

Экономичный полностью неявный метод численного решения параболических уравнений, содержащих смешанные производные*

Е. Л. КУЗНЕЦОВА, В. Ф. ФОРМАЛЕВ
Московский авиационный институт
(государственный технический университет), Россия
e-mail: lareyna@mail.ru

Предложен экономичный полностью неявный абсолютно устойчивый метод численного решения уравнений параболического типа, содержащих смешанные дифференциальные операторы, основанный на более глубоком расщеплении конечно-разностной задачи по сравнению с классическими методами.

Ключевые слова: неявный абсолютно устойчивый метод, численные методы, уравнения параболического типа, двумерная нестационарная задача, анизотропная теплопроводность.

Введение

Большинство известных методов численного решения многомерных задач математической физики, основанных на процедуре расщепления конечно-разностных операторов по координатным направлениям, используют явную аппроксимацию смешанных дифференциальных операторов, что при определенных условиях, накладываемых на матрицу характеристик переноса, может приводить к неустойчивости численного решения [1, 2]. Кроме того, наличие смешанных дифференциальных операторов в уравнениях существенно затрудняет процедуру улучшения точности аппроксимации, особенно для краевых условий, содержащих производные. Так, в задачах анизотропной теории теплопроводности практически невозможно построить экономичную полностью неявную конечно-разностную схему расщепления по координатным направлениям без аппроксимирования смешанных дифференциальных операторов на нижнем временном слое и использования дополнительной информации о решении.

В данной работе предложен экономичный полностью неявный конечно-разностный метод расщепления по координатным направлениям численного решения нестационарных задач математической физики, содержащих смешанные дифференциальные операторы. Метод основан на расщеплении не только по координатным направлениям, но и по отдельным дифференциальным операторам, входящим в дифференциальную задачу, а также на использовании апостериорной информации, полученной на верхнем временном слое, что является новым подходом к построению конечно-разностных схем.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00655-а) и грантов Президента РФ МК-1184.2009.8, МК-8460.2010.8, НШ-8460.2010.8.

Метод рассматривается на примере двумерной нестационарной задачи анизотропной теплопроводности с граничными условиями первого рода. Аналогичной проблеме были посвящены работы [3–5]. Предлагаемый метод использовался при численном моделировании тепловой защиты гиперзвуковых летательных аппаратов.

1. Постановка задачи и метод численного решения

Рассмотрим следующую первую начально-краевую задачу теории теплопроводности в анизотропном прямоугольнике $\bar{\Omega} = (0, l_1) \times (0, l_2) + \Gamma$:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, y, t)|_{\Gamma} = \phi(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \quad (3)$$

где $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}$ — компоненты тензора теплопроводности, $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$, $\lambda_{11} > 0$, $\lambda_{22} > 0$, $\lambda_{11} \cdot \lambda_{22} - \lambda_{12}^2 > 0$, причем $\lambda_{12}, \lambda_{21}$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

На расчетную пространственно-временную область накладывается конечно-разностная сетка

$$\omega_h^T = \{x_i = ih_1, i = \overline{0, I}, y_j = jh_2, j = \overline{0, J}, t^k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (4)$$

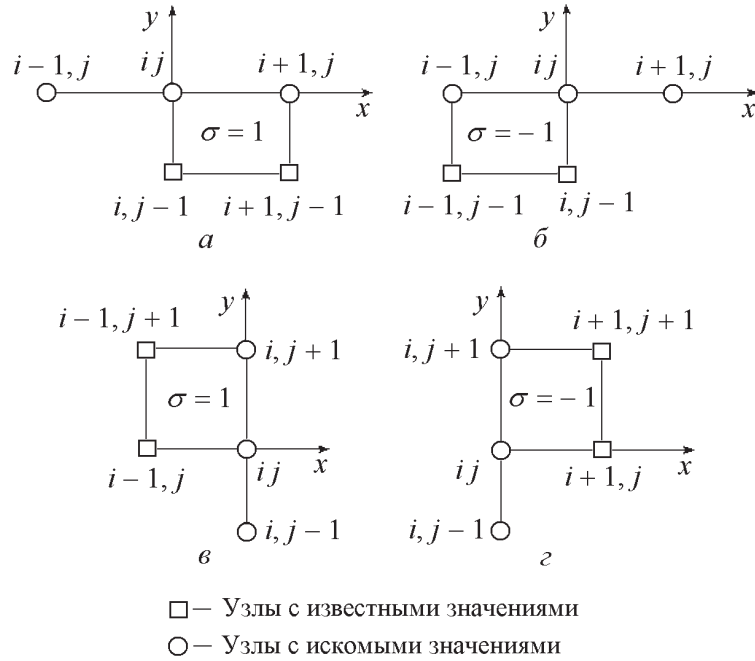
где $h_1 = l_1/I$, $h_2 = l_2/J$, на которой задача (1)–(3) аппроксимируется следующей полностью неявной конечно-разностной схемой ($a_{mn} = \lambda_{mn}/c\rho$; $m, n = \overline{1, 2}$):

$$\begin{aligned} & \frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau} = \\ & = \frac{a_{11}}{h_1^2} \left(u_{i+1,j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2} \right) + \frac{1 - \sigma}{2} \frac{a_{12}}{h_1 h_2} \left(u_{ij}^{k+1/2} - u_{i,j-1}^{k+1/2} - u_{i-1,j}^{k+1/2} + u_{i-1,j-1}^{k+1/2} \right) + \\ & \quad + \frac{1 + \sigma}{2} \frac{a_{12}}{h_1 h_2} \left(u_{i+1,j}^{k+1/2} - u_{i+1,j-1}^{k+1/2} - u_{ij}^{k+1/2} + u_{i,j-1}^{k+1/2} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau} = \\ & = \frac{a_{22}}{h_2^2} \left(u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1} \right) + \frac{1 - \sigma}{2} \frac{a_{21}}{h_1 h_2} \left(u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i,j+1}^{k+1} + u_{ij}^{k+1} \right) + \\ & \quad + \frac{1 + \sigma}{2} \frac{a_{21}}{h_1 h_2} \left(u_{i,j+1}^{k+1} - u_{ij}^{k+1} - u_{i-1,j+1}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Шаблоны этой схемы представлены на рисунке.

Подсхема (5) содержит три неизвестных $u_{i-1,j}^{k+1/2}, u_{ij}^{k+1/2}, u_{i+1,j}^{k+1/2}$, определяемых скалярными прогонками вдоль координатных линий, параллельных оси Ox , а значения $u_{i-1,j-1}^{k+1/2}, u_{i,j-1}^{k+1/2}$ при $\sigma = -1$ ($\lambda_{12} > 0$) и значения $u_{i,j-1}^{k+1/2}, u_{i+1,j-1}^{k+1/2}$ при $\sigma = 1$ ($\lambda_{12} < 0$) уже определены на верхнем временном полуслое $t^{k+1/2} = (k + 1/2)\tau$ методом прогонки вдоль координатной линии $y_{j-1} = (j - 1)h_2$. В подсхеме (6) также три неизвестных:



Шаблоны схемы глубокого расщепления: $a, б$ — подсхема (5); $в, г$ — подсхема (6)

$u_{i,j-1}^{k+1}, u_{ij}^{k+1}, u_{i,j+1}^{k+1}$, определяемых в скалярных прогонках вдоль оси Oy , а значения $u_{i+1,j}^{k+1}, u_{i+1,j+1}^{k+1}$ при $\sigma = -1$ ($\lambda_{21} > 0$) и значения $u_{i-1,j+1}^{k+1}, u_{i-1,j}^{k+1}$ при $\sigma = 1$ ($\lambda_{21} > 0$) уже определены на верхнем временном слое $t^{k+1} = (k+1)\tau$ методом прогонки вдоль координатных линий $x_{i+1} = (i+1)h_1$ при $\sigma = -1$ и $x_{i-1} = (i-1)h_1$ при $\sigma = 1$.

Коэффициент $\sigma = -1$ в случае, когда тепловой поток имеет направление “третий—первый квадранты”, и наоборот $\sigma = 1$ при направлении “четвертый—второй квадранты”.

Если наложить друг на друга шаблоны $б$ и $г$ и $а$ и $в$ (см. рисунок), то получим известную центрально-симметричную схему Самарского [2]. В ней в отличие от предлагаемой схемы смешанные дифференциальные операторы аппроксимируются на нижнем временном слое (явно).

Схема (5), (6) является экономичной, поскольку использует только скалярные прогонки вдоль координатных направлений. Покажем, что данная схема имеет диагональное преобладание, для чего запишем ее в виде следующих систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами, например, при $\sigma = -1$:

$$\begin{aligned}
 & u_{i-1,j}^{k+1/2} \left(\frac{a_{11}}{h_1^2} - \frac{a_{12}}{h_1 h_2} \right) - u_{ij}^{k+1/2} \left(\frac{2a_{11}}{h_1^2} + \frac{1}{\tau} - \frac{a_{12}}{h_1 h_2} \right) + u_{i+1,j}^{k+1} \left(\frac{a_{11}}{h_1^2} \right) = \\
 & = -\frac{u_{ij}^k}{\tau} + \frac{a_{12}}{h_1 h_2} \left(u_{i,j-1}^{k+1/2} + u_{i-1,j-1}^{k+1/2} \right), \quad i = \overline{1, I-1} \quad j = \overline{1, J-1}, \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & u_{i,j-1}^{k+1} \left(\frac{a_{22}}{h_2^2} \right) - u_{ij}^{k+1} \left(\frac{2a_{22}}{h_2^2} + \frac{1}{\tau} - \frac{a_{21}}{h_1 h_2} \right) + u_{i,j+1}^{k+1} \left(\frac{a_{22}}{h_2^2} - \frac{a_{21}}{h_1 h_2} \right) = \\
 & = -\frac{u_{ij}^{k+1/2}}{\tau} + \frac{a_{21}}{h_1 h_2} \left(u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i+1,j+1}^{k+1} \right), \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J-1}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

В выражениях (7), (8) выполняются соответственно неравенства

$$\left| \frac{2a_{11}}{h_1^2} + \frac{1}{\tau} - \frac{a_{12}}{h_1 h_2} \right| > \left| \frac{a_{11}}{h_1^2} - \frac{a_{12}}{h_1 h_2} \right| + \left| \frac{a_{11}}{h_1^2} \right|,$$

$$\left| \frac{2a_{22}}{h_2^2} + \frac{1}{\tau} - \frac{a_{21}}{h_1 h_2} \right| > \left| \frac{a_{22}}{h_2^2} \right| + \left| \frac{a_{22}}{h_2^2} - \frac{a_{21}}{h_1 h_2} \right|.$$

Схема (5), (6) обладает частичной аппроксимацией на каждом дробном временном шаге и полной аппроксимацией на целом временном шаге с порядком $O(\tau + (h_1 + h_2)^2)$. Действительно, запишем схему (5), (6) в следующей векторно-операторной форме при $\sigma = -1$ (при $\sigma = 1$ рассуждения аналогичны):

$$\frac{u^{k+1/2} - u^k}{\tau} = \Lambda_{11} u^{k+1/2} + \Lambda_{12} u^{k+1/2}, \quad (9)$$

$$\frac{u^{k+1} - u^{k+1/2}}{\tau} = \Lambda_{22} u^{k+1} + \Lambda_{21} u^{k+1}, \quad (10)$$

где

$$\Lambda_{11} = a_{11} \frac{\Delta h_1^2}{h_1^2}, \quad \Lambda_{12} = a_{12} \frac{\Delta h_1 h_2}{h_1 h_2}, \quad \Lambda_{22} = a_{22} \frac{\Delta h_2^2}{h_2^2}, \quad \Lambda_{21} = a_{21} \frac{\Delta h_2 h_1}{h_2 h_1}.$$

Исключая из (9), (10) векторно-матричные операторы на промежуточном временном слое, получим эквивалентную схему

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \Lambda_{12} + \Lambda_{21}) u^{k+1} + O(\tau), \quad (11)$$

откуда следует первый порядок аппроксимации по времени. Далее имеем

$$\Lambda_{11} u^{k+1} = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{ij}^{k+1} + O(h_1^2),$$

$$\Lambda_{22} u^{k+1} = a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{ij}^{k+1} + O(h_2^2). \quad (12)$$

Рассмотрим операторы $(\Lambda_{12} + \Lambda_{21}) u^{k+1}$. Разлагая на точном решении в ряды Тейлора сеточную функцию на шаблоне в окрестности центрального узла ij , получим (в случае $a_{12} = a_{21}$)

$$\begin{aligned} (\Lambda_{12} + \Lambda_{21}) u^{k+1} &= \frac{a_{12}}{h_1 h_2} (u_{ij}^{k+1} - u_{i,j-1}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i-1,j-1}^{k+1}) + \\ &+ \frac{a_{21}}{h_1 h_2} (u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i,j+1}^{k+1} + u_{ij}^{k+1}) = \\ &= \frac{a_{12}}{h_1 h_2} \left\{ u_{ij}^{k+1} - \left[1 - \frac{\partial}{\partial y} h_2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{h_2^2}{2} - \frac{\partial^3}{\partial y^3} \frac{h_2^3}{6} + O(h_2^4) \right] u_{ij}^{k+1} - \right. \\ &- \left[1 - \frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{h_1^2}{2} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{h_1^3}{6} + O(h_1^4) \right] u_{ij}^{k+1} + \\ &+ \left[1 - \left(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2 \right)^2 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2 \right)^3 + O((h_1 + h_2)^4) \Big] u_{ij}^{k+1} \Big\} + \\
& + \frac{a_{21}}{h_1 h_2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2 \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2 \right)^3 + O((h_1 + h_2)^4) \right] u_{ij}^{k+1} - \right. \\
& \quad \left. - \left[1 + \frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{h_1^2}{2} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{h_1^3}{6} + O(h_1^4) \right] u_{ij}^{k+1} - \right. \\
& \quad \left. - \left[1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{h_2^2}{2} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \frac{h_2^3}{6} + O(h_2^4) \right] u_{ij}^{k+1} + u_{ij}^{k+1} \right\} = \\
& = \frac{a_{12}}{h_1 h_2} \left\{ u_{xy} h_1 h_2 + O(h_2^4) + O(h_1^4) + O((h_1 + h_2)^4) \right\}_{ij}^{k+1} + \\
& + \frac{a_{21}}{h_1 h_2} \left\{ u_{yx} h_1 h_2 + O((h_1 + h_2)^4) + O(h_1^4) + O(h_2^4) \right\}_{ij}^{k+1} = \\
& = a_{12} u_{xy} |_{ij}^{k+1} + a_{21} u_{yx} |_{ij}^{k+1} + O((h_1 + h_2)^2). \tag{13}
\end{aligned}$$

Из (11)–(13) следует аппроксимация схемы (5), (6) с порядком $O(\tau + (h_1 + h_2)^2)$.

Для исследования устойчивости схемы (5), (6) энергетическим методом умножим скалярно эквивалентную схему (11) на вектор $u_t = (u^{k+1} - u^k) / \tau$, используя тождество

$$u^{k+1} = \frac{u^{k+1} + u^k}{2} + \frac{\tau}{2} u_t, \tag{14}$$

условия эллиптичности

$$\lambda_{11} > 0, \quad \lambda_{22} > 0, \quad \lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12}^2 > 0, \tag{15}$$

а также положительность и самосопряженность конечно-разностного оператора $A = -\Lambda = -(\Lambda_{11} + \Lambda_{12} + \Lambda_{21} + \Lambda_{22}) [2]$

$$(Au, v) = (u, Av), \quad A > 0. \tag{16}$$

В результате получим

$$(u_t, u_t) = (\Lambda u^{k+1}, u_t) = \left(\Lambda \left(\frac{u^{k+1} + u^k}{2} + \frac{\tau}{2} u_t \right), u_t \right) = \left(\Lambda \left(\frac{u^{k+1} + u^k}{2} \right), u_t \right) + \frac{\tau}{2} (\Lambda u_t, u_t),$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned}
& \left(\left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda \right) u_t, u_t \right) = \left(\Lambda \left(\frac{u^{k+1} + u^k}{2} \right), u_t \right), \\
& \left(\left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda \right) u_t, u_t \right) = \left(\Lambda \left(\frac{u^{k+1} + u^k}{2} \right), \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} \right), \\
& \left(\left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda \right) u_t, u_t \right) = \\
& = \frac{1}{2\tau} (\Lambda u^{k+1}, u^{k+1}) - \frac{1}{2\tau} (\Lambda u^k, u^k) - \frac{1}{2\tau} (\Lambda u^{k+1}, u^k) + \frac{1}{2\tau} (\Lambda u^k, u^{k+1}). \tag{17}
\end{aligned}$$

В силу (16) и коммутативности скалярного произведения получаем энергетическое тождество

$$(Au^{k+1}, u^{k+1}) + 2\tau \left(\left(E + \frac{\tau}{2} A \right) u_t, u_t \right) = (Au^k, u^k), \quad (18)$$

в котором оператор $E + \frac{\tau}{2} A > 0$, откуда следует принцип максимума

$$(Au^{k+1}, u^{k+1}) \leq (Au^k, u^k) \quad (19)$$

или

$$\|u^{k+1}\|_A \leq \|u^k\|_A \leq \dots \leq \|u^0\|_A = \|\psi(x, y)\|, \quad (20)$$

где $\psi(x, y)$ — начальное распределение функции в условии (3), а $\|u\|_A$ — норма в энергетическом пространстве H_A сеточных функций u_h со скалярным произведением $(u_h, v_h)_A = (Au_h, v_h)$ для $u_h, v_h \in H_A$ и нормой

$$\|u_h\|_A = (Au_h, u_h)^{1/2}. \quad (21)$$

Поскольку не принималось никаких ограничений на сеточные характеристики τ, h_1, h_2 и коэффициенты переноса, кроме условий эллиптичности (15), которые для тензоров второго ранга выполняются всегда, можно заключить, что схема (5), (6) абсолютно устойчива.

Таким образом, схема (5), (6) глубокого расщепления обладает следующими достоинствами при решении нестационарных задач, содержащих смешанные производные:

- 1) экономичность;
- 2) неявная аппроксимация всех дифференциальных операторов, включая смешанные и, как следствие, абсолютная устойчивость;
- 3) применимость к задачам любой размерности по пространственным переменным;
- 4) отсутствие ограничений на величину коэффициентов $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ за исключением естественных ограничений вида $a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

Как и большинство схем расщепления, схема (5), (6) имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространственным переменным.

Поскольку на возрастающем по времени решении неявная конечно-разностная схема аппроксимирует точное решение сверху, а явная снизу, а на убывающем — наоборот: явная схема — сверху, а неявная — снизу [4], то для увеличения порядка аппроксимации по времени можно использовать неявно-явную схему с весом θ ($0 \leq \theta \leq 1$) при неявной части и $1 - \theta$ при явной. При этом следует ожидать условной устойчивости при $0 \leq \theta \leq 0.5$ и безусловной при $0.5 \leq \theta \leq 1$. Второй порядок аппроксимации по времени достигается при $\theta = 0.5$, однако при этом значительно снижается запас устойчивости, заложенный в неявную аппроксимацию.

Для предложенной конечно-разностной схемы (5), (6) схема с весом $\theta = 1 - \theta = 0.5$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{k+1/2} - u^k}{\tau} &= \frac{1}{2} \left(\Lambda_{11} + \frac{1 - \sigma}{2} \Lambda_{12}^- + \frac{1 + \sigma}{2} \Lambda_{12}^+ \right) u^{k+1/2} + \frac{1}{2} \left(\Lambda_{11} + \frac{1 - \sigma}{2} \Lambda_{12}^- + \frac{1 + \sigma}{2} \Lambda_{12}^+ \right) u^k, \\ \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} &= \frac{1}{2} \left(\Lambda_{22} + \frac{1 - \sigma}{2} \Lambda_{21}^- + \frac{1 + \sigma}{2} \Lambda_{21}^+ \right) u^{k+1} + \frac{1}{2} \left(\Lambda_{22} + \frac{1 - \sigma}{2} \Lambda_{21}^- + \frac{1 + \sigma}{2} \Lambda_{21}^+ \right) u^{k+1/2}. \end{aligned}$$

2. Сравнительный анализ схемы глубокого расщепления

При анализе эффективности предлагаемой схемы, как и других конечно-разностных схем, целесообразно использовать максимальную абсолютную погрешность

$$\varepsilon(t) = \max_{ij} |u_{ij}(t) - u_{ijT}(t)|, \quad (22)$$

где $u_{ij}(t)$ — сеточная функция, $u_{ijT}(t)$ — точное решение тестовой задачи. В качестве такой задачи рассмотрим задачу для квазилинейного параболического уравнения

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda_{12}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda_{12}}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + \lambda_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + 2c\rho t - 10, \\ 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad t > 0, \quad (23)$$

с начальным условием

$$u(x, y, 0) = \frac{2x^2}{\lambda_{11}} + \frac{3}{\lambda_{22}} y^2, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2, \quad t = 0, \quad (24)$$

и краевыми условиями первого рода

$$u(0, y, t) = \frac{3}{\lambda_{22}} y^2 + t^2, \quad 0 \leq y \leq l_2, \quad t > 0, \\ u(l_1, y, t) = \frac{2}{\lambda_{11}} l_1^2 + \frac{3}{\lambda_{22}} y^2 + t^2, \quad 0 \leq y \leq l_2, \quad t > 0, \\ u(x, 0, t) = \frac{2}{\lambda_{11}} x^2 + t^2, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad t > 0, \\ u(x, l_2, t) = \frac{2}{\lambda_{11}} x^2 + \frac{3}{\lambda_{22}} l_2^2 + t^2, \quad 0 < x < l_1, \quad t > 0. \quad (25)$$

Задача (23)–(25) имеет частное решение

$$u(x, y, t) = \frac{2}{\lambda_{11}} x^2 + \frac{3}{\lambda_{22}} y^2 + t^2. \quad (26)$$

На этом решении протестируем следующие конечно-разностные схемы:

- 1) предлагаемую схему метода глубокого расщепления (МГР);
- 2) схему метода дробных шагов Яненко;
- 3) схему метода переменных направлений Писмена — Рэчфорда;
- 4) центрально-симметричную схему Самарского;
- 5) классическую явную схему,

приняв нижеприведенные входные данные. Компоненты тензора теплопроводности:

$$\lambda_{11} = \lambda_\xi \cos^2 \phi + \lambda_\eta \cdot \sin^2 \phi, \\ \lambda_{22} = \lambda_\xi \sin^2 \phi + \lambda_\eta \cdot \cos^2 \phi, \\ \lambda_{12} = (\lambda_\xi - \lambda_\eta) \cos \phi \cdot \sin \phi, \quad (27)$$

где $\lambda_\xi, \lambda_\eta$ — главные коэффициенты теплопроводности, ϕ — угол ориентации главной оси тензора теплопроводности $O\xi$ относительно оси Ox декартовой системы координат,

$l_1 = l_2 = 0.08$ м, конечное время $t_k = 0.6$ с, теплоемкость $c = 0.4$ кДж/(кг·К), $\rho = 2500$ кг/м³, $\phi = 45^\circ$, $h_1 = h_2 = h$.

Варьируя главные коэффициенты теплопроводности λ_ξ , λ_η и шаги τ и h пространственно-временной сетки с помощью перечисленных методов были проведены расчеты при различных значениях чисел r , где

$$r = \frac{a\tau}{h^2}, \quad a = \frac{4\|\lambda\|}{c\rho}, \quad \|\lambda\| = \max(\lambda_\xi, \lambda_\eta).$$

В табл. 1, 2 приведены результаты для фиксированных момента времени и значения переменной x , по которым можно судить об абсолютных погрешностях различных методов. Из табл. 1 видно, что при $r < 1$, а именно в области устойчивости классической явной схемы, и $\tau = 0.025$ с погрешности перечисленных схем имеют практически один порядок. С увеличением r до значения ~ 2.0 (см. табл. 2) резкий скачок абсолютной

Т а б л и ц а 1. Значения температур в сечении $x = 0.05$ м в момент времени $t = 0.6$ с при $\tau = 0.025$ с, $h = 0.01$ м, $a = 0.001$ м²/с, $r = 0.25$

Схема	y , м						
	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
Точное решение	0.4583	0.5033	0.5783	0.6833	0.8183	0.9833	1.1783
Схема глубокого расщепления	0.4725	0.5183	0.5934	0.6983	0.8333	0.9950	1.1975
Схема метода дробных шагов	0.4713	0.5205	0.5913	0.6975	0.8314	0.9936	1.1955
Схема метода переменных направлений	0.4654	0.5109	0.5858	0.6918	0.8260	0.9913	1.1853
Центрально-симметричная схема	0.4725	0.5183	0.5933	0.6993	0.8335	0.9984	1.1923
Явная схема	0.4825	0.5284	0.5932	0.6963	0.8427	0.9987	1.1923

Т а б л и ц а 2. Значения температур в сечении $x = 0.05$ м в момент времени $t = 0.6$ с при $\tau = 0.2$ с, $h = 0.01$ м, $a = 0.001$ м²/с, $r = 2.0$

Схема	y , м						
	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
Точное решение	0.4583	0.5033	0.5783	0.6833	0.8183	0.9833	1.1783
Схема глубокого расщепления	0.4961	0.5557	0.6460	0.7616	0.8945	1.0426	1.2100
Схема метода дробных шагов	0.4956	0.5617	0.5849	0.7448	1.3592	-0.300	2.9474
Схема метода переменных направлений	0.4999	0.8148	3.4225	7.8926	98.754	89.546	-72.34
Центрально-симметричная схема	0.5062	0.5634	0.6134	0.7240	1.4283	-0.5634	3.7213
Явная схема	0.4877	0.7158	0.2567	0.2894	2.4564	-13.84	-11.34

погрешности $\varepsilon(t)$ явной схемы, схемы метода переменных направлений, центрально-симметричной и схемы метода дробных шагов иллюстрирует их неустойчивость, в то время как схема глубокого расщепления остается устойчивой, хотя его абсолютная погрешность возрастает по сравнению со случаем $r = 0.25$ (см. табл. 1) в соответствии с порядком точности $O(\tau + (h_1 + h_2)^2)$.

Возникновение неустойчивости в рассматриваемых схемах уже при умеренных числах r является следствием использования в них конечно-разностной аппроксимации смешанных дифференциальных операторов на нижних временных слоях (явно).

Следует отметить, что нелинейности в коэффициентах задачи (23)–(25) во всех конечно-разностных схемах, кроме явной, учитывались в итерационном процессе Ньютона, при этом всюду достаточно было не более одной итерации, не считая нулевой.

Выводы

Предложен новый экономичный абсолютно устойчивый метод глубокого расщепления численного решения задач для уравнений параболического типа, содержащих смешанные дифференциальные операторы, основанный на более глубоком, чем в существующих методах, расщеплении смешанных производных и их неявной аппроксимации.

Исследования метода глубокого расщепления на примерах решения задач анизотропной теплопроводности показали зависимость вида конечно-разностной схемы, а следовательно и устойчивости, от знаков коэффициентов теплопроводности при смешанных производных. Показано, что абсолютная устойчивость схемы метода глубокого расщепления имеет место в случаях, когда смешанный конечно-разностный оператор ориентирован по вектору теплового потока. В связи с этим разработан специальный алгоритм, сохраняющий абсолютную устойчивость метода.

Представленный метод является достаточно общим и может быть применен не только к задачам анизотропной теплопроводности, но и к другим задачам математической физики.

Список литературы

- [1] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.
- [2] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
- [3] Формалев В.Ф. Метод переменных направлений с экстраполяцией по времени для параболических задач со смешанными производными // Вычисл. технологии. 1996. Т. 1, № 2. С. 99–103.
- [4] Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
- [5] Формалев В.Ф., Тюкин О.А. Неявный метод дробных шагов с расщеплением смешанных дифференциальных операторов // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 6. С. 82–91.

*Поступила в редакцию 23 марта 2010 г.,
с доработки — 28 мая 2010 г.*