

## Аналитическое решение одной модели ветрового движения вязкой жидкости (трехмерный случай)\*

Л. А. КОМПАНИЕЦ, Т. В. ЯКУБАЙЛИК, О. С. ПИТАЛЬСКАЯ

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия*  
e-mail: kla@icm.krasn.ru, tanyakub@torins.ru, olga.pitalskaya@gmail.com

Найдено аналитическое решение стационарной задачи ветрового движения вязкой однородной жидкости в замкнутом водоеме прямоугольной формы. Проводится сравнение полученного решения с решением для модели Экмана (без учета эффекта бокового перемешивания), что позволяет определить область применимости более простой предложенной модели. Полученное решение может быть использовано для тестирования вычислительных алгоритмов, предназначенных для расчета ветрового движения жидкости.

*Ключевые слова:* вязкая жидкость, аналитическое решение.

### Введение

Уравнения нестационарного трехмерного ветрового движения вязкой однородной и неоднородной жидкости [1, 2] с соответствующими граничными условиями, учитывающими влияние ветра и твердых стенок, часто используются для определения движения в реальных водоемах. Однако аналитических решений для таких задач в литературе немного [3]. Отметим, что аналитические решения для моделей экмановского типа (когда в уравнениях движения сохраняются только члены, описывающие турбулентное движение в вертикальном направлении и силу Кориолиса) в случае трехмерного или двумерного стационарного течения известны для постоянного и переменного коэффициента вертикального турбулентного обмена и широко используются для анализа решения [2–9] и расчета конкретных задач. Например, в работе [9] аналитическое решение для этой модели применяется в целях оценки эффекта возникновения компенсационного противотечения в водохранилищах равнинного типа.

Сделаем ряд упрощающих предположений, позволяющих найти аналитическое решение системы уравнений, выписанной в [1, 2], для горизонтальных составляющих скорости как при постоянном, так и при переменном коэффициенте вертикального турбулентного обмена:

- 1) течение является однородным, коэффициенты горизонтального турбулентного обмена — величины постоянные;
- 2) в уравнениях движения и в кинематическом краевом условии на свободной поверхности можно пренебречь нелинейными членами (медленное течение);
- 3) отклонение свободной поверхности от невозмущенного положения мало, и влияние ветра можно рассматривать на невозмущенной поверхности бассейна [2];

---

\*Работа выполнена в рамках Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 95.

- 4) бассейн имеет прямоугольную форму; на дне задано условие, линейно связывающее касательное напряжение и горизонтальную скорость течения;
- 5) на вертикальных стенках бассейна ставятся условия прилипания;
- 6) существует стационарное решение уравнений с указанными граничными условиями.

Тогда получаем краевую задачу, которая решается в области  $0 < x < a, 0 < y < b, -H < z < \zeta(x)$ :

$$K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + lv = g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (1)$$

$$K_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - lu = g \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

с граничными условиями

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau_x}{\rho_0}, \quad K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau_y}{\rho_0}, \quad (4)$$

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b u|_{z=-H}, \quad K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b v|_{z=-H}, \quad (5)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=b} = u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0,$$

$$v|_{x=0} = v|_{x=a} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0,$$

$$w|_{z=0} = w|_{z=-H} = 0. \quad (6)$$

Здесь  $H > 0$  — глубина бассейна;  $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$  — горизонтальные компоненты вектора скорости течения;  $w = w(x, y, z)$  — вертикальная компонента вектора скорости течения;  $g$  — ускорение свободного падения;  $K_x > 0, K_y > 0$  — коэффициенты горизонтального турбулентного обмена;  $K_z > 0$  — коэффициент вертикального турбулентного обмена;  $\zeta = \zeta(x, y)$  — отклонение поверхности жидкости от равновесного положения;  $\tau_x, \tau_y$  — компоненты вектора касательного напряжения ветра на водной поверхности;  $\rho_0$  — плотность воды;  $k_b = \text{const}$  — коэффициент придонного касательного напряжения;  $l$  — параметр Кориолиса. Отметим, что вариант  $k_b = 0$  отвечает условию скольжения без трения, а  $k_b = \infty$  — условию прилипания. Ось  $z$  направлена вертикально вверх.

При  $K_x = K_y = 0$  получаем хорошо изученную модель Экмана

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + lv = g \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - lu = g \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Для нее на твердых стенках ставится условие равенства нулю составляющих полного потока скорости.

# 1. Точное решение модели Экмана при постоянном коэффициенте вертикального турбулентного обмена ( $K_z = \text{const}$ ) с учетом наклонов свободной поверхности

Рассмотрим систему уравнений Экмана, описывающую стационарное движение однородной жидкости для случая постоянного коэффициента турбулентного обмена.

В комплексных обозначениях

$$W = u + iv, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \tau^W = \tau_x + i\tau_y$$

запишем уравнения и граничные условия для этой задачи

$$K_z \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - i l W = g \frac{\partial \zeta}{\partial n},$$

$$K_z \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau^W}{\rho_0}, \quad W|_{z=-H} = 0.$$

Ее решение [4] для случая бассейна конечной глубины имеет вид

$$W = \frac{1}{\sqrt{i l K_z}} \frac{\sinh \sqrt{\frac{i l}{K_z}} (H + z)}{\cosh \sqrt{\frac{i l}{K_z}} H} \frac{\tau^W}{\rho_0} - \frac{i g}{l} \left( \frac{\cosh \sqrt{\frac{i l}{K_z}} z}{\cosh \sqrt{\frac{i l}{K_z}} H} - 1 \right) \frac{\partial \zeta}{\partial n}, \quad (8)$$

для случая бассейна бесконечной глубины было выписано Экманом в 1905 г. Особенно часто для анализа применяется дрейфовая составляющая, зависящая только от напряжения ветра, хотя учет геострофической составляющей, зависящей от наклонов свободной поверхности, может изменить решение.

Для нахождения наклонов свободной поверхности [4], интегрируя (8) по глубине, получаем

$$W = U + iV = \int_{-H}^0 W dz = \frac{A}{l} \frac{\tau^W}{\rho_0} + \frac{gHB}{l} \frac{\partial \zeta}{\partial n}, \quad (9)$$

где  $A$  и  $B$  — функции только от  $H/d$ ,  $d = \pi \sqrt{\frac{2K_z}{l}}$ . Запишем функции  $A$ ,  $B$  в комплексном виде

$$A = C + iD, \quad B = E + iF.$$

Тогда уравнение (9) можно представить следующим образом:

$$U = \frac{1}{l} \left( C \frac{\tau_x}{\rho_0} - D \frac{\tau_y}{\rho_0} \right) + \frac{gH}{l} \left( E \frac{\partial \zeta}{\partial x} - F \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right),$$

$$V = \frac{1}{l} \left( D \frac{\tau_x}{\rho_0} + C \frac{\tau_y}{\rho_0} \right) + \frac{gH}{l} \left( F \frac{\partial \zeta}{\partial x} + E \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right),$$

и коэффициенты  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$  определяются по формулам [4]

$$C = K/L, \quad D = M/L - 1, \quad E = \frac{1}{2\theta} N/L, \quad F = -\frac{1}{2\theta} P/L + 1, \quad (10)$$

где  $\theta = \pi \frac{H}{d}$ ,  $K = 2 \sin \theta \sinh \theta$ ,  $L = \cos 2\theta + \cosh 2\theta$ ,  $M = 2 \cos \theta \cosh \theta$ ,  $N = \sin 2\theta - \sinh 2\theta$ ,  $P = \sin 2\theta + \sinh 2\theta$ .

С учетом граничного условия (6)

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^0 u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^0 v dz = 0,$$

что позволяет ввести функцию тока  $\Psi$ . Обозначим

$$U = \int_{-H}^0 u dz = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad V = \int_{-H}^0 v dz = \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Для нахождения градиентов свободной поверхности необходимо решить уравнение для функции тока, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{l} \left( G \operatorname{curl} \frac{\tau^W}{\rho_0} + I \operatorname{div} \frac{\tau^W}{\rho_0} \right), \quad (11)$$

где

$$\operatorname{curl} \tau^W = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}, \quad \operatorname{div} \tau^W = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y}.$$

Граничные условия на береговой линии  $\Gamma$ :  $\Psi(x, y)|_{\Gamma} = 0$ . Обозначим

$$\beta(x, y) = \frac{1}{l} \left( G \operatorname{curl} \frac{\tau^W}{\rho_0} + I \operatorname{div} \frac{\tau^W}{\rho_0} \right).$$

Уравнение (11) представляет собой уравнение Пуассона, и если береговая линия — прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ , то его решение можно выписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= -\frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \beta(\xi, \eta) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{b} \eta}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} d\eta d\xi = \\ &= -\frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \int_0^a \int_0^b \beta(\xi, \eta) \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\eta d\xi = \\ &= -\frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{n,m} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}, \end{aligned}$$

где

$$\Psi_{n,m} = \int_0^a \int_0^b \beta(\xi, \eta) \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\eta d\xi.$$

Зная  $\Psi_{n,m}$ , найдем

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{l} (D\tau_x + C\tau_y) - \frac{gH}{l} E \frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{gH}{l} F},$$

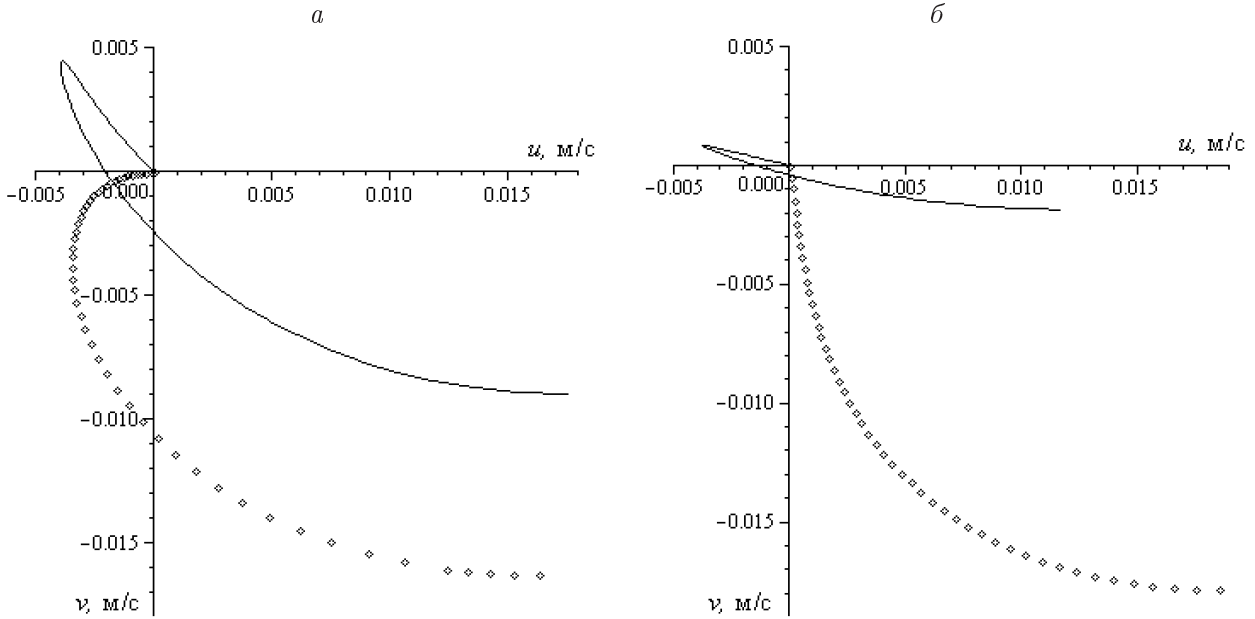


Рис. 1. Годографы скоростей в центральной точке бассейна, модель Экмана:  $H = 50$  м (а), 24 м (б)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\frac{1}{l} F (C\tau_x - D\tau_y) - \frac{1}{l} E (D\tau_x + C\tau_y) + \frac{1}{l} \left( F \frac{\partial \Psi}{\partial y} + E \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)}{\frac{gH}{l} (F^2 + E^2)}. \quad (12)$$

С учетом (10), (12) решение однозначно определяется по формуле (8). Если ветер постоянен вдоль всей акватории и  $\tau_y = 0$ , то для наклонов свободной поверхности имеем

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\tau_x (CF - ED)}{gH(F^2 + E^2)}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\tau_x (CE + DF)}{gH(F^2 + E^2)}.$$

Влияние наклонов свободной поверхности демонстрирует рис. 1, на котором показаны годографы скорости для модели Экмана (сплошная линия — с учетом, точки — без учета наклонов свободной поверхности). Рассматривался водоем длиной и шириной 5000 м. Ветер вдоль всей акватории бассейна постоянен, при этом  $\tau_x/\rho_0 = 0.4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$ ,  $\tau_y/\rho_0 = 0$ , параметр Кориолиса  $l = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ , коэффициент вертикального турбулентного обмена  $K_z = 0.02 \text{ м}^2/\text{с}$ , глубина  $H = 50$  и 24 м. Из сравнения рисунков *a* и *б* следует вывод: уменьшение глубины приводит к увеличению угла между направлением ветра и вектором скорости жидкости на поверхности.

## 2. Точное решение модели движения жидкости с учетом горизонтального турбулентного обмена при постоянных коэффициентах турбулентного обмена

Если наклоны свободной поверхности равны нулю, легко найти решение системы уравнений (1)–(3). Сделаем это для случая  $K_x = K_y$ .

В комплексной форме уравнения (1), (2) запишутся следующим образом:

$$K_x \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + K_z \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - i l W = g \frac{\partial \zeta}{\partial n}, \quad (13)$$

а граничные условия в таких обозначениях примут вид

$$K_z \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau^W}{\rho_0}, \quad (14)$$

$$K_z \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b W|_{z=-H}, \quad (15)$$

$W = 0$  на всех твердых стенках. Если предположить, что градиенты отклонения свободной поверхности малы и ими можно пренебречь, то уравнения запишутся как

$$K_x \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + K_z \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - i l W = 0. \quad (16)$$

Будем искать решение в виде

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{n,m}(z) \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{m\pi y}{b} \right).$$

Подставляя последнее выражение в (16), имеем

$$K_x \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 f_{n,m} + K_x \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 f_{n,m} - K_z f_{n,m}'' + i l f_{n,m} = 0.$$

Решениями этого уравнения являются функции

$$f_{n,m} = C_{n,m}^1 e^{\sqrt{\alpha_{n,m}} z} + C_{n,m}^2 e^{-\sqrt{\alpha_{n,m}} z},$$

где

$$\alpha_{n,m} = \frac{K_x \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + K_x \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + i l}{K_z}. \quad (17)$$

Величины  $C_{n,m}^1$  и  $C_{n,m}^2$  находим из граничных условий (14) и (15), учитывая, что

$$\tau^W = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{n,m} \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{m\pi y}{b} \right). \quad (18)$$

Решение с учетом наклонов свободной поверхности находится следующим образом. Проинтегрируем уравнения (1)–(3) по  $z$ :

$$K_x \int_{-H}^0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dz + K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{-H}^0 + l \int_{-H}^0 v dz = H g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (19)$$

$$K_x \int_{-H}^0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dz + K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{-H}^0 - l \int_{-H}^0 u dz = H g \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (20)$$

$$\int_{-H}^0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0. \quad (21)$$

Перепишем (19), (20) в терминах функции  $\Psi$ :

$$K_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + K_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} - K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} + l \frac{\partial \Psi}{\partial x} = Hg \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (22)$$

$$K_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + K_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} - K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-H} - l \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = Hg \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (23)$$

Продифференцируем (22) по  $y$  и умножим на  $(-1)$ , затем продифференцируем (23) по  $x$  и сложим получившиеся выражения. Получим уравнение для  $\Psi$ :

$$K_x \Delta \Delta \Psi + k_b \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{z=-H} - k_b \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z=-H} = \frac{\partial \tau_x}{\partial y \rho_0} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x \rho_0}. \quad (24)$$

Решение уравнения (24) будем искать в виде

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{n,m} \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{m\pi y}{b} \right), \quad (25)$$

а решение (13) — в виде

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (c1_{n,m} e^{\sqrt{\alpha_{n,m}} z} - c2_{n,m} e^{-\sqrt{\alpha_{n,m}} z} + c3_{n,m} d\zeta_{n,m}) \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{m\pi y}{b} \right), \quad (26)$$

где  $d\zeta_{n,m}$  — коэффициенты разложения в ряд Фурье величины  $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ ,  $\alpha_{n,m}$  определяется по формуле (17) и

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial y \rho_0} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x \rho_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tau_{n,m} \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{m\pi y}{b} \right). \quad (27)$$

Учитывая граничные условия (4), (5),  $c1_{n,m}$ ,  $c2_{n,m}$  и  $c3_{n,m}$  определяются из решения системы уравнений

$$K_z \sqrt{\alpha_{n,m}} (c1_{n,m} - c2_{n,m}) = \frac{\tau_{n,m}}{\rho_0},$$

$$K_z \sqrt{\alpha_{n,m}} (c1_{n,m} e^{-\sqrt{\alpha_{n,m}} H} - c2_{n,m} e^{\sqrt{\alpha_{n,m}} H}) = k_b (c1_{n,m} e^{-\sqrt{\alpha_{n,m}} H} + c2_{n,m} e^{\sqrt{\alpha_{n,m}} H} + c3_{n,m} d\zeta_{n,m}),$$

$$K_x \left( \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{b} \right)^2 \right) c3_{n,m} + il c3_{n,m} = -g.$$

С помощью уравнений (22), (23) исключим величины  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$  из уравнений (1), (2):

$$K_x \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + lv = \frac{1}{H} K_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + K_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} - K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} + l \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (28)$$

$$K_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + K_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - lv = \frac{1}{H} K_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + K_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} - K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-H} - l \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right). \quad (29)$$

Подставим решения (25), (26) в уравнения (24), (28), (29). С учетом разложения (27) получим систему алгебраических уравнений, позволяющих найти коэффициенты, определяющие функции  $\Psi$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ .

Расчеты проводились для различного количества членов ряда, и было найдено то значение  $n_0$ , начиная с которого решения уже практически не отличаются друг от друга (в данном случае  $n_0 = 40$ ).

Рисунок 2 демонстрирует влияние на решение членов с наклонами свободной поверхности для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена (сплошная линия —

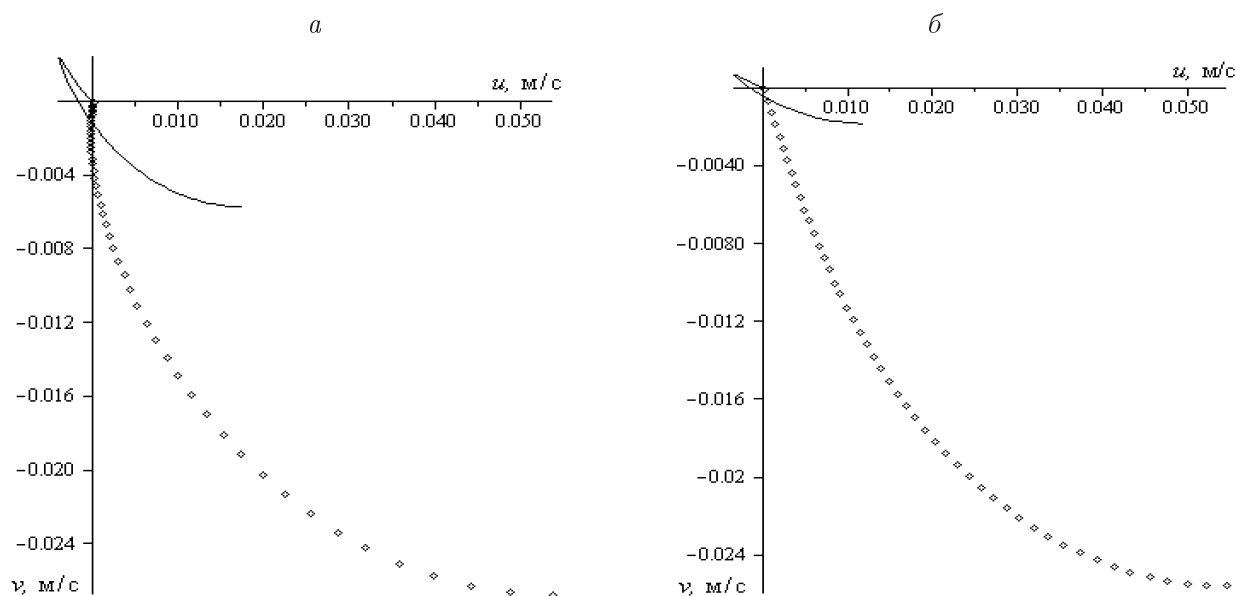


Рис. 2. Годографы скоростей в центральной точке бассейна, модель с учетом горизонтального турбулентного обмена:  $H = 50$  м (а), 24 м (б)

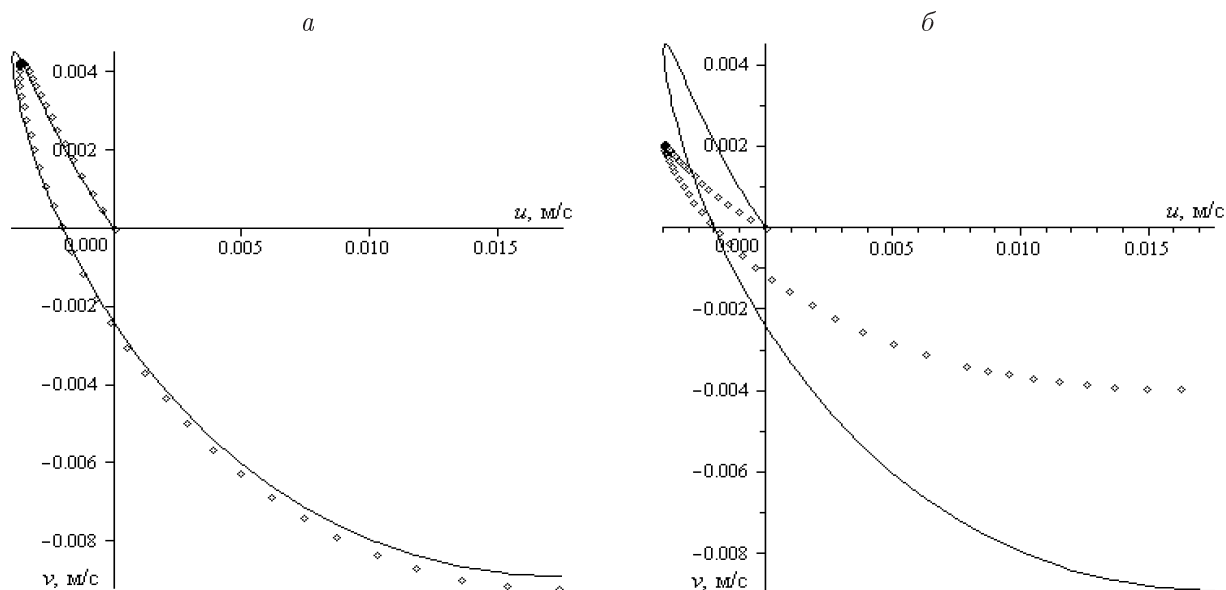


Рис. 3. Годографы скоростей: а — в центральной точке бассейна, б — вблизи границы



решение с учетом наклонов свободной поверхности, точки — без учета). Ветер вдоль всей акватории бассейна постоянен,  $\tau_x/\rho_0 = 0.4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$ ,  $\tau_y/\rho_0 = 0$ , коэффициенты турбулентного обмена  $K_x = K_y = 200 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $K_z = 0.02 \text{ м}^2/\text{с}$ , коэффициент придонного касательного напряжения  $k_b = 200 \text{ м}/\text{с}$ . Для скорости на поверхности наблюдается тот же эффект, что и в случае расчетов по модели Экмана (см. рис.1).

Сравним решения, полученные по двум описанным выше моделям.

Особенностью течения с учетом горизонтального турбулентного обмена является обращение решения в нуль на вертикальных стенках бассейна, в то время как решение уравнения (7) удовлетворяет на границах условию обращения в нуль нормальной составляющей полного потока скорости.

На рис. 3 приведено сравнение скоростей, полученных с помощью решения (26) (точки), и решения для модели Экмана (8) (сплошная линия) в центре бассейна и

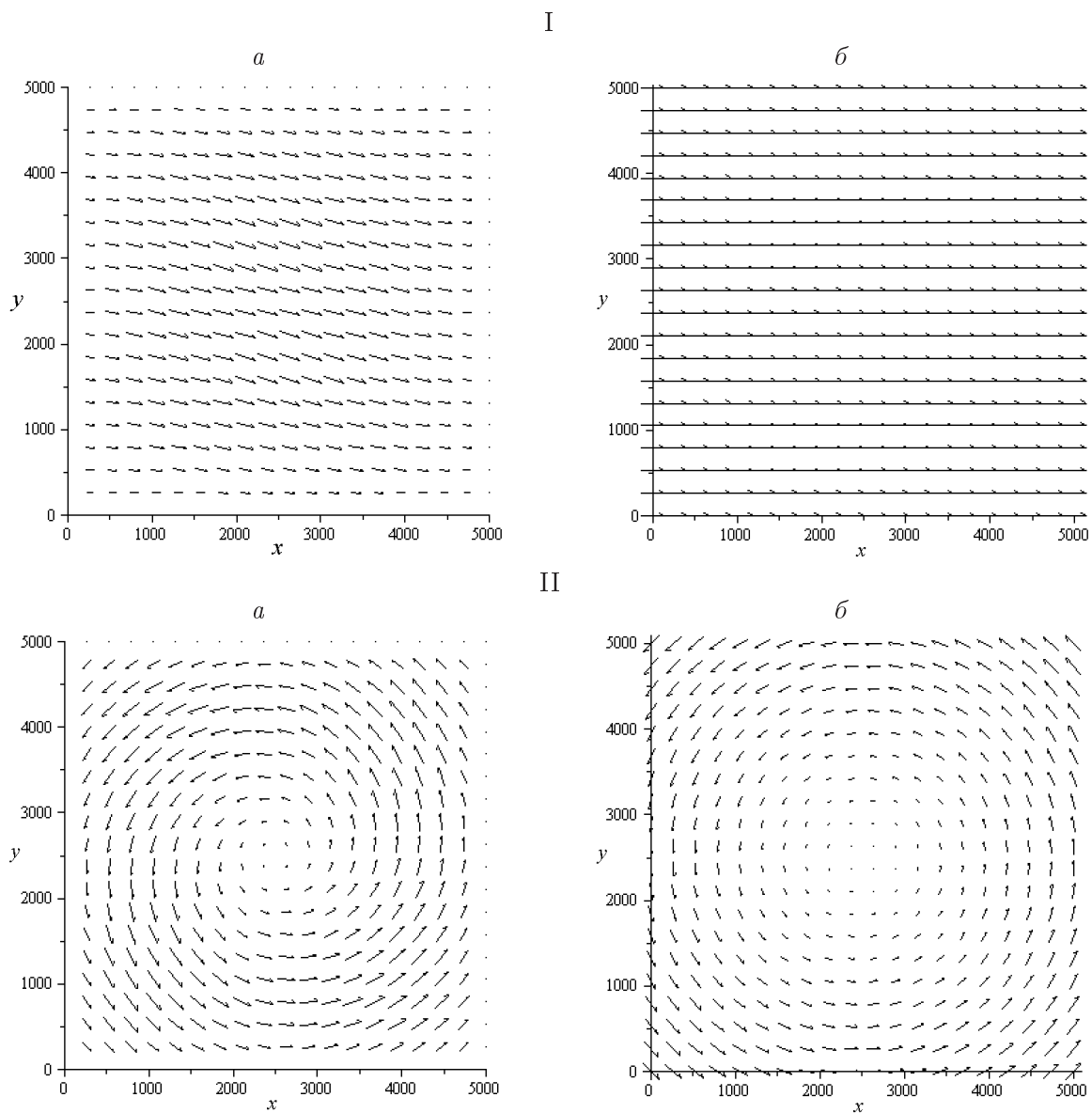


Рис. 4. Распределение скоростей на поверхности при постоянном ветре (I) и при круговом движении ветра (II): *a* — модель с вязкостью (26), *б* — модель Экмана

вблизи границы. Рассматривался водоем длиной и шириной 5000 м, при этом  $\tau_x/\rho_0 = 0.4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$ ,  $\tau_y/\rho_0 = 0$ , коэффициент придонного трения  $k_b = 200 \text{ м/с}$ , коэффициент вертикального турбулентного обмена  $K_z = 0.02 \text{ м}^2/\text{с}$ , коэффициенты горизонтального турбулентного обмена  $K_x = K_y = 1 \text{ м}^2/\text{с}$ , глубина  $H = 50 \text{ м}$ . Из графиков следует: чем ближе к границе расположена точка, тем сильнее различие результатов, полученных по рассматриваемым моделям.

На рис. 4, I показано распределение скоростей на поверхности для моделей (26) и Экмана при постоянном ветре ( $\tau_x/\rho_0 = 0.4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$ ,  $\tau_y/\rho_0 = 0$ ), на рис. 4, II — при ветре, заданном по формулам  $\frac{\tau_x}{\rho_0} = -y$ ,  $\frac{\tau_y}{\rho_0} = x$ . Рассматривался водоем длиной и шириной 5000 м, коэффициент придонного трения  $k_b = 2 \text{ м/с}$ , коэффициент вертикального турбулентного обмена  $K_z = 0.02 \text{ м}^2/\text{с}$ , глубина  $H = 50 \text{ м}$ .

Видно, что в области, достаточно удаленной от берегов, решения близки. При увеличении коэффициента горизонтального турбулентного обмена  $K_x$  различие между решениями модели с учетом горизонтального турбулентного обмена (26) и модели Экмана становятся все более существенными.

### 3. Решение модели с учетом горизонтального турбулентного обмена при переменном коэффициенте вертикального турбулентного обмена без учета наклонов свободной поверхности

#### 3.1. Точное решение при переменном вертикальном коэффициенте турбулентного обмена ( $K_z = cz + d$ )

Получить решение для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена в случае переменного коэффициента турбулентного обмена при учете наклонов свободной поверхности сложно, однако эта задача становится реальной для достаточно малых наклонов (в этом случае правую часть уравнений (1)–(3) можно считать равной нулю). Найдем решение для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена при  $K_z = cz + d$ ,  $K_x = K_y$  и условии  $\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0$ . В этом случае уравнение (13) будет иметь вид

$$K_x \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( (cz + d) \frac{\partial W}{\partial z} \right) - i l W = 0, \quad (30)$$

следовательно,

$$K_x \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + c \frac{\partial W}{\partial z} + (cz + d) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - i l W = 0,$$

граничные условия

$$d \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau^W}{\rho_0},$$

$$(d - cH) \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b W \Big|_{z=-H},$$

на всех твердых стенках

$$W = 0.$$

Будем искать решение в виде

$$F_{n,m} = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_{n,m}(z) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y; \quad (31)$$

учитывая (18) и подставляя (31) в уравнение (30), имеем

$$\frac{\partial^2 f_{n,m}}{\partial z^2} (cz + d) + c \frac{\partial f_{n,m}}{\partial z} - \left( K_x \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + K_x \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + il \right) f_{n,m} = 0.$$

Проведем замену переменных

$$\xi = cz + d, f_{n,m}(z) = \chi_{n,m}(\xi),$$

$$\xi c^2 \frac{\partial^2 \chi_{n,m}}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial \chi_{n,m}}{\partial \xi} - \left( K_x \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + K_x \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + il \right) \chi_{n,m} = 0.$$

Поделим обе части уравнения на  $c^2$  и умножим на  $\xi$ :

$$\xi^2 \frac{\partial^2 \chi_{n,m}}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial \chi_{n,m}}{\partial \xi} - \frac{\xi}{c^2} \left( K_x \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + K_x \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + il \right) \chi_{n,m} = 0. \quad (32)$$

Граничные условия преобразуются к следующему виду:

$$\xi \frac{\partial \chi_{n,m}}{\partial \xi} c \Big|_{\xi=d} = \varphi_{n,m},$$

$$\xi \frac{\partial \chi_{n,m}}{\partial \xi} c \Big|_{\xi=d-cH} = k_b \chi_{n,m} \Big|_{z=d-cH}.$$

Уравнение (32) представляет собой однородное модифицированное уравнение Бесселя, решение которого выписывается как

$$\chi_{n,m} = Z_0 \left( \frac{2}{c} \sqrt{\alpha_{n,m} \xi} \right),$$

$$Z_0 \left( \frac{2}{c} \sqrt{\alpha_{n,m} \xi} \right) = C_1^{n,m} J_0^{n,m}(\xi) + C_2^{n,m} K_0^{n,m}(\xi), \quad \alpha_{n,m} = \frac{K_x \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + K_x \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + il}{K_z},$$

здесь  $J_0(\xi), K_0(\xi)$  — функции Бесселя.

### 3.2. Решение при переменном коэффициенте вертикального турбулентного обмена ( $K_z = \delta e^{\lambda z}$ )

Если коэффициент вертикального турбулентного обмена  $K_z = \delta e^{\lambda z}$ ,  $K_x = K_y$  и  $\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0$ , то уравнение (13) примет вид

$$K_x \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \delta \lambda e^{\lambda z} \frac{\partial W}{\partial z} + \delta e^{\lambda z} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - ilW = 0. \quad (33)$$

Ищем решение в виде (31),  $\tau^W$  представим как разложение в ряд (18). Подставим выражения (18), (31) в (33):

$$-\left(K_x \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + K_x \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + il\right) f_{n,m} + \delta \lambda e^{\lambda z} \frac{\partial f_{n,m}}{\partial z} + \delta e^{\lambda z} \frac{\partial^2 f_{n,m}}{\partial z^2} = 0.$$

Сделаем замену переменной  $\xi = e^{-\frac{\lambda}{2}z}$ ,  $\alpha_{nm} = K_x \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + K_x \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + il$ , после чего приходим к уравнению

$$-\alpha_{n,m} f_{n,m} - \delta \frac{\lambda^2}{4} \frac{1}{\xi} \frac{\partial f_{n,m}}{\partial \xi} + \delta \frac{\lambda^2}{4} \frac{\partial^2 f_{n,m}}{\partial \xi^2} = 0$$

с соответствующим образом преобразованными граничными условиями

$$-\frac{\delta \lambda}{2\xi} \frac{\partial f_{n,m}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \varphi_{n,m}, \quad -\frac{\delta \lambda}{2\xi} \frac{\partial f_{n,m}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=e^{\frac{\lambda}{2}H}} = k_b f_{n,m} \Big|_{\xi=e^{\frac{\lambda}{2}H}}. \quad (34)$$

Умножим (34) на  $\xi^2$  и разделим на  $\frac{\delta \lambda^2}{4}$ :

$$-\alpha_{n,m} \frac{4}{\delta \lambda^2} \xi^2 f_{n,m} - \xi \frac{\partial f_{n,m}}{\partial \xi} + \xi^2 \frac{\partial^2 f_{n,m}}{\partial \xi^2} = 0. \quad (35)$$

Последнее уравнение представляет собой однородное модифицированное уравнение Бесселя, решение которого выписывается в виде

$$f_{n,m} = C_1^{n,m} \xi I_1 \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha_{n,m}}{\delta}} \xi \right) + C_2^{n,m} \xi K_1 \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha_{n,m}}{\delta}} \xi \right). \quad (36)$$

Подставляя данное решение (36) в уравнение (35) и граничные условия (34), находим коэффициенты  $C_1^{n,m}$ ,  $C_2^{n,m}$  и получаем решение

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_1^{n,m} e^{-\frac{\lambda}{2}z} I_1 \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha_{n,m}}{\delta}} e^{-\frac{\lambda}{2}z} \right) + \right. \\ \left. + C_2^{n,m} e^{-\frac{\lambda}{2}z} K_1 \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha_{n,m}}{\delta}} e^{-\frac{\lambda}{2}z} \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{b}.$$

На рис. 5 представлено сравнение скоростей для трех коэффициентов вертикального турбулентного обмена, как постоянного, так и переменного. На рис. 5, а приведены графики трех распределений коэффициента  $K_z$  по глубине: постоянного — сплошная линия, линейного — точки, экспоненциального — штрих. На рис. 5, б изображены годографы скорости для трех случаев: сплошная линия — годограф, построенный по формуле дрейфовой составляющей модели Экмана для постоянного коэффициента вертикального турбулентного обмена с условиями прилипания на дне — решение вида (8) при  $\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0$ , точки и штрих — годографы для модели Экмана в случае линейного  $K_z = cz + d$  и экспоненциального  $K_z = \delta e^{\lambda z}$  коэффициентов вертикального турбулентного обмена соответственно. На рис. 5, в, г приведены годографы скорости для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена: сплошные линии, штрих и точки —

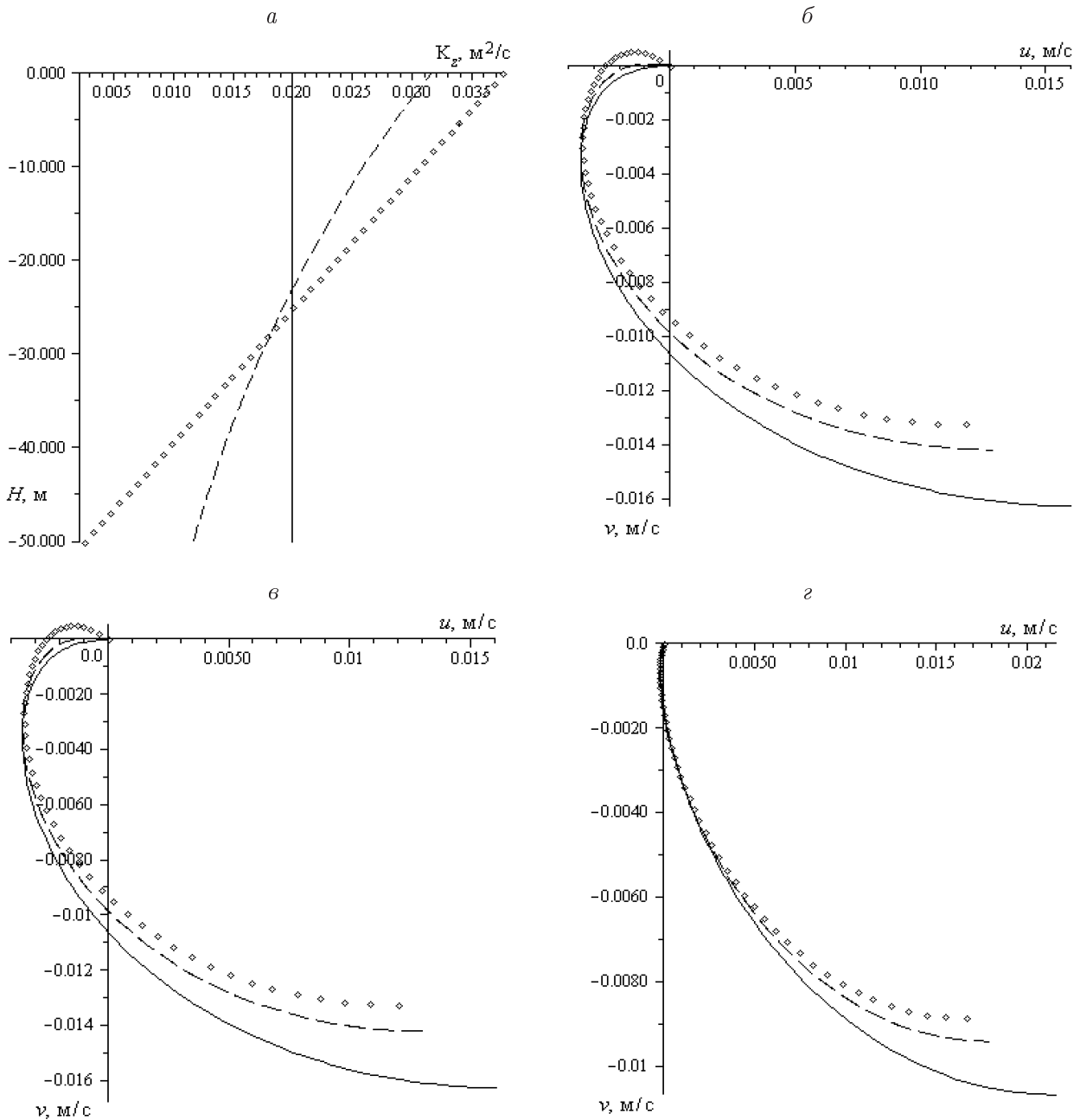


Рис. 5. Распределения трех коэффициентов вертикального турбулентного обмена и годографы скоростей (полученные по описанным моделям), соответствующие этим распределениям

при постоянном  $K_z = 0.02 \text{ м}^2/\text{с}$ , линейном  $K_z = cz + d$  и экспоненциальном  $K_z = \delta e^{\lambda z}$  распределении соответственно (рис. в —  $K_z = 1 \text{ м}^2/\text{с}$ , г —  $K_z = K_y = 200 \text{ м}^2/\text{с}$ ).

Расчеты были проведены при следующих значениях параметров: параметр Кориолиса  $l = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau_x/\rho_0 = 0.4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$ ,  $\tau_y = 0$ , бассейн со сторонами  $a = b = 5000 \text{ м}$  и глубиной  $H = 50 \text{ м}$ . При этом  $c = 7 \cdot 10^{-4}$ ,  $d = 3.75 \cdot 10^{-2}$  и  $\lambda = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $\delta = 3.16 \cdot 10^{-2}$  для линейного и экспоненциального распределений по глубине коэффициента вертикального турбулентного обмена соответственно. Скорости выведены в центральной точке бассейна. Из рис. 5 следует, что изменение коэффициента турбулентного обмена по глубине приводит к появлению глубины, на которой скорости имеют направления, про-

твивоположные направлениям на поверхности, в то время как увеличение коэффициента горизонтального турбулентного обмена вызывает противоположный эффект.

## Заклучение

В линейном приближении найдено решение трехмерной стационарной модели ветрового движения жидкости с учетом горизонтального турбулентного обмена. В случае постоянного коэффициента вертикального турбулентного обмена проведена оценка области, в которой достоверны результаты, получаемые для прямоугольного бассейна по более простой модели экмановского типа. При линейном и экспоненциальном изменении по глубине коэффициента вертикального турбулентного обмена найдены решения, не учитывающие наклоны свободной поверхности, проанализировано влияние на решение изменения коэффициентов вертикального турбулентного обмена.

Авторы выражают благодарность проф. В.М. Белолипецкому за содержательное обсуждение результатов представленных исследований.

## Список литературы

- [1] САРКИСЯН А.С. Моделирование динамики океана. СПб.: Гидрометеиздат, 1991. 296 с.
- [2] КОЧЕРГИН В.П. Теория и методы расчета океанических течений. М.: Наука, 1978. 128 с.
- [3] КОМПАНИЕЦ Л.А., ЯКУБАЙЛИК Т.В., ПИТАЛЬСКАЯ О.С. Аналитическое решение одной модели ветрового движения вязкой жидкости // Вычисл. технологии. 2009. Т. 14, № 4. С. 46–57.
- [4] WELANDER P. Wind action on a shallow sea: Some generalisations of Ekman's theory // Tellus. 1957. Vol. 9. P. 45–52.
- [5] КВОН В.И. Гидротермический расчет водоемов — охладителей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1979. № 5. С. 129–137.
- [6] ВОЛКОВА Г.Б., КВОН В.И., ФИЛАТОВА Т.Н. Численное моделирование ветровых течений в Чудском озере // Водные ресурсы. 1981. № 3. С. 91–99.
- [7] КОМПАНИЕЦ Л.А., ЯКУБАЙЛИК Т.В. Аналитическое решение одной модели ветрового движения жидкости // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 5. С. 78–83.
- [8] МОДЕЛИ экмановского типа в задачах гидродинамики. / Л.А. Компаниец, Т.В. Якубайлик, Л.В. Гаврилова, К.Ю. Гуревич. Новосибирск: Наука, 2007.
- [9] ЗЫРЯНОВ В.Н., ФРОЛОВ А.П. Природные компенсационные противотечения в водохранилищах равнинного типа // Водные ресурсы. 2006. Т. 33, № 1. С. 5–13.
- [10] КАМКЕ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1972.
- [11] КОРЕНЕВ Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971.
- [12] WANG Y., KOLUMBAN H. Methods of substructuring in lake circulation dynamics // Adv. Water Res. 2000. No. 23. P. 399–425.

*Поступила в редакцию 15 июля 2010 г.,  
с доработки — 14 февраля 2011 г.*