тестовой эквивалентности.

Определение 4. *Пусть даны K — конечное множество часов, Id — множество переменных и k — целое число. Множество формул логики L_ν над K, Id и k образуется следующим абстрактным синтаксисом:*

$$\phi := tt \mid f\!f \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \exists\phi \mid \forall\!\!\!\forall\phi \mid \langle a\rangle\phi \mid [a]\phi \mid x \ in\ \phi \mid x+n \bowtie y+m \mid x \bowtie m \mid Z,$$

где $a \in Act_\tau$, $x, y \in K$, $n, m \in \{0, 1, \ldots, k\}$, $\bowtie \in \{=, <, \leq, >, \geq\}$ и $Z \in Id$.

Означивание переменных из Id осуществляется декларацией D, которая сопоставляет формулу L_ν каждой переменной. Если D ясна из контекста, будем вместо $D(Z) = \phi$ писать $Z := \phi$. Часы K называются *формульными часами* и формула ϕ называется *замкнутой*, если все формульные часы ϕ находятся в области действия оператора "x in ...". Для данной временной структуры событий TS формулы L_ν интерпретируются на *расширенных* состояниях $(C, \delta u)$, где (C, δ) — состояния TS, u — означивание формульных часов из K. При переходе из одного расширенного состояние в другое означивание формульных часов изменяется синхронно с временной функцией δ. Отношение выполнимости определяется аналогично [14], и ниже приведена только часть условий.

Определение 5. *Пусть даны временная структура событий TS и декларация D. Отношение выполнимости $\models_{\mathcal{D}}$ — наибольшее отношение, удовлетворяющее следующим условиям: $(C, \delta u) \models_{\mathcal{D}} tt \Rightarrow$ истина; $(C, \delta u) \models_{\mathcal{D}} f\!f \Rightarrow$ ложь;*

$$(C, \delta u) \models_{\mathcal{D}} \phi \wedge \psi \quad \Rightarrow \quad (C, \delta u) \models_{\mathcal{D}} \phi \text{ и } (C, \delta u) \models_{\mathcal{D}} \psi;$$
$$(C, \delta u) \models_{\mathcal{D}} \exists\phi \quad \Rightarrow \quad \exists d \in \mathbf{R}_0^+ \ .\ (C, \delta) \overset{\epsilon(d)}{\Rightarrow} (C', \delta') \text{ и } (C', \delta' u + d) \models_{\mathcal{D}} \phi;$$
$$(C, \delta u) \models_{\mathcal{D}} [a]\phi \quad \Rightarrow \quad \forall (C', \delta') \in ST(TS)\ .\ (C, \delta) \overset{a}{\rightarrow}\overset{\epsilon}{\Rightarrow} (C', \delta') \text{ влечет } (C', \delta' u) \models_{\mathcal{D}} \phi.$$

$$\begin{aligned}(C,\delta u) \models_{\mathcal{D}} x+m \bowtie y+n &\;\Rightarrow\; u(x)+m \bowtie u(y)+n;\\ (C,\delta u) \models_{\mathcal{D}} x \ in\ \phi &\;\Rightarrow\; (C,\delta u') \models_{\mathcal{D}} \phi,\ \textit{где}\ u' = [\{x\} \to 0]u;\\ (C,\delta u) \models_{\mathcal{D}} Z &\;\Rightarrow\; (C,\delta u) \models_{\mathcal{D}} D(Z).\end{aligned}$$

TS *удовлетворяет* замкнутой формуле ϕ логики L_ν ($TS \models_{\mathcal{D}} \phi$), если $(C_0, \delta_0 u) \models_{\mathcal{D}} \phi$ при любом u. Заметим, что если ϕ — замкнутая формула, то $(C,\delta u) \models_{\mathcal{D}} \phi$, только если $(C, \delta u') \models_{\mathcal{D}} \phi$ при любых $u, u' \in \mathbf{R}_0^{+K}$.

Пример 4. Пусть $Act = \{a\}$, $K = \{x\}$. Тогда простой пример формулы логики L_ν $\phi = x\ in\ \exists[a]tt$ и ВСС TS_2 (см. рис. 2) удовлетворяет ϕ, так как существует время $d = 1$, после истечения которого может выполниться действие a.

4. От пространства состояний к графу классов

Для построения характеризационной формулы необходимо преобразовать бесконечное пространство состояний к конечному представлению таким образом, чтобы состояния, достижимые одним и тем же временным словом, были собраны в одном классе. Для получения дискретного представления будем использовать понятие региона, аналогичное введенному Алуром [16], а затем для получения детерминированного представления перейдем к классам. Понятие региона введем не на обычных состояниях из $ST(TS)$, а на обобщенных, объединяющих те состояния $ST(TS)$, которые получены выполнением некоторого временного слова.

Перейдем к формальным определениям.

Определение 6. *Подмножество в* $ST(TS)$ $\mu = \{M \mid M \in ST(TS)\}$ *называется обобщенным состоянием* TS. *Начальное обобщенное состояние* TS — $\mu_0 = \{M_{TS}\}$.

Иногда будем обозначать μ через $(M_1, \ldots, M_n)$ или $(\langle \mathbf{C}\rangle^n, \langle\delta\rangle^n)$, где $M_i = (C_i, \delta_i) \in \mu$, $\langle \mathbf{C}\rangle^n = (C_1, \ldots, C_n)$, $\langle\delta\rangle^n = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ и индекс i $(1 \le i \le n)$ является внутренней нумерацией состояний в μ.

Обозначим множество готовых в обобщенном состоянии μ событий через $En(\mu) = \bigcup\{En(C) \mid \exists (C,\delta) \in \mu\}$. Пусть $n^+ = \{1, \ldots, n\}$, тогда перестановка $\pi(n) : n^+ \to n^+$ расширяется до $\langle \mathbf{C}\rangle^n$ следующим образом: $\pi(n)(\langle \mathbf{C}\rangle^n) = (C_{\pi(n)(1)}, \ldots, C_{\pi(n)(n)})$. Аналогично определяется $\pi(n)(\langle\delta\rangle^n)$, тогда $\pi(n)(\mu) = (\pi(n)(\langle \mathbf{C}\rangle^n),\ \pi(n)(\langle\delta\rangle^n))$.

Выполнением некоторого действия обобщенное состояние переходит в другое обобщенное состояние, образованное из состояний, в которые переходят состояния первого обобщенного состояния выполнением рассматриваемого действия. При этом в обобщенном состоянии может выполниться видимое действие или пройти некоторое количество времени, если в нем не может выполниться невидимое действие.

Таким образом отношение $\xrightarrow{z}$ на обобщенных состояниях определяется в следующем виде:

— $\mu \xrightarrow{\tau} \mu' \iff \mu \subset \mu'$, $\mu \neq \mu'$ и для всех $(C', \delta') \in ST(TS)$, для которых существует $(C,\delta) \in \mu$. $(C,\delta) \xrightarrow{\tau} (C',\delta')$, верно $(C',\delta') \in \mu'$;

— $\mu \xrightarrow{z} \mu' \iff \mu \not\xrightarrow{\tau}$ и для всех $(C',\delta') \in ST(TS)$, для которых существует $(C,\delta) \in \mu$. $(C,\delta) \xrightarrow{z} (C',\delta')$, верно $(C',\delta') \in \mu'$ ($z \in Act \cup \mathbf{R}^+$).

Заметим, что правило непрерывности времени выполняется и для обобщенных состояний. Множество всех обобщенных состояний, достижимых из μ_0, будем обозначать $STC(TS)$. Отношение перехода на обобщенных состояниях $STC(TS)$ так же, как и на состояниях $ST(TS)$, расширяется для временных слов из $Dom(Act, \mathbf{R}_0^+)$. Обозначим все обобщенные состояния, достижимые временным словом $\langle w, d\rangle$, через $S(\langle w, d\rangle) = \{\mu \mid \mu_0 \overset{\langle w,d\rangle}{\Longrightarrow} \mu\}$

Из определения отношения перехода на обобщенных состояниях следует, что обобщенные состояния, достижимые одним словом, образуют цепь.

Утверждение 1. *Для любого временного слова $\langle w, d\rangle \in L(TS)$ $(S(\langle w, d\rangle), \subseteq)$ является цепью.*

Модифицируем для обобщенных состояний определение региона и связанные с ним понятия. Два обобщенных состояния входят в один регион, если при некоторой перестановке их конфигурации совпадают, целые значения и соотношения дробных частей временных функций также совпадают.

Определение 7. *Пусть $\mu = (C_1, \ldots, C_n, \delta_1, \ldots, \delta_n) \neq \mu' = (C'_1, \ldots, C'_n, \delta'_1, \ldots, \delta'_n)$. Тогда $\mu \simeq \mu'$, если $(C_1, \ldots, C_n) = (C'_1, \ldots, C'_n)$ и*

а) $\forall 1 \leq i \leq m\ .\ \lfloor \delta_1 | \ldots | \delta_n(i) \rfloor = \lfloor \delta'_1 | \ldots | \delta'_n(i) \rfloor;$

б) $\forall 1 \leq i, j \leq m\ .$

— $\{\delta_1 | \ldots | \delta_n(i)\} \leq \{\delta_1 | \ldots | \delta_n(j)\} \iff \{\delta'_1 | \ldots | \delta'_n(i)\} \leq \{\delta'_1 | \ldots | \delta'_n(j)\},$

— $\{\delta_1 | \ldots | \delta_n(i)\} = 0 \iff \{\delta'_1 | \ldots | \delta'_n(i)\} = 0,$

где $\delta_1 | \ldots | \delta_n$ — конкатенация векторов $\overline{\delta_i}$ $(1 \leq i \leq n)$, $m = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} | C_i |$.

Множество $R = [\mu] = \{\mu_1 \mid \exists \pi(n)\ .\ \mu \simeq \pi(n)(\mu_1)\}$ называется *регионом* TS. Определим $R_0 = [\mu_0]$.

Пусть $R \neq R_1$ будут регионами TS. Два региона связаны выполнением действия, если в них существуют обобщенные состояния, связанные выполнением этого действия. Два региона связаны временным шагом, если в них существуют обобщенные состояния, связанные истечением времени, и при этом все состояния, полученные истечением меньшего количества времени, также входят в один из этих регионов, т. е. отношение перехода на регионах определяется следующим образом:

— $R \xrightarrow{a} R_1$, если $\exists \mu \in R,\ \mu_1 \in R_1\ .\ \mu \xrightarrow{a} \mu_1$ $(a \in Act_\tau)$;

— $R \xrightarrow{\chi} R_1$, если $\exists \mu \in R,\ \mu_1 \in R_1\ \exists d \in \mathbf{R}^+\ .\ \mu \xrightarrow{d} \mu_1 \wedge \forall\ 0 < d' < d\ \ \mu \xrightarrow{d'} \widetilde{\mu} \in R \cup R_1$.

Назовем разбиение $STC(TS)$ на регионы *устойчивым*, если для каждой пары регионов, связанных отношением перехода, каждое обобщенное состояние из первого региона пары переходит выполнением соответствующего действия в некоторое обобщенное состояние второго региона пары, т. е.:

— если $R \xrightarrow{a} R_1$, то $\forall \mu \in R\ .\ \mu \xrightarrow{a} \mu_1$ для некоторого $\mu_1 \in R_1$ $(a \in Act_\tau)$;

— если $R \xrightarrow{\chi} R_1$, то $\forall \mu \in R\ \exists d \in \mathbf{R}^+\ .\ \mu \xrightarrow{d} \mu_1$ для некоторого $\mu_1 \in R_1$ и $\mu \xrightarrow{d'} \widetilde{\mu} \in R \cup R'$ для всех $0 < d' \leq d$.

Согласно [17] всегда можно преобразовать разбиение на регионы к устойчивому. Теперь можно определить понятие графа регионов для TS.

Определение 8. *Граф регионов TS — это тройка $RG(TS) = (V_{RG},\ E_{RG},\ l_{RG})$, где множеством вершин V_{RG} является устойчивое разбиение $STC(TS)$ на регионы, множеством дуг E_{RG} — отношение перехода на регионах из V_{RG}, и помечающая функция $l_{RG} : E_{RG} \longrightarrow Act_\tau \cup \{\chi\}$ определяется как $l((R, R')) = z \iff R \xrightarrow{z} R'$.*

Сложность алгоритма построения графа регионов и размер графа регионов являются экспоненциальными от количества событий и размеров временных интервалов.

$$TS_2: \begin{array}{cc} [1,1] & [1,1] \\ e_1:a & e_2:a \\ & \# \\ e_3:\tau \longrightarrow & e_4:\tau \\ [1,1] & [0,0] \end{array}$$

$$RG(TS_2): \quad R_0 \xrightarrow{\chi} R_1 \xrightarrow{\chi} R_2 \xrightarrow{\tau} R_3 \xrightarrow{\tau} R_4 \xrightarrow{a} R_5 \xrightarrow{a} R_6$$

Рис. 3. Пример графа регионов

Пример 5. Для ВСС TS_2 граф регионов изображен на рис. 3. Приведем для некоторых регионов входящие в них обобщенные состояния. Регион R_0 состоит из обобщенного состояния $\mu_0 = \{(\emptyset, \overline{0})\}$, $R_4 = [\mu_4]$, где $\mu_4 = \{(\emptyset, \overline{1}), (\{e_3\}, (1,1,1,0)), (\{e_3, e_4\}, (1,1,1,0))\}$, $R_5 = [\mu_5]$, где $\mu_5 = \{(\{e_1\}, \overline{1}), (\{e_2\}, \overline{1}), (\{e_2, e_3\}, (1,1,1,0))\}$.

Из определения (7) отношения $\simeq$ на обобщенных состояниях и определения графа регионов получаем совпадение множеств, готовых к выполнению действий для обобщенных состояний из одного региона.

Лемма 1. *Пусть* $R \in V_{RG}$. *Тогда* $\forall \mu,\ \mu' \in R\ \forall (C, \delta) \in \mu\ \exists\ (C',\ \delta') \in \mu'\ .\ C = C'\ \wedge\ S((C,\delta))\mid_{Act_\tau} = S((C',\delta'))\mid_{Act_\tau}\ \wedge S((C,\delta))\mid_{\mathbf{R}^+} = \emptyset \iff S((C',\delta'))\mid_{\mathbf{R}^+} = \emptyset$.

4.1. Добавление часов

Для синхронизации ВСС, для которой логическая формула будет конструироваться, с другой ВСС, на которой формула будет проверяться, в регионы включаются временные счетчики. Кроме того, для сохранения возможных значений таких счетчиков в каждом регионе будем фиксировать представителя региона, подобная дополнительная информация будет сохраняться в специальных полях.

Пусть даны $RG(TS)$ — граф регионов, X — счетное множество часов. Сопоставим каждому региону $RG(TS)$ уникальный номер, тогда каждому региону R_i сопоставим собственные часы x_{R_i}. Для простоты будем иногда вместо x_{R_i} писать x_i. Более того, каждому региону R сопоставим четверку дополнительных полей $T = (RC(R),\ \mu_R,\ \sigma_R,\ \Delta_R)$, где $RC(R)$ — множество часов, $\mu_R = (\langle \mathbf{C} \rangle^{n_R}, \langle \delta \rangle^{n_R}) \in R$ — представитель региона, функция $\sigma_R : RC(R) \longrightarrow 2^{E \times \mathbf{N}}$ сопоставляет пары из события и номера конфигурации из μ_R всем часам из $RC(R)$, функция $\Delta_R : RC(R) \longrightarrow \mathbf{R}_0^+$ — означивание часов.

Сначала предполагаем, что $RC(R_0) = \{x_0\}$, μ_0 — представитель R_0, $\sigma_{R_0}(x_0) = \{(e,\ 1) \mid e \in En(C_0)\}$, $\Delta_{R_0}(x_0 = 0$. Для остальных $R \in RG(TS)$ предполагаем $RC(R) = \emptyset$ и в качестве представителя берем произвольное состояние $\mu \in R$, $\sigma_R \equiv \emptyset$.

При переходе из региона в регион добавляем x_R в множество часов $RC(R)$, если после выполнения некоторого действия появляются новые готовые события в конфигурациях обобщенного состояния из региона R. Тогда эти события и конфигурация сопоставляются часам региона x_R. Кроме того, удаляем из $RC(R)$ ненужные часы, а именно те, которым конфигурации уже не сопоставляются.

Рассмотрим подробнее формирование дополнительных полей при выполнении видимых действий, для случаев невидимого действия и временного шага поля изменяются похожим образом: $(R, T) \xrightarrow{a} (R', T')$ $(a \in Act)$, если $R \xrightarrow{a} R'$ (предположим $\mu_R \xrightarrow{a} \widetilde{\mu}$ для некоторого $\widetilde{\mu} \in R'$, $\mu_{R'} \simeq \pi(n_{R'})(\widetilde{\mu})$ для некоторой перестановки $\pi(n_{R'})$) и множества $RC(R')$ и $\sigma_{R'}$ изменяются в два шага:

1. $RC(R') = RC(R') \cup (R \setminus OLD(R,a))$, где $OLD(R,a) = \{x_i \mid \forall (e,j) \in \sigma_R(x_i) \,.\, (C_j,\delta_j) \not\xrightarrow{a}\}$;

$\sigma_{R'}(x) = \sigma_{R'}(x) \cup \{(e, \pi(n_{R'})(k) \mid \exists (e,i) \in \sigma_R(x)\ \exists (\widetilde{C}_k, \widetilde{\delta}_k) \in \widetilde{\mu} \,.\, (C_i,\delta_i) \xrightarrow{a} (\widetilde{C}_k, \widetilde{\delta}_k)\}$ для всех $x \in RC(R') \cap RC(R)$;

2. $\sigma_{R'}(x_{R'}) = \{(e,i) \mid \ (C_i,\delta_i) \in \mu_{R'} \,.\, \exists e \in En(C_i)\ (\delta_i(e) = 0 \wedge\ \forall x \in RC(R')\ (e,i) \notin \sigma_{R'}(x)\}$;

если $\sigma_{R'}(x_{R'}) \neq \emptyset$, то $RC(R') = RC(R') \cup \{x_{R'}\}$.

Означивание для часов $x \in RC(R)$ определяется как значение временной функции ассоциированного с ним события: $\Delta_R(x) = \delta_i(e)$, где $(e,i) \in \sigma_R(x)$.

Далее вместо (R,T) будем использовать обычное обозначение R.

Пример 6. Рассмотрим, какие дополнительные поля приписываются регионам графа $RG(TS_2)$. Представителем R_0 будет μ_0, множество часов $RC(R_0) = \{x_0\}$, $\sigma_{R_0}(x_0) = \{(e_1,1),\ (e_1,1),\ (e_2,1),\ (e_3,1)\}$, означивание часов в регионе $\Delta_{R_0}(x_0) = 0$. Представителем R_4 будет μ_4, множество часов $RC(R_4) = \{x_0\}$, $\sigma_{R_4}(x_0) = \{(e_1,1),(e_2,1),(e_3,1),$ $(e_1,2),(e_2,2),(e_3,2),\ (e_1,3),(e_2,3),(e_3,3)\}$, $\Delta_{R_4}(x_0) = 1$. Отметим, что в данном примере в множества RC включаются только часы x_0, часы других регионов не используются.

4.2. Граф классов

Для абстрагирования от невидимых действий определим понятие класса как замыкание регионов относительно перехода по τ [12].

Пусть $RG(TS) = (V_{RG}, E_{RG}, l_{RG})$, Q — подмножество вершин из V_{RG}. Тогда классом TS назовем множество $Q^\tau = \{R' \in V_{RG} \mid \exists R \in Q \,.\, R \stackrel{\epsilon}{\Rightarrow} R'\}$.

Обозначим через $Q_0 = \{R_0\}^\tau$ начальный класс и через $Der(Q,\ z) = \bigcup_{R \in Q} \{R_1 \mid R \xrightarrow{z} R_1\}$ для $z \in Act \cup \{\chi\}$ — множество регионов, достижимых из регионов класса Q выполнением некоторого действия z. Тогда для классов Q, Q_1 и $z \in Act \cup \{\chi\}$ *отношение перехода на классах* определяется следующим образом: $Q \xrightarrow{z} Q_1$, если $Q_1 = (Der(Q,\ z))^\tau$.

Далее будут полезны обозначения для множества действий, по которым возможен переход из данного класса, и для множества часов, приписанных регионам класса: $S(Q) = \{z \in Act \cup \{\chi\} \mid \ Q \xrightarrow{z}\}$, $QC(Q) = \bigcup_{R \in Q} RC(R)$.

Определение 9. Графом классов TS *называется помеченный ориентированный граф* $CG(TS) = (V_{CG},\ E_{CG},\ l_{CG})$. *Множеством вершин* V_{CG} *является множество достижимых классов* TS, E_{CG} *— отношение перехода на классах* V_{CG}, $l_{CG} : E_{CG} \longrightarrow (Act \cup \{\chi\})$ *— помечающая функция.*

Таким образом, для каждого класса существует не более одного перехода по каждому действию из $Act \cup \{\chi\}$ и нет переходов, помеченных невидимым действием.

Пример 7. Для ВСС TS_2 граф классов $CG(TS_2)$ изображен на рис. 4, класс Q_0 этого графа состоит из региона R_0, Q_1 — из региона R_1, $Q_2 = \{R_2, R_3, R_4\}$, $Q_3 = \{R_5\}$, $Q_4 = \{R_6\}$.

$CG(TS_2)$

$$Q_0 \xrightarrow{\chi} Q_1 \xrightarrow{\chi} Q_2 \xrightarrow{a} Q_3 \xrightarrow{a} Q_4$$

Рис. 4. Пример графа классов

Из утверждения 1 и определений отношения перехода на регионах и классах следует единственность в каждом классе такого региона, который не может выполнить невидимое действие.

Утверждение 2. *Для любого класса $Q \in CG(TS)$ существует единственный регион $R \in Q$ такой, что $R \not\xrightarrow{\tau}$.*

Для дальнейшего анализа состояний, входящих в класс, необходимо связать понятия состояния, временного слова и класса. Временное слово и путь в графе классов связываются, если существует сопоставление между временными действиями, составляющими данное слово, и переходами, составляющими путь.

Определение 10. *Пусть $\langle w, d\rangle \in L(TS)$ и $CG(TS) = (V_{CG}, E_{CG}, l_{CG})$. Пусть $p = Q_0 \ \ldots \ Q$ — путь в $CG(TS)$. Тогда $\mu \in STC(TS)$ называется* достижимым *временным словом $\langle w, d\rangle$,* согласованным с *p, если $[\mu] \in Q$ и*

— либо $p = Q_0$ и $\langle w, d\rangle = \langle \epsilon, 0\rangle$;

— либо $p = p_1 \xrightarrow{z} Q$ и существует $\mu_1 \in STC(TS)$, достижимое посредством $\langle w', d'\rangle$, согласованного с p_1, при этом

— если $z = a \in Act$, то $\mu_1 \overset{a}{\Rightarrow}\overset{d''}{\to} \mu$, и $\langle w, d\rangle = \langle w'a(d' - \triangle(w')), d' + d''\rangle$ для некоторого $d'' \in \mathbf{R}_0^+$;

— если $z = \chi$, то $\mu_1 \xrightarrow{d''} \mu$, и $\langle w, d\rangle = \langle w', d' + d''\rangle$ для некоторого $d'' \in \mathbf{R}^+$.

Пример 8. Для рассмотренного выше графа классов $CG(TS_2)$ обобщенное состояние $\mu_4 = \{(\emptyset, \overline{1}), (\{e_3\}, (1, 1, 1, 0)), (\{e_3, e_4\}, (1, 1, 1, 0))\}$ является достижимым временным словом $\langle \epsilon, 1\rangle$, согласованным с путем $p = Q_0 \xrightarrow{\chi} Q_1 \xrightarrow{\chi} Q_2$.

В следующей лемме устанавливается, что состояния, достижимые некоторым временным словом $\langle w, d\rangle$, попадают в один класс. Кроме того, в каждом регионе этого класса существует состояние, достижимое выбранным временным словом.

Лемма 2. *Пусть $\langle w, d\rangle \in L(TS)$, $\mu \in STC(TS)$, $Q \in CG(TS)$ и путь p из Q_0 в Q такие, что μ достижимо временным словом $\langle w, d\rangle$, согласованным с путем p. Тогда любое $\mu_1 \in S(\langle w, d\rangle)$ достижимо $\langle w, d\rangle$, согласованным с путем p.*

Доказательство следует из утверждения 1 и определения 10. □

Следствие 1. *Пусть $\langle w, d\rangle \in L(TS)$ и $\mu \in S(\langle w, d\rangle)$. Пусть $Q \in CG(TS)$, путь p из Q_0 в Q такие, что μ достижимо $\langle w, d\rangle$, согласованным с путем p. Тогда для любого региона R из Q существует обобщенное состояние $\overline{\mu} \in R$ такое, что $\overline{\mu}$ достижимо $\langle w, d\rangle$, согласованным с путем p.*

5. Построение формул

Рассмотрим методы конструирования для вершин графа классов характеризационных формул, являющихся подформулами характеризационной формулы ВСС. Формула для класса отражает как действия (в том числе и шаги по времени), которые могут выполниться в данном классе, так и действия, не имеющие возможности выполниться. В формулу вводятся также ограничения на временные интервалы $\beta(Q)$, в которые действия могут выполняться. Эти временные ограничения строятся согласно соотношениям часов в регионах, входящих в рассматриваемый класс.

Введем полезные обозначения. Пусть $R \in V_{RG}$, $Q \in V_{CG}$. Тогда

— $S(R) = \{z \in Act_\tau \cup \{\chi\} \mid R \xrightarrow{z}\}$ — множество действий, возможных в регионе R;

— $\hat{R} \in Q$ — регион класса Q, из которого нет переходов по невидимым действиям, т. е. $\hat{R} \not\xrightarrow{\tau}$;

— $vis(\hat{R}) = \{M \in \mu_{\hat{R}} \mid M \overset{\tau}{\nrightarrow}\}$ — подмножество состояний представителя $\hat{R}$, в которых не может выполниться невидимое действие τ.

Также будем использовать обозначения Q_a и Q_χ, если $Q \xrightarrow{a} Q_a$ и $Q \xrightarrow{\chi} Q_\chi$. Необязательные части формулы, условия включения которых отдельно оговариваются, будем заключать в $\langle\!\langle$ и $\rangle\!\rangle$. Всем часам $x_i \in QC(Q)$ будут соответствовать формульные часы $\hat{x}_i$. Кроме того, дополнительно будут использоваться вспомогательные формульные часы $\hat{x}$. Теперь перейдем к построению формулы F_Q для класса Q: $F_Q = \forall\!\!\!\forall \beta(Q) \Rightarrow \psi_Q$, где $\beta(Q)$ моделирует ограничения на значения формульных часов, а ψ_Q — действия, возможные в классе Q. Неформально ψ_Q можно записать как конъюнкцию следующих частей:

$$\psi_Q = \begin{bmatrix} \text{часть для действий, которые} \\ \text{не могут выполниться в } Q \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \text{часть для действий, которые} \\ \text{могут выполниться в } Q \end{bmatrix} \wedge$$
$$\wedge \langle\!\langle\ Q_\chi \text{ не существует}\rangle\!\rangle \ \wedge\ \langle\!\langle\ Q_\chi \text{ существует}\rangle\!\rangle \ \wedge\ [\text{ моделирование } Acc(TS, \langle w, d\rangle)].$$

В формульном виде соответствующие части ψ_Q записывается как

$$\psi_Q = [\bigwedge_{a \in Act \setminus S(Q)} [a]\mathit{ff}] \ \wedge\ [\bigwedge_{a \in S(Q)|_{Act}} [a](\langle\!\langle XQ_a\ in\rangle\!\rangle\ F_{Q_a}) \ \wedge\ [\langle\!\langle F_\chi \rangle\!\rangle] \ \wedge$$
$$\wedge\ [\langle\!\langle F_{Q_\chi} \rangle\!\rangle] \ \wedge\ \big[(ACC(Q)\ \vee\ \langle\tau\rangle\mathit{tt})\big].$$

Условия $\beta(Q)$ должны выполняться только для тех значений часов, которые соответствуют значениям временных функций обобщенных состояний из региона $\hat{R}$ из Q. Их построение проводятся аналогично [13]. Если действие не может выполниться в классе Q, то его выполнение в другой ВСС приведет к невыполнимости формулы ($[a]\mathit{ff}$). Если действие может выполниться, то в формулу включается подформула для соответствующего класса ($[a]F_{Q_a}$) с предварительным обнулением формульных часов, если после выполнения действия для обобщенных состояний, соответствующих классу Q_a, появляются новые готовые события.

Далее рассмотрим переменные и подформулы ψ_Q и условия их включения в ψ_Q:

— $XQ_a = \{\hat{x} \mid x \in QC(Q_a) \setminus QC(Q)\}$ включается в ψ_Q, если не пусто;

— $F_\chi = \hat{x}\ in(\forall\!\!\!\forall \hat{x} > 0 \Rightarrow \bigwedge_{a \in Act_\tau}[a]\mathit{ff})$ включается в ψ_Q, если класс Q_χ не существует;

— F_{Q_χ} включается в ψ_Q, если класс Q_χ существует;

— $ACC(Q) = \bigvee_{M \in vis(\hat{R})}\big((\bigwedge_{a \in S(M)|_{Act}}\langle a\rangle\mathit{tt}) \wedge \langle\!\langle \chi' \rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle F_{all} \rangle\!\rangle\big)$ моделирует $Acc(TS, \langle w, d\rangle)$;

— $F_{all} = \bigvee_{a \in Act}[a]\mathit{tt}$ включается в $ACC(Q)$ для всех состояний $M \in \mu_{\hat{R}}$, в которых нет готовых к выполнению событий;

— $\chi' = \hat{x}\ in(\exists\!\!\!\exists \hat{x} > 0 \Rightarrow (\bigvee_{a \in Act_\tau}\langle a\rangle tt))$ включается в $ACC(Q)$ для всех состояний $M \in \mu_{\hat{R}}$, для которых нет возможности истечения времени.

Определение 11. *Для временной структуры событий* TS характеризационной $must$-формулой *называется формула* $F_{TS}^{must} = \hat{x}_0\ in\ F_{Q_0}$.

Пример 9. Построим характеризационную $must$-формулу для ВСС TS_2. Полагаем $Act = \{a\}$. Тогда получим выражения:

$$F_{TS_2}^{must} = \hat{x}_0\ in\ \Big(\forall\!\!\!\forall\ \hat{x}_0 = 0 \Rightarrow \big[F_{Q_1}\ \wedge\ [a]\mathit{ff}\ \wedge\ (ACC(Q_0)\ \vee\ \langle\tau\rangle\mathit{tt})\big]\Big),$$
$$F_{Q_1} = \forall\!\!\!\forall\ 0 < \hat{x}_0 < 1 \Rightarrow \big[F_{Q_2}\ \wedge\ [a]\mathit{ff}\ \wedge\ (ACC(Q_1)\ \vee\ \langle\tau\rangle\mathit{tt})\big],$$
$$F_{Q_2} = \forall\!\!\!\forall\ \hat{x}_0 = 1 \Rightarrow \big[\hat{x}\ in(\forall\!\!\!\forall\ \hat{x} > 0 \Rightarrow [a]\mathit{ff}) \wedge [a]F_{Q_3} \wedge (ACC(Q_2) \vee \langle\tau\rangle\mathit{tt})\big],$$

$$F_{Q_3} = \forall\!\!\!\forall\ \hat{x}_0 = 1 \Rightarrow \big[(\hat{x}\ in(\forall\!\!\!\forall\ \hat{x} > 0 \Rightarrow [a]f\!f)) \wedge [a]F_{Q_4} \wedge (ACC(Q_3) \vee \langle\tau\rangle t\!t)\big],$$
$$F_{Q_4} = \forall\!\!\!\forall\ \hat{x}_0 = 1 \Rightarrow \big[(\hat{x}\ in(\forall\!\!\!\forall\ \hat{x} > 0 \Rightarrow [a]f\!f)) \wedge [a]f\!f \wedge (ACC(Q_4) \vee \langle\tau\rangle t\!t)\big],$$
$$ACC(Q_0) = ACC(Q_1) = F_{all}\ \wedge\ \hat{x}\ in(\exists\!\!\!\exists\ \hat{x} > 0 \Rightarrow (\langle a\rangle t\!t\ \vee\ \langle\tau\rangle t\!t)),$$
$$ACC(Q_2) = ACC(Q_4) = F_{all},$$
$$ACC(Q_3) = F_{all}\ \vee\ \langle a\rangle t\!t,$$
$$F_{all} = [a]t\!t.$$

Прежде чем перейти к основной теореме рассмотрим вспомогательные леммы. В следующих далее леммах и теореме полагаем декларацию $\mathcal{D}$ соответствующей определению F_Q для каждого класса Q графа классов $CG(TS)$. Покажем, что если TS' удовлетворяет характеризационной формуле TS, то в любом состоянии, достижимом некоторым временным словом, выполняется подформула, соответствующая классу, с которым данное слово согласовано.

Лемма 3. *Пусть* $TS' \models_{\mathcal{D}} F_{TS}^{must}$. *Пусть* $\langle w, d\rangle \in L(TS) \cap L(TS')$ *и* $(C_0', \delta_0') \stackrel{\langle w,d\rangle}{\Longrightarrow} (C', \delta')$. *Тогда* $(C', \delta' u') \models_{\mathcal{D}} \psi_Q$, *где* Q *и* u' *таковы, что существует* $\mu \in \hat{R}$ *(*$\hat{R} \in Q, \hat{R} \stackrel{\tau}{\not\to}$*), достижимое временным словом* $\langle w,\ d\rangle$*, согласованным с путем из* Q_0 *в* Q*, и* $u' \mid_{RC(\hat{R})} \simeq \Delta_{\hat{R}}$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по длине временного слова $\langle w, d\rangle$.

— База индукции. $\langle w, d\rangle = \langle \epsilon, 0\rangle$. Пусть $(C_0', \delta_0') \stackrel{\langle\epsilon,\ 0\rangle}{\Longrightarrow} (C', \delta')$. Так как $TS' \models_{\mathcal{D}} F_{TS}^{must}$, то из построения характеризационной формулы имеем $(C_0', \delta_0'\ u) \models_{\mathcal{D}} F_{Q_0}$ при $u \equiv 0$, т. е. $(C_0', \delta_0'\ u) \models_{\mathcal{D}} \forall\!\!\!\forall \beta(Q_0) \Rightarrow\ \psi_{Q_0}$.

Рассмотрим класс $Q_0 \in CG(TS)$. Обобщенное состояние μ такое, что $\mu_0 \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow}$ и $\mu \stackrel{\tau}{\not\to}$, достижимо временным словом $\langle\epsilon,\ 0\rangle$, согласованным с путем $p = Q_0$, и $\hat{R} = [\mu] \in Q_0$. Множество часов $\hat{R}$ состоит из x_0, и $u \mid_{\hat{x}_0} \equiv \Delta_{R_0} \equiv 0$. Из построения формулы также следует, что $\beta(Q_0) = \hat{x}_0 = 0$. Таким образом, из определения отношения выполнимости получаем, что $(C', \delta'\, u) \models_{\mathcal{D}} \psi_{Q_0}$.

— Предположим, что для некоторого $\langle w',\ d'\rangle$ лемма доказана.

— Шаг индукции. Пусть $\langle w,\ d\rangle = \langle w'a(d''),\ d'\rangle$ и $(C_0', \delta_0') \stackrel{\langle w',\ d'\rangle}{\Longrightarrow} (\overline{C}', \overline{\delta}') \stackrel{a}{\to}\stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} (C', \delta')$. По предположению индукции для $(\overline{C}', \overline{\delta}')$ существуют $\overline{u}$, $\overline{Q}$, $\overline{\mu}$ такие, что $\overline{\mu}$ достижимо $\langle w',\ d'\rangle$, согласованным с путем из Q_0 в $\overline{Q}$, и выполняется $(\overline{C}', \overline{\delta}'\ \overline{u}) \models_{\mathcal{D}} \psi_{\overline{Q}}$, $\overline{u} \mid_{RC(\overline{R})} \simeq \Delta_{\overline{R}}$, где $\overline{R} = [\overline{\mu}]$. Согласно построению условий $\beta(\overline{Q})$ получаем $(\overline{C}', \overline{\delta}'\ \overline{u}) \models_{\mathcal{D}} \beta(\overline{Q})$.

Так как $\langle w,\ d\rangle \in L(TS)$, то существуют такие обобщенные состояния $\mu \in S(\langle w,\ d\rangle)$ и $\overline{\mu} \in S(\langle w',\ d'\rangle)$, что $\mu_0 \stackrel{\langle w',\ d'\rangle}{\Longrightarrow} \overline{\mu} \stackrel{a}{\to}\stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} \mu \stackrel{\tau}{\not\to}$. Значит $\overline{R} \stackrel{a}{\to} R \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} \hat{R} = [\mu]$ и $a \in S(\overline{Q})$, т. е. для некоторого класса $Q \in CG(TS)$ $\overline{Q} \stackrel{a}{\to} Q$, при этом $\hat{R} \in Q$.

Следовательно, из отношения выполнимости и построения формулы получаем $(\overline{C}', \overline{\delta}'\, \overline{u}) \models_{\mathcal{D}}\ [a](\langle\!\langle XQ\ in\rangle\!\rangle\ F_Q)$. Далее, $(C', \delta'\, \overline{u}) \models_{\mathcal{D}}\ \langle\!\langle XQ\ in\rangle\!\rangle\ F_Q$ и $(C', \delta'\, u') \models_{\mathcal{D}}\ F_Q$, где $u' = [XQ \to 0]\overline{u}$. Заметим, что означивание часов $\Delta_{\hat{R}}$ совпадает с $\Delta_{\overline{R}}$ для всех часов из $RC(\hat{R})$, кроме $\Delta_{\hat{R}}(x_R) = 0$. Тогда из построения условий $\beta(\overline{Q})$ и $\beta(Q)$ получаем $(C', \delta'\, u') \models_{\mathcal{D}} \beta(Q)$ и $u' \simeq \Delta_{\hat{R}}$. Так как $F_Q = \forall\!\!\!\forall\beta(Q) \Rightarrow\ \ \psi_Q$, то по определению отношения выполнимости для $d = 0$ имеем $(C', \delta'\, u' + d) \models_{\mathcal{D}} \psi_Q$.

Для $\langle w,\ d\rangle = \langle w',\ d' + d''\rangle$ доказательство аналогично предыдущему пункту. □

Следующая лемма показывает, что если TS' удовлетворяет характеризационной формуле TS, то язык TS' включается в язык TS.

Лемма 4. *Пусть* $TS' \models_{\mathcal{D}} F^{must}_{TS}$. *Тогда* $L(TS') \subseteq L(TS)$.

Доказательство проводится от противного (см. Приложение). □

Теперь можем сформулировать теорему, устанавливающую взаимосвязь между временными тестовыми $must$-предпорядками и характеризационными формулами.

Теорема 1. *Пусть* $TS \in \mathcal{DE}_\tau$, $TS' \in \mathcal{E}_\tau$. $TS \leq_{must} TS' \iff TS' \models_{\mathcal{D}} F^{must}_{TS}$.

Доказательство (см. Приложение). □

Таким образом, для решения вопроса о существовании $must$-предпорядка между двумя ВСС можно использовать проверку $must$-характеризационной формулы на модели. Размер формулы линеен от размера графа классов, и глубина вложений кванторов линейна от длин путей в графе классов. Заметим, что каждая цепочка вложений кванторов в основном состоит из $\forall\!\!\!\forall$, квантор $\exists\!\!\!\exists$ может встретиться только в конце цепочки. Такая структура вложений уменьшает сложность некоторых алгоритмов проверки на модели. Сложность алгоритмов проверки [18] экспоненциальна от числа счетчиков, величины временных ограничений и глубины вложенности кванторов $\forall\!\!\!\forall, \exists\!\!\!\exists$.

Используя уже введенные для характеризационной $must$-формулы подформулы и условия их включения, построим характеризационную may-формулу. Для каждого класса Q графа $CG(TS)$ полагаем

$$F'_Q = \forall\!\!\!\forall \beta(Q) \Rightarrow \phi_Q;$$

$$\phi_Q = \bigwedge_{a \in Act \setminus S(Q)} [a]\mathit{ff} \ \wedge \bigwedge_{a \in S(Q)|_{Act}} \langle a \rangle (\langle\!\langle XQ_a \ in \rangle\!\rangle \ F'_{Q_a}) \ \wedge \ \langle\!\langle F_\chi \rangle\!\rangle \ \wedge \ \langle\!\langle F'_{Q_\chi} \rangle\!\rangle.$$

Определение 12. *Для временной структуры событий* TS характеризационной may-формулой *называется формула* $F^{may}_{TS} = \hat{x}_0 \ in \ F'_{Q_0}$.

В следующей теореме полагаем декларацию $\mathcal{D}'$ соответствующей определению F'_Q для каждого класса Q из $V_{CG(TS)}$.

Теорема 2. $TS' \leq_{may} TS \iff TS' \models_{\mathcal{D}'} F^{may}_{TS}$.

Доказательство (см. Приложение). □

Заключение

В статье рассмотрены тестовые эквивалентности для класса непрерывно-временных структур событий с невидимыми действиями. Для этой модели был предложен способ построения логической формулы, характеризующей временную структуру событий с точностью до временных $must$- и may-предпорядков. При построении формулы было необходимо, чтобы состояния, достижимые одним и тем же временным словом, относились к одному классу. Для этого состояния, достижимые выполнением одинаковых действий, были объединены в обобщенные состояния, на основе которых затем получены конечное и детерминированное представления в виде графа регионов и графа классов. Тогда построение характеризационной формулы сводится к построению формул для каждого класса. После построения формулы для распознавания тестовых отношений с другими ВСС достаточно проверить, удовлетворяют ли они этой формуле.

В качестве объекта дальнейшего исследования интересна логическая характеризация тестовых эквивалентностей для модели с непрерывными невидимыми действиями. Выполнение невидимого действия в любой момент времени приводит к увеличению состояний, достижимых одним временным словом, и количеству регионов, их содержащих, что усложняет задачу объединения таких состояний в один класс.

Список литературы

[1] Tretmans J. Test generation with input, outputs and quiscene // Lect. Notes Comput. Sci. 1996. Vol. 1055. P. 127–146.

[2] De Nicola R., Hennessy M. Testing equivalence for processes // Theor. Comput. Sci. 1984. Vol. 34. P. 83–133.

[3] Cleaveland R., Hennessy M. Testing equivalence as a bisimulation equivalence // Lect. Notes Comput. Sci. 1989. Vol. 407. P. 11–23.

[4] Castellani I., Hennessy M. Testing theories for asynchromous langugages // Ibid. 1998. Vol. 1530. P. 90–101.

[5] Kumar K.N., Cleaveland R., Smolka S.A. Infinite probabilistic and nonprobabolostic testing // Ibid. 1998. Vol. 1530. P. 209–220.

[6] López N., Núñez M. A testing theory for generally distributed stochastic processes // Ibid. 2001. Vol. 2154. P. 321–335.

[7] Aceto L., De Nicola R., Fantechi A. Testing equivalences for event structures // Ibid. 1987. Vol. 280. P. 1–20.

[8] Goltz U., Wehrheim H. Causal testing // Ibid. 1996. Vol. 1113. P. 394–406.

[9] Hennessy M., Regan T. A process algebra for timed systems // Inform. Comput. 1995. Vol. 117. P. 221–239.

[10] Nielsen B., Skou A. Automated test generation from timed automata // Lect. Notes Comput. Sci. 2001. Vol. 2031. P. 343–357.

[11] Bihler E., Vogler W. Timed Petri nets: efficiency of asynchronous systems // Ibid. 2004. Vol. 3185. P. 25–58.

[12] Andreeva M.V., Bozhenkova E.N., Virbitskaite I.B. Analysis of timed concurrent models based on testing equivalence // Fundamenta Inform. 2000. Vol. 43. P. 1–20.

[13] Bozhenkova E.N. Towards decidability of timed testing // Joint NCC& IIS Bull., Comput. Sci. 2001. No. 15. P. 17–29.

[14] Laroussinie F., Larsen K.L., Weise C. From timed automata to logic and back. Århus, 1995 (Tech. Rep. / BRICS, Dept. Comput. Sci., Univ. of Århus; No. RS-95-2).

[15] Winskel G. An introduction to event structures // Lect. Notes Comput. Sci. 1989. Vol. 354. P. 364–397.

[16] Alur R., Dill D. The theory of timed automata // Theor. Comput. Sci. 1994. Vol. 126. P. 183–235.

[17] Alur R., Courcoubetis C., Halbwachs H. et al. Minimization of timed transition system // Lect. Notes Comput. Sci. 1992. Vol. 630. P. 340–354.

[18] Henzinger T., Nicollin X., Sifakis J., Yovine S. Symbolic model-checking for real-time systems // Inform. Comput. 1994. Vol. 111, No. 2. P. 193–244.

Приложение

Доказательство леммы 4.

Пусть $(C_0', \delta_0'\ u) \models_{\mathcal{D}} F_{TS}^{must}$, где $(C_0', \delta_0') = M_{TS'}$, $u \equiv 0$. Тогда $L(TS') \subseteq L(TS)$.

Предположим обратное. Пусть существует $\langle w, d\rangle \in L(TS')$ такое, что $\langle w, d\rangle \notin L(TS)$.

Пусть $\langle w,d\rangle = \langle a_1(d_1)\dots a_n(d_n),d\rangle, d=\sum_{i=1}^{n+1} d_i, d_i\in \mathbf{R}_0^+$. Предположим, что для некоторых $0\le k\le n$ и $0\le d'\le d_{k+1}$ слово $\langle w_k,d''\rangle = \langle a_1(d_1)\dots a_k(d_k),\sum_{i=1}^{k} d_i{+}d'\rangle\in L(TS)$, слова $\langle a_1(d_1)\dots a_{k+1}(d_{k+1}),\sum_{i=1}^{k+1} d_i\rangle, \langle a_1(d_1)\dots a_k(d_k),\sum_{i=1}^{k} d_i+d''\rangle\notin L(TS)$ при $d''<d''_1\le d_{k+1}$.

Так как $\langle w,d\rangle\in L(TS')$, то без потери общности можем предположить, что существуют такие $(C',\delta'),\ (C',\delta'')\in ST(TS')$, что $(C'_0,\delta'_0)\overset{\langle w_k,d''\rangle}{\Longrightarrow}(C',\delta')\overset{\langle d_{k+1}-d''_1\rangle}{\rightarrow}(C',\delta'')$. Тогда по лемме 3 $(C',\delta'\,u')\models_{\mathcal{D}}\psi_Q$, где Q и u' таковы, что существует μ, достижимое временным словом $\langle w_k,\,d''\rangle$, согласованным с путем из Q_0 в Q, при этом $\mu\overset{\tau}{\not\rightarrow}$, $u'\mid_{RC([\mu])}\simeq\Delta_{[\mu]}$.

Рассмотрим два возможных случая.

1. $\mu_0\overset{\langle w_k,d''\rangle}{\Longrightarrow}\mu\overset{a_{k+1}}{\not\rightarrow}$ при $k<n$, $d''_1=d_{k+1}$. Тогда по построению в подформуле ψ_Q должен быть член конъюнкции $[a_{k+1}]\mathit{ff}$, что противоречит $(C',\delta'\,u')\models_{\mathcal{D}}\psi_Q$;

2. $\mu_0\overset{\langle w_k,d''\rangle}{\Longrightarrow}\mu\overset{d_{k+1}-d''_1}{\not\longrightarrow}$ при $d''_1\neq d_{k+1}$. Так как все временные интервалы, сопоставляемые событиям, замкнутые, то либо Q — заключительный класс, либо в Q не существует перехода по χ, т. е. $Q\overset{\chi}{\not\rightarrow}$. Тогда по построению в подформуле ψ_Q должен быть член конъюнкции $\hat{x}\,in\,(\forall\!\!\forall\hat{x}>0\Rightarrow\bigwedge_{a\in Act_\tau}[a]\mathit{ff})$. Тогда $(C',\delta''\,(u'+d_{k+1}-d''_1))\models_{\mathcal{D}}x>0$ и, следовательно, получаем ложь для $(C',\delta''\,(u'+d_{k+1}-d''_1))\models_{\mathcal{D}}F_{nil}$, что противоречит $(C',\delta'\,u')\models_{\mathcal{D}}\psi_Q$. □

Доказательство теоремы 1.

($\Longleftarrow$) Рассмотрим произвольное $\langle w,\,d\rangle\in L(TS')$ и (C',δ') такое, что $(C'_0,\delta'_0)\overset{\langle w,d\rangle}{\Longrightarrow}(C',\delta')$ и $(C',\delta')\overset{\tau}{\not\rightarrow}$. Согласно определению 3 надо показать, что существует $(C,\delta)\in ST(TS)$ такое, что $(C_0,\delta_0)\overset{\langle w,d\rangle}{\Longrightarrow}(C,\delta)\overset{\tau}{\not\rightarrow}$ и $S((C,\delta))\mid_{Act}\subseteq S((C',\delta'))\mid_{Act}$, $S((C',\delta'))\mid_{\mathbf{R}^+}=\emptyset\Rightarrow S((C,\delta))\mid_{\mathbf{R}^+}=\emptyset$.

Согласно лемме 4 $\langle w,\,d\rangle\in L(TS)$. Тогда по лемме 3 $(C',\delta'\,u')\models_D\psi_Q$ и существуют μ, Q с путем p из Q_0 в Q и u' такие, что μ достижимо $\langle w,\,d\rangle$, согласованным с путем p, $u'\mid_{RC([\mu])}\simeq\Delta_{[\mu]}$. Согласно утверждению 2 и следствию 1 существуют $R\in Q$ такой, что $R\overset{\tau}{\not\rightarrow}$ и $\mu_1\in R$, достижимое $\langle w,\,d\rangle$, согласованным с путем из Q_0 в Q.

Используя построение подформулы ψ_Q в части подформулы $ACC(Q)$ и лемму 1, можно найти $(C,\delta)\in\mu_1$, для которого $S((C,\delta))\mid_{Act}\subseteq S(C',\delta')\mid_{Act}\,\wedge\,S(C',\delta')\mid_{\mathbf{R}^+}=\emptyset\Rightarrow S((C,\delta))\mid_{\mathbf{R}^+}=\emptyset$.

($\Longrightarrow$) Из определения временной *must*-эквивалентности очевидным образом следует, что $L(TS')\subseteq L(TS)$. Пусть $(C',\delta')\in ST(TS')$ и декларация $\mathcal{D}$ соответствует определению формулы F^{must}_{TS}.

Пусть $\langle w,\,d\rangle$ таково, что $(C'_0,\delta'_0)\overset{\langle w,d\rangle}{\Longrightarrow}(C',\delta')$, и Q и u' таковы, что существует $\mu\in\hat{R}$ $(\hat{R}\in Q,\hat{R}\overset{\tau}{\not\rightarrow})$, достижимое $\langle w,\,d\rangle$, согласованным с путем из Q_0 в Q. $(*)$

Построим наибольшее отношение $\vdash_{\mathcal{D}}$ по следующим правилам:

$$\begin{array}{rcl}
(C',\delta'u')\vdash_{\mathcal{D}}\mathit{tt} & \Longleftrightarrow & \text{истина; } (C',\delta'u')\vdash_{\mathcal{D}}\mathit{ff}\iff\text{ложь;}\\
(C',\delta'u')\vdash_{\mathcal{D}}\phi\wedge\psi & \Longleftrightarrow & (C',\delta'u')\vdash_{\mathcal{D}}\phi\text{ и }(C',\delta'u')\vdash_{\mathcal{D}}\psi;\\
(C',\delta'u')\vdash_{\mathcal{D}}\phi\vee\psi & \Longleftrightarrow & (C',\delta'u')\vdash_{\mathcal{D}}\phi\text{ или }(C',\delta'u')\vdash_{\mathcal{D}}\psi;\\
(C',\delta'u')\vdash_{\mathcal{D}}\exists\phi & \Longleftrightarrow & \exists d\in\mathbf{R}_0^+\,.\,(C',\delta')\overset{\epsilon(d)}{\Rightarrow}(C'_1,\delta'_1)\text{ и }(C'_1,\delta'_1u'+d)\vdash_{\mathcal{D}}\phi;
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} \forall\!\!\!\forall \phi & \iff & \forall d \in \mathbf{R}_0^+ (C', \delta') \overset{\epsilon(d)}{\Rightarrow} (C'_1, \delta'_1) \\
 & & \text{влечет } (C'_1, \delta'_1 u + d) \vdash_{\mathcal{D}} \phi; \\
(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} [a]\phi & \iff & \forall (C'_1, \delta'_1) \in ST(TS) \ . \ (C', \delta') \overset{a}{\rightarrow}\overset{\epsilon}{\Rightarrow} (C'_1, \delta'_1) \\
 & & \text{влечет } (C'_1, \delta'_1 u') \vdash_{\mathcal{D}} \phi; \\
(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} \langle a \rangle \phi & \iff & \exists (C'_1, \delta'_1) \in ST(TS) \ . \ (C', \delta') \overset{a}{\rightarrow}\overset{\epsilon}{\Rightarrow} (C'_1, \delta'_1) \\
 & & \text{и } (C'_1, \delta'_1 u') \vdash_{\mathcal{D}} \phi; \\
(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} x + m \bowtie y + n & \iff & u'(x) + m \bowtie u'(y) + n; \\
(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} x \text{ in } \phi & \iff & (C', \delta' u'_1) \vdash_{\mathcal{D}} \phi, \text{ где } u'_1 = [\{x\} \to 0]u'; \\
(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} F_Q & \iff & (C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} \forall\!\!\!\forall \beta(Q) \Rightarrow \ \psi_Q; \\
(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} \chi' & \iff & (C', \delta') \mid_{\mathbf{R}^+} \neq \emptyset; \\
(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} \psi_Q & \iff & (C', \delta') \text{ удовлетворяет условию } (*) \text{ и } u' \mid_{RC(\hat{R})} \simeq \Delta_{\hat{R}}; \\
(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} \beta(Q) & \iff & (C', \delta') \text{ удовлетворяет условию } (*) \\
 & & \text{и } u' \text{ удовлетворяет условиям } \beta(Q); \\
(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} ACC(Q) & \iff & (C', \delta') \text{ удовлетворяет условию } (*), \ (C', \delta') \overset{\tau}{\not\rightarrow}, \\
 & & u' \mid_{RC(\hat{R})} \simeq \Delta_{\hat{R}} \text{ и } \exists (C, \delta) \in \mu \ . \ (C, \delta) \overset{\tau}{\not\rightarrow} \wedge \\
 & & S(C, \delta) \mid_{Act} \subseteq S(C', \delta') \mid_{Act}) \wedge \\
 & & (S(C', \delta') \mid_{\mathbf{R}^+} = \emptyset \Rightarrow S(C, \delta) \mid_{\mathbf{R}^+} = \emptyset.
\end{array}
$$

Покажем, что $\vdash_{\mathcal{D}}$ является отношением выполнимости. Согласно определению 5 для этого необходимо проверить выполнение условия $(C, \delta u) \vdash_{\mathcal{D}} Z \Longrightarrow (C, \delta u) \vdash_{\mathcal{D}} D(Z)$. Случаи с $Z = F(Q)$, $Z = \chi'$ очевидны.

Рассмотрим случай для $Z = ACC(Q)$. Если $S(C, \delta) \mid_{Act} \neq \emptyset$, то из построения $\vdash_{\mathcal{D}}$ следует $(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} \bigwedge_{a \in S(M)|_{Act}} \langle a \rangle tt$. Если $S(C, \delta) \mid_{Act} = \emptyset$, то $(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} F_{all}$. Так как по определению 3 $(S(C', \delta') \mid_{\mathbf{R}^+} = \emptyset \Rightarrow S(C, \delta) \mid_{\mathbf{R}^+} = \emptyset)$, то $(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} \chi'$ при $S(C', \delta') \mid_{\mathbf{R}^+} \neq \emptyset$ по построению $\vdash_{\mathcal{D}}$ и χ' не включается в часть, соответствующую $(C', \delta' u')$ при $S(C', \delta') \mid_{\mathbf{R}^+} = \emptyset$ по построению $ACC(Q)$. Таким образом, $(C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} ACC(Q) \Longrightarrow (C', \delta' u') \vdash_{\mathcal{D}} \mathcal{D}(ACC(Q))$.

Случай с $Z = \psi_Q$ доказывается аналогично. При этом ψ_Q для каждого класса рассматривается после того, как рассмотрены аналогичные формулы для всех его предшественников в графе классов. □

Доказательство теоремы 2.

($\Longrightarrow$) Отношение выполнимости строится аналогично теореме 1 ($\Longrightarrow$).

($\Longleftarrow$) Заметим, что в доказательстве леммы 4 не используются подформулы $ACC(Q)$, поэтому требуемый результат следует из леммы 4. □

Поступила в редакцию 20 мая 2009 г.,

с доработки — 21 сентября 2009 г.