

## Приближенные закономерности безударного сильного сжатия многомерных слоев газа\*

А. В. РОЩУПКИН

*Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия*  
e-mail: alex@eleview.com

Рассмотрено получение приближенных закономерностей поведения газодинамических параметров на сжимающем поршне, реализующем безударное сильное сжатие до бесконечной плотности двумерных и трехмерных объемов газа.

*Ключевые слова:* газовая динамика, сильное безударное сжатие.

### Введение

Задача о безударном сильном сжатии идеального газа до любой заданной плотности (в том числе бесконечной) интересна в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза [1, 2]. Термин “безударное” здесь означает, что все рассматриваемые течения газа должны отделяться друг от друга только слабыми разрывами, но не ударными волнами. Имеются четыре точных решения системы уравнений газовой динамики, описывающие течения, дающие такие режимы сжатия в начале покоящегося идеального газа:

1) простая центрированная волна Римана, описывающая сжатие одномерного плоско-симметричного слоя до бесконечной плотности [3–5]; при этом давление на сжимающем поршне растет пропорционально величине  $(-t)^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)}$ , где  $t = 0$  — момент сильного сжатия,  $\gamma > 1$  — показатель политропы газа;

2) автомодельные решения Седова, описывающие сжатие одномерных объемов газа со сферической или цилиндрической симметрией [2, 6–9]. В этом случае асимптотический закон роста давления на поршне  $(-t)^{-2\gamma/[\gamma-(\nu-1)/(\nu+1)]}$ ,  $\nu = 1$  — в случае цилиндрической,  $\nu = 2$  — в случае сферической симметрии;

3) двумерное решение Сучкова, описывающее сжатие призмы при согласованных значениях показателя  $\gamma$  и угла призмы [10];

4) трехмерное решение Сидорова, описывающее сжатие многогранника при согласованных значениях показателя  $\gamma$  и двугранных углов [10].

В монографии [11] предложен следующий подход к математическому описанию процессов безударного сильного сжатия идеального газа. Сначала ставятся нужные (с точки зрения газовой динамики) начально-краевые задачи, а затем ищутся решения этих задач и анализируются свойства полученных решений. В работе [11] показано, что течения, описывающие безударное сильное сжатие газа, есть решения соответствующих характеристических задач Коши. Для получения бесконечной плотности сжатия решается одна такая задача — о получении вертикального распределения (хзК1). Течение, которое описывается решением хзК1, есть обобщение центрированной волны Римана на

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-00052).

случай пространственных течений. Заметим, что при  $t < 0$  данное решение описывает неограниченное сжатие газа, а при  $t > 0$  – разлет газа в вакуум.

Решение задачи хзК1 представляется в виде степенного ряда по степеням независимых переменных в новом функциональном пространстве. В работах [11–14] приведен способ получения коэффициентов этого ряда, выписаны несколько первых коэффициентов и показано, что данные ряды имеют не нулевую область сходимости.

На основе математической теории, разработанной в [11], в [15] получены приближенные закономерности движения непроницаемых поршней, обеспечивающих безударное сильное сжатие до бесконечной плотности одномерных слоев идеального газа, и показано, что найденные закономерности описываются кривыми, лежащими в областях сходимости рядов задачи хзК1.

Целью данной работы является получение приближенных закономерностей движения непроницаемых поршней, обеспечивающих безударное сильное сжатие не одномерных слоев газа до бесконечной плотности. Метод получения этих закономерностей на случай многомерных течений обобщает подход из работы [15].

## 1. Задача о получении вертикального распределения

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики

$$\begin{cases} \sigma_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \sigma + \frac{\gamma - 1}{2} \sigma \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{V}_t + \operatorname{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) + \frac{2}{\gamma - 1} \sigma s^2 \nabla \sigma + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s \nabla s = \mathbf{0}, \\ s_t + \mathbf{V} \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\sigma = \rho^{(\gamma-1)/2}$ ,  $\rho$  – плотность,  $\gamma$  – константа в уравнении состояния политропного газа  $p = A^2(S)\rho^\gamma/\gamma$ ,  $\gamma > 1$ ,  $p$  – давление,  $S$  – энтропия,  $s = A(S)$ ,  $\mathbf{V}$  – вектор скорости газа;  $\mathbf{U}$  – вектор неизвестных функций.

Пусть заданы фоновое течение  $\mathbf{U}_0$ , поверхность  $C_*$  и время сильного сжатия  $t = t_*$ . Требуется найти решения системы уравнений газовой динамики, описывающие процесс безударного сильного сжатия газа фонового течения  $\mathbf{U}_0$  до бесконечной плотности на поверхность  $C_*$  в момент времени  $t = t_*$ .

Данная задача при  $t < 0$  рассмотрена в монографии [11], а при  $t > 0$  в работах [12–14], где показано, что требуемые режимы сжатия или разлета в вакуум описываются решением одной характеристической задачи Коши (хзК1) – задачи о получении вертикального распределения.

Рассмотрим случай трехмерных течений.

Будем считать, что в пространстве  $\mathbf{R}^3$  поверхность  $C_*$  параметрически задается в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\xi_1, \xi_2) = (q_1(\xi_1, \xi_2), q_2(\xi_1, \xi_2), q_3(\xi_1, \xi_2)),$$

где  $q_i(\xi_1, \xi_2)$  – аналитические функции в окрестности некоторой точки  $(\xi_1 = \xi_1^0, \xi_2 = \xi_2^0)$ , не особой для  $C_*$ .

По фоновому течению и поверхности сильного сжатия однозначно определяется  $C_0^\pm$  – звуковая характеристика фонового течения, по которой будет распространяться искомая волна сжатия.

Обозначим

$$\mathbf{U}_{00} = \mathbf{U}_0|_{C_0^\pm}, \quad \mathbf{U}^0 = \mathbf{U}_{00}|_{t=t_*}.$$

Введем новую систему координат  $(\eta, \xi_1, \xi_2)$ , предлагаемую в работе [14]:

1)  $\xi_1, \xi_2$  — параметры, с помощью которых задается поверхность  $C^*$ ;

2)  $\eta$  — расстояние от произвольной точки пространства до поверхности  $C_*$ , измеряемое вдоль прямой с направляющим вектором

$$\mathbf{V}_* = \mathbf{V}^0 + \frac{2}{\gamma - 1} s^0(\xi_1, \xi_2) \sigma^0(\xi_1, \xi_2) \mathbf{n}(\xi_1, \xi_2),$$

где  $\mathbf{n}(\xi_1, \xi_2)$  — нормаль к поверхности  $C_*$  в точке  $(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\mathbf{V} = (u, v, w)$ ,  $u$  — проекция вектора скорости газа на ось  $\eta$ ,  $v$  — на ось  $\xi_1$ ,  $w$  — на ось  $\xi_2$ .

Введенная система координат  $(\eta, \xi_1, \xi_2)$ , вообще говоря, не ортогональна. Связь новых координат с декартовыми координатами  $\mathbf{R} = (x_1, x_2, x_3)$  имеет вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{q} + \eta \mathbf{V}_*. \quad (2)$$

Якобиан такого преобразования

$$J_1 = [\mathbf{R}_{\xi_1} \times \mathbf{R}_{\xi_2}] \cdot \mathbf{V}_*$$

отличен от нуля, если  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_* \neq 0$ . Далее это условие предполагается выполненным.

В новых переменных характеристика  $C_0^\pm$  задается некоторым уравнением  $\eta = \eta_{00}(t, \xi_1, \xi_2)$ , причем  $\eta_{00}(t_*, \xi_1, \xi_2) = 0$ . Для газодинамических параметров фонового течения на звуковой характеристике  $C_0^\pm$  сохраним обозначение

$$\mathbf{U}_{00}(t, \xi_1, \xi_2) = \mathbf{U}_0|_{C_0^\pm}.$$

Поскольку у искомого течения в момент времени  $t = t_*$  производные по  $\eta$  не ограничены, то делается еще одна замена переменных — за независимые переменные берутся  $t, \sigma, \xi_1, \xi_2$ , а за новые искомые функции —  $\mathbf{U} = (\eta, u, v, w, s)$ . Якобиан такого преобразования, как и в одномерном и двумерном случаях,  $J_2 = \eta_\sigma$ .

Если положить

$$\mathbf{H}_1 = [\mathbf{R}_{\xi_2} \times \mathbf{V}_*] / J_1, \quad \mathbf{H}_2 = [\mathbf{R}_{\xi_1} \times \mathbf{V}_*] / J_1, \quad \mathbf{H}_3 = [\mathbf{R}_{\xi_1} \times \mathbf{R}_{\xi_2}] / J_1,$$

то система (1) в новых координатах примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\eta_t + \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_3) - \eta_{\xi_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_1 - \eta_{\xi_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_2 + \\ + \frac{\gamma - 1}{2} \sigma (\mathbf{V}_\sigma \cdot \mathbf{H}_3 - \eta_{\xi_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_1 - \eta_{\xi_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_2 + \\ + \eta_\sigma \mathbf{V}_{\xi_1} \cdot \mathbf{H}_1 + \eta_\sigma \mathbf{V}_{\xi_2} \cdot \mathbf{H}_2) = 0, \\ \eta_\sigma \vec{\mathbf{V}}_t + (-\eta_t + \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_3) \mathbf{V}_\sigma + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_1) (\eta_\sigma \mathbf{V}_{\xi_1} - \\ - \eta_{\xi_1} \mathbf{V}_\sigma) + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_2) (\eta_\sigma \mathbf{V}_{\xi_2} - \eta_{\xi_2} \mathbf{V}_\sigma) + \\ + \frac{2}{\gamma - 1} \sigma s^2 (\mathbf{H}_3 - \eta_{\xi_1} \mathbf{H}_1 + \eta_{\xi_2} \mathbf{H}_2) + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s [s_\sigma \mathbf{H}_3 + \\ + (\eta_\sigma s_{\xi_1} - \eta_{\xi_1} s_\sigma) \mathbf{H}_1 + (\eta_\sigma s_{\xi_2} - \eta_{\xi_2} s_\sigma) \mathbf{H}_2] = \vec{0}, \\ \eta_\sigma s_t + (-\eta_t + \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_3) s_\sigma + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_1) (\eta_\sigma s_{\xi_1} - \eta_{\xi_1} s_\sigma) + \\ + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_2) (\eta_\sigma s_{\xi_2} - \eta_{\xi_2} s_\sigma) = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Для системы (3) на характеристике  $C_0^\pm$  ставятся начальные условия

$$\mathbf{U}|_{\sigma=\sigma_{00}(t,\xi_1,\xi_2)} = \mathbf{U}_{00}(t, \xi_1, \xi_2) \quad (4)$$

и краевые условия

$$\eta(t, \xi_1, \xi_2)|_{t=t_*} = 0. \quad (5)$$

В работе [11] доказана следующая теорема.

**Теорема.** *Задача (3), (4), (5) является характеристической задачей Коши стандартного вида, у которой в некоторой окрестности точки  $(\xi = \xi_1^0, \xi = \xi_1^0)$  при  $\sigma|t - t_*|^{1/\beta} < M$  существует единственное аналитическое решение. Здесь  $J_2|_{t=t_*} = 0$ ,  $J_2|_{t \neq t_*} \neq 0$ ,  $M = \text{const} > 0$ ,  $\beta = 2\alpha$ ,  $\alpha = (\gamma + 1)/[2(\gamma - 1)]$  при  $1 < \gamma < 3$ ,  $\beta = 1$  при  $\gamma \geq 3$ .*

Решение хзК1 (3), (4), (5) в пространстве переменных  $(t, x_1, x_2, x_3)$  при  $t \leq t_*$  описывает сжатие газа до бесконечной плотности в момент  $t = t_*$  на поверхность  $C_*$ . При  $t \geq t_*$  решение хзК1 описывает истечение газа в вакуум при мгновенном устранении в момент  $t = t_*$  поверхности  $C_*$ , разделяющей фоновое течение  $\mathbf{U}_0$  и вакуум.

Решение хзК1 представляется в виде ряда

$$\mathbf{U}(t, \sigma, \xi_1, \xi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(\sigma, \xi_1, \xi_2)(t - t_*)^k/k!. \quad (6)$$

Построение коэффициентов этого ряда для общего вида газа фонового течения подробно изложено в работе [14]. Для случая, когда газ фонового течения находится в состоянии однородного покоя, построение коэффициентов ряда (6) изложено в работе [13].

Пусть  $k = -1/r(\xi)$  — в случае двумерных течений и  $k = k_1(\xi_1, \xi_2) + k_2(\xi_1, \xi_2)$  — в случае трехмерных течений, где  $r(\xi)$  — радиус кривизны кривой  $C_*$ ,  $k_1(\xi_1, \xi_2)$ ,  $k_2(\xi_1, \xi_2)$  — главные кривизны поверхности  $C_*$ . Если  $\mathbf{U}_0$  — однородный покой, то нулевые, первые, а для  $\eta$  и второй коэффициенты указанного ряда имеют следующий вид (верхний знак — сжатие снаружи, нижний — изнутри) [11–14]:

$$\begin{aligned} u_0 &= \pm \frac{2}{\gamma - 1}(\sigma - 1), \quad v_0 = w_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \\ u_1 &= \begin{cases} -4\alpha(k_1 + k_2) \left[ \frac{\sigma^2}{3\gamma - 5} - \frac{\sigma}{\gamma - 3} + \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)}\sigma^\alpha \right], & \gamma \neq 3, \quad \gamma \neq 5/3, \\ -(k_1 + k_2) [\sigma^2 - \sigma - \sigma \ln \sigma], & \gamma = 3, \\ -3(k_1 + k_2) [\sigma^2 \ln \sigma + \sigma - \sigma^2], & \gamma = 5/3, \end{cases} \\ v_1 = w_1 &= 0, \quad \eta_1 = \pm \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left[ \sigma - \frac{2}{\gamma + 1} \right], \\ \eta_2 &= \begin{cases} \frac{\gamma + 5}{4}u_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\sigma(\sigma - 1), & \gamma \neq 3, \quad \gamma \neq 5/3, \\ 2u_1 + (k_1 + k_2)\sigma(\sigma - 1), & \gamma = 3, \\ \frac{5}{3}u_1 + 2(k_1 + k_2)\sigma(\sigma - 1), & \gamma = 5/3. \end{cases} \end{aligned}$$

## 2. Приближенные закономерности безударного сильного сжатия многомерных объемов газа

Запишем решение задачи о получении вертикального распределения в виде следующего степенного ряда

$$U(t, c, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(c, \xi) (t - t_*)^k / k!, \quad (7)$$

где  $c$  — скорость звука,  $c = \sigma s$  — для общих пространственных течений,  $c = \sigma$  — в случае, когда газ фонового течения находится в состоянии однородного покоя с  $s = 1$ ,  $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$ . Для сжатия однородного покоящегося газа в разделе 1 приведены первые коэффициенты данного ряда.

С целью определения закона внешнего воздействия найдем  $c_p(t, \xi)$  — значение скорости звука на сжимающем поршне. В этом случае закон движения поршня в направлении нормали будет задаваться соотношением

$$\eta_p(t, \xi) = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k(c, \xi) (t - t_*)^k / k! \right] \Big|_{c = c_p(t, \xi)}.$$

Поскольку поршень непроницаемый, то для него должно выполняться равенство

$$\frac{\partial \eta_p}{\partial t} = u(t, c, \xi) \Big|_{c = c_p(t, \xi)},$$

или

$$\frac{\partial \eta_p}{\partial c_p} \cdot \frac{\partial c_p}{\partial t} = u(t, c_p, \xi) - \frac{\partial \eta_p}{\partial t}.$$

Делая замену  $\tau = -(t - t_*)$  ( $\partial/\partial t = -\partial/\partial \tau$ ), получим задачу для определения функции  $c_p$

$$\frac{\partial \eta_p}{\partial c_p} \cdot \frac{\partial c_p}{\partial \tau} = - \left[ u(t, c_p, \xi) + \frac{\partial \eta_p}{\partial \tau} \right], \quad (8)$$

где в качестве  $u$  и  $\eta_p$  нужно подставлять соответствующие бесконечные ряды. Дифференциальное уравнение из этой задачи фактически является обыкновенным дифференциальным уравнением, в которое  $\xi$  входит как параметр.

Далее требуется найти такие решения уравнения (8), у которых  $c_p(t, \xi) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow t_* - 0$ . Поэтому начальные данные для уравнения (8) не ставятся и при конкретных выражениях для функций  $u$  и  $\eta_p$  будем искать общее решение в приближенном виде.

Ограничиваясь только первыми коэффициентами рядов для  $u$  и  $\eta_p$ , найдем решения уравнения (8) для следующих промежутков значения  $\gamma$ :  $1 < \gamma < 5/3$ ,  $\gamma = 5/3$ ,  $\gamma > 5/3$ ,  $\gamma \neq 3$ ,  $\gamma = 3$ . Обозначив далее для простоты написания  $c_p$  как  $c$ , а  $\eta_p$  как  $\eta$ , получим следующие решения.

1)  $1 < \gamma < 5/3$ . Укажем нулевые и первые коэффициенты рядов (7), являющихся разложением по степеням  $(t - t_*)$  функций  $u$  и  $\eta$ , а для  $\eta$  и второй коэффициент.

Нулевые коэффициенты рядов

$$u_0 = \pm \frac{2}{\gamma - 1} (c - 1) \sim \pm \frac{2}{\gamma - 1} c, \quad \eta_0 = 0.$$

Здесь знак  $\sim$  означает асимптотическое равенство (эквивалентность) двух функций [16, п. 4.4.-3] при  $c \rightarrow +\infty$ .

Первые коэффициенты рядов будут следующими: так как

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} > 2 \Leftrightarrow \gamma + 1 > 4\gamma - 4 \Leftrightarrow \gamma < 5/3,$$

и

$$u_1 = -4k\alpha \left[ \frac{1}{3\gamma - 5} c^2 - \frac{1}{\gamma - 3} c + 2 \frac{\gamma - 1}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^\alpha \right],$$

то

$$u_1 \sim -8k\alpha \frac{\gamma - 1}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^\alpha, \quad \eta_1 = \pm \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left( c - \frac{2}{\gamma - 1} \right) \sim \pm \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c.$$

Второй коэффициент ряда  $\eta$  вычисляется по схеме: поскольку

$$\eta_2 = \frac{\gamma + 5}{4} u_1 + k\alpha (c^2 - c) = k\alpha \left[ 2 \frac{\gamma - 5}{3\gamma - 5} c^2 + \frac{8}{\gamma - 3} c - 2 \frac{(\gamma + 5)(\gamma - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^\alpha \right],$$

то

$$\eta_2 \sim -2k\alpha \frac{(\gamma + 5)(\gamma - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^\alpha.$$

Таким образом, ряды  $u$  и  $\eta$  приближаются как

$$\begin{aligned} u &\sim \pm \frac{2}{\gamma - 1} c - 8k\alpha \frac{\gamma - 1}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^\alpha (t - t_*), \\ \eta &\sim \pm \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c (t - t_*) - k\alpha \frac{(\gamma + 5)(\gamma - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^\alpha (t - t_*)^2. \end{aligned}$$

а ряды  $\eta_t, \eta_c$  как

$$\begin{aligned} \eta_t &\sim \pm \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c - 2k\alpha \frac{(\gamma + 5)(\gamma - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^\alpha (t - t_*), \\ \eta_c &\sim \pm \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (t - t_*) - k\alpha^2 \frac{(\gamma + 5)(\gamma - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^{\alpha-1} (t - t_*)^2. \end{aligned}$$

Полагая  $\tau = -(t - t_*)$ , получим

$$\begin{aligned} u &\sim \pm \frac{2}{\gamma - 1} c + 8k\alpha \frac{\gamma - 1}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^\alpha \tau, \quad \eta_\tau \sim \mp \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c - 2k\alpha \frac{(\gamma + 5)(\gamma - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^\alpha \tau, \\ \eta_c &\sim \mp \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \tau - k\alpha^2 \frac{(\gamma + 5)(\gamma - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^{\alpha-1} \tau^2. \end{aligned}$$

Поскольку

$$u + \eta_\tau \sim \mp c - 2k\alpha \frac{(\gamma + 1)(\gamma - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^\alpha \tau,$$

то уравнение (8) примет вид

$$\left[ \mp \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \tau - k\alpha^2 \frac{(\gamma + 5)(\gamma - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^{\alpha-1} \tau^2 \right] \frac{dc}{d\tau} = \pm c + 2k\alpha \frac{(\gamma + 1)(\gamma - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} c^\alpha \tau.$$

С учетом того, что надо найти решения, которые стремятся к бесконечности при  $\tau \rightarrow -0$ , решение последнего уравнения ищем в виде

$$c = A\tau^\chi [1 + \omega(\tau)], \quad \chi = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} < 0, \quad \omega(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow 0.$$

Здесь  $A = A(\xi)$  — произвольная функция, появившаяся в результате интегрирования. Иначе говоря, в данном случае фактически строится приближение общего решения уравнения (8).

Выделяя в ходе решения только старшие члены, получим приближенное решение

$$c \sim A\tau^\chi [1 + w_0 + w + \dots] = A\tau^\chi \mp \frac{1}{2}k \frac{(\gamma^2 - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} A^\alpha \tau^{1/2} + \\ + \frac{k^2}{8} \cdot \frac{\gamma + 3}{\gamma - 1} \left[ \frac{(\gamma^2 - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} \right]^2 A^{2\alpha - 1} \tau^{1 - \chi} + \dots$$

2)  $\gamma = 5/3$ . Как и для  $1 < \gamma < 5/3$ , выписываем коэффициенты рядов (7) для  $u$  и  $\eta$ . Тогда уравнение (8) примет вид

$$\left[ \mp 4\tau - 10kc \ln(c)\tau^2 \right] \frac{dc}{d\tau} = \pm c + 4kc^2 \ln(c)\tau. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) ищем в виде

$$c = A\tau^\chi [1 + \omega(\tau)], \quad \chi = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \omega(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow 0, \quad A = A(\xi).$$

Выделяя в ходе решения только старшие члены, получим приближенное решение

$$c \sim A\tau^{-1/4} \mp \frac{1}{8}kA^2 \ln(\tau)\tau^{1/2} \pm \frac{1}{2}kA^2 \left[ \ln(A) - \frac{1}{3} \right] \tau^{1/2} + \\ + k^2 A^3 \left[ \frac{25}{576} + \frac{43}{96} \ln(A) + \frac{7}{8} \ln^2(A) \right] \tau^{5/4} - \\ - k^2 A^3 \left[ \frac{5}{128} + \frac{7}{16} \ln(A) \right] \ln(\tau)\tau^{5/4} + \frac{7}{128}k^2 A^3 \ln^2(\tau)\tau^{5/4} + \dots$$

3)  $\gamma > 5/3$ ,  $\gamma \neq 3$ . Аналогично первому случаю, выписываем коэффициенты рядов (7) для  $u$  и  $\eta$ . Далее уравнение (8) примет вид

$$\left[ \mp \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \tau + 2k\alpha \frac{\gamma - 5}{3\gamma - 5} c\tau^2 \right] \frac{dc}{d\tau} = \pm c - 2k\alpha \frac{\gamma - 3}{3\gamma - 5} c^2 \tau. \quad (10)$$

Введем обозначения

$$l_1 = \mp \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad l_2 = 2k\alpha \frac{\gamma - 5}{3\gamma - 5}, \quad r_1 = \pm 1, \quad r_2 = -2k\alpha \frac{\gamma - 3}{3\gamma - 5}.$$

Тогда (10) запишется как

$$\left[ l_1 \tau + l_2 c \tau^2 \right] \frac{dc}{d\tau} = r_1 c + r_2 c^2 \tau. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) можно выписать в явном виде.

Так как  $g = -(r_1c + r_2c^2\tau)$  и  $h = l_1\tau + l_2c\tau^2$  представимы в виде  $g = cg_1(c\tau)$  и  $h = \tau h_1(c\tau)$ , то интегрирующим множителем для (11) является

$$M = \frac{1}{\tau g - ch} = -\frac{1}{(r_1 + l_1)c\tau + (r_2 + l_2)c^2\tau^2}.$$

Уравнение

$$-\frac{l_1\tau + l_2c\tau^2}{(r_1 + l_1)c\tau + (r_2 + l_2)c^2\tau^2} \cdot \frac{dc}{d\tau} + \frac{r_1c + r_2c^2\tau}{(r_1 + l_1)c\tau + (r_2 + l_2)c^2\tau^2} = 0$$

есть уравнение в полных дифференциалах. Оно задает функцию  $F(\tau, c)$  такую, что

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{r_1c + r_2c^2\tau}{(r_1 + l_1)c\tau + (r_2 + l_2)c^2\tau^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial c} = -\frac{l_1\tau + l_2c\tau^2}{(r_1 + l_1)c\tau + (r_2 + l_2)c^2\tau^2}.$$

Здесь функция  $F(\tau, c)$  — общий интеграл рассматриваемого уравнения

$$F = \frac{r_1}{r_1 + l_1} \ln \tau - \frac{l_1}{r_1 + l_1} \ln c + \frac{l_1}{r_1 + l_1} \ln [(r_1 + l_1) + (r_2 + l_2)c\tau] + \ln |G|,$$

где  $G = G(\xi)$  — произвольная функция.

Если  $c$  есть решение уравнения (11), то можно считать, что

$$\frac{r_1}{r_1 + l_1} \ln \tau - \frac{l_1}{r_1 + l_1} \ln c + \frac{l_1}{r_1 + l_1} \ln [(r_1 + l_1) + (r_2 + l_2)c\tau] + \ln |G| = 0.$$

Отсюда определяем зависимость скорости звука на сжимающем поршне  $c$  от  $\tau$

$$c = \frac{G(r_1 + l_1)\tau^{r_1/l_1}}{1 - G(r_2 + l_2)\tau^{1+r_1/l_1}}.$$

Подставляя выражения для  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  и раскладывая по степеням  $\tau$ , получим

$$c = W\tau^x \pm k \frac{\gamma + 1}{3\gamma - 5} W^2 \tau^{2x+1} + \left(k \frac{\gamma + 1}{3\gamma - 5}\right)^2 W^3 \tau^{3x+2} \pm \left(k \frac{\gamma + 1}{3\gamma - 5}\right)^3 W^4 \tau^{4x+3} + \dots,$$

где

$$W = W(\xi) = \mp \frac{2}{\gamma - 1} G(\xi).$$

4)  $\gamma = 3$ . Также аналогично первому случаю выписываем коэффициенты рядов (7) для  $u$  и  $\eta$ . Уравнение (8) примет вид

$$[\mp 2\tau - kc\tau^2] \frac{dc}{d\tau} = \pm c. \quad (12)$$

Выражение (12) запишем как

$$[l_1\tau + l_2c\tau^2] \frac{dc}{d\tau} = r_1c, \quad l_1 = \mp 2, \quad l_2 = -k, \quad r_1 = \pm 1. \quad (13)$$



Решение уравнения (13) можно получить в явном виде. При изменении мест независимых и зависимых переменных (13) сводится к уравнению типа уравнения Бернулли, решение которого имеет вид

$$Gc^2 \mp kc - \frac{1}{\tau} = 0,$$

где  $G = G(\xi)$  — произвольная функция. Выразим скорость звука как

$$c_{1,2} = \frac{\pm k \pm \sqrt{k^2 + 4G\frac{1}{\tau}}}{2G}.$$

Перед корнем берем знак плюс, так как  $c \rightarrow +\infty$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Таким образом,

$$c = \frac{\pm k + \sqrt{k^2 + 4G\frac{1}{\tau}}}{2G} = \pm \frac{1}{G} \cdot \frac{k}{2} + \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + 4G\frac{1}{\tau}}.$$

Представим  $c$  в виде ряда по степеням  $\tau$ . Обозначая  $W = W(\xi) = G^{-1/2}(\xi)$ , получим

$$c = W\tau^{-1/2} \pm \frac{k}{2}W^2 + \frac{k^2}{8}W^3\tau^{1/2} - \frac{k^4}{128}W^5\tau^{3/2} + \dots$$

## Заключение

Итак, для случаев 1)  $1 < \gamma < 5/3$ , 2)  $\gamma = 5/3$ , 3)  $\gamma > 5/3, \gamma \neq 3$  и 4)  $\gamma = 3$  найдены следующие приближенные зависимости скорости звука на сжимающем поршне  $c_p$  от  $\tau$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad c_p &\sim A\tau^\chi \mp \frac{1}{2}k \frac{(\gamma^2 - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} A^\alpha \tau^{1/2} + \\ &+ \frac{k^2}{4} \cdot \frac{\gamma + 3}{\gamma - 1} \left[ \frac{(\gamma^2 - 1)}{(\gamma - 3)(3\gamma - 5)} \right]^2 A^{2\alpha-1} \tau^{1-\chi} + \dots, \\ 2) \quad c_p &\sim A\tau^{-1/4} \mp \frac{1}{8}kA^2 \ln(\tau)\tau^{1/2} \pm \frac{1}{2}kA^2 \left[ \ln(A) - \frac{1}{3} \right] \tau^{1/2} + \\ &+ k^2 A^3 \left[ \frac{25}{576} + \frac{43}{96} \ln(A) + \frac{7}{8} \ln^2(A) \right] \tau^{5/4} - \\ &- k^2 A^3 \left[ \frac{5}{128} + \frac{7}{16} \ln(A) \right] \ln(\tau)\tau^{5/4} + \frac{7}{128}k^2 A^3 \ln^2(\tau)\tau^{5/4} + \dots, \\ 3) \quad c_p &\sim W\tau^\chi \pm k \frac{\gamma + 1}{3\gamma - 5} W^2 \tau^{2\chi+1} + \left( k \frac{\gamma + 1}{3\gamma - 5} \right)^2 W^3 \tau^{3\chi+2} \pm \\ &\pm \left( k \frac{\gamma + 1}{3\gamma - 5} \right)^3 W^4 \tau^{4\chi+3} + \dots, \\ 4) \quad c_p &\sim W\tau^{-1/2} \pm \frac{k}{2}W^2 + \frac{k^2}{8}W^3\tau^{1/2} - \frac{k^4}{128}W^5\tau^{3/2} + \dots, \end{aligned} \tag{14}$$

где  $A = A(\xi)$  и  $W = W(\xi)$  — произвольные функции, а под многоточием понимаются слагаемые большего порядка малости, чем последние из приведенных.

На рис. 1 и 2 показана траектория движения сжимающего поршня, осуществляющего воздействие согласно формулам (14), на рис. 3 приведен соответствующий график значений функции скорости звука  $s$ .

Из сравнения первого и последующих слагаемых в каждой из формул (14) следует, что при  $\tau$ , лежащих достаточно близко к нулю,  $c_p(\tau)$  мало и поэтому кривые, задающие полученные закономерности, лежат в области сходимости рядов (7). В частности, если  $t_0$  лежит достаточно близко к нулю, рядами (7) можно пользоваться при всех  $t$ :  $t_0 \leq t \leq t_*$ . Тогда представления (14) будут справедливы при всех  $\tau$ :  $0 \leq \tau \leq t_* - t_0$ . В этом случае  $A(\xi)$  необходимо определять из начального условия  $c_p(t_* - t_0) = 1$ .

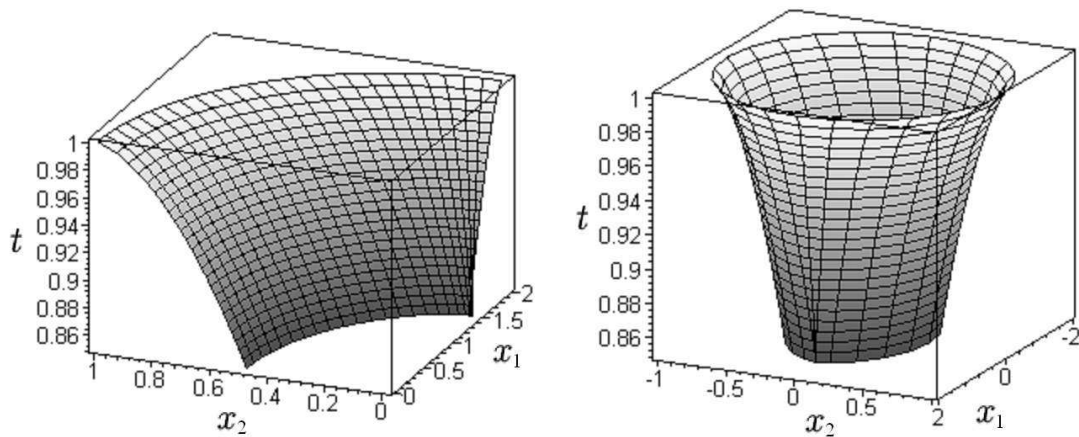


Рис. 1. Траектория движения поршня при безударном сильном сжатии вначале однородного и покоящегося газа до бесконечной плотности; кривая сильного сжатия  $C_*$  — эллипс с полуосями 2 : 1; слева представлена первая четверть траектории  $\xi \in [0, \pi/2]$

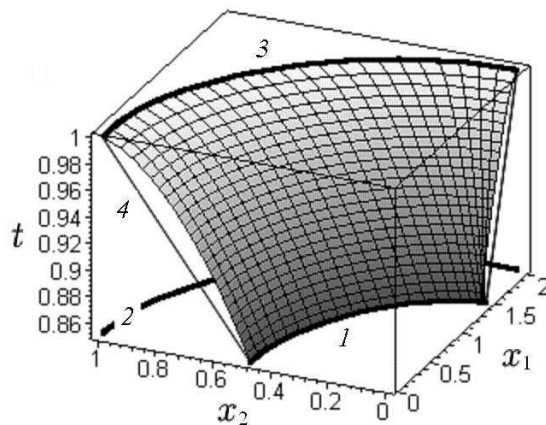


Рис. 2. Первая четверть  $\xi \in [0, \pi/2]$  сжимающего поршня, реализующего безударное сильное сжатие вначале однородного и покоящегося газа до бесконечной плотности; кривая сильного сжатия  $C_*$  — эллипс с полуосями 2 : 1; 1, 3 — положения поршня соответственно в моменты  $t = t_0$  и  $t = t_*$  (совпадают с кривой сильного сжатия  $C_*$ ); между кривыми 1 и 2 находится газ, который будет безударно сжат на кривую  $C_*$ ; 4 — характеристика  $C_0^\pm$ , отделяющая фоновое течения от волны сжатия (решения хзК1)

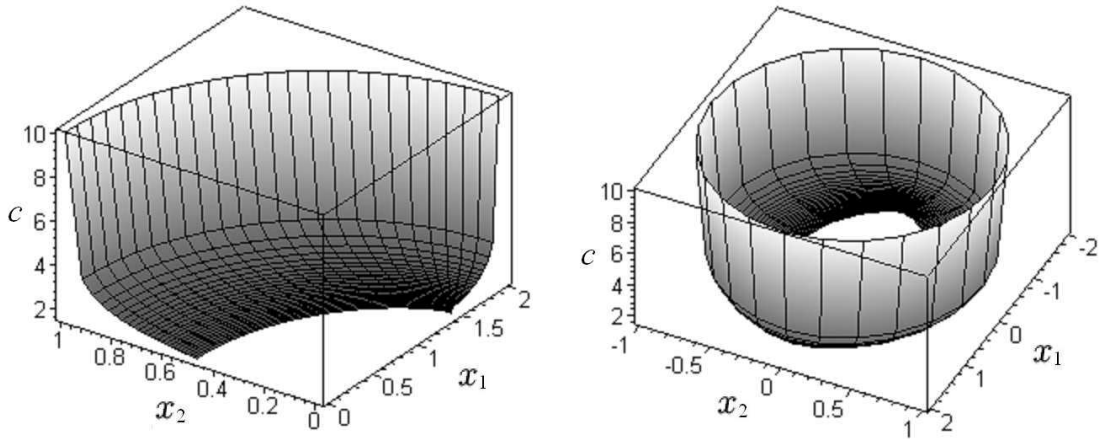


Рис. 3. График скорости звука  $c = \sigma$  на сжимающем поршне, реализующем безударное сильное сжатие вначале однородного и покоящегося газа; кривая сильного сжатия  $C_*$  — эллипс с полуосями 2 : 1; слева представлена первая четверть графика при  $\xi \in [0, \pi/2]$

В общем случае  $A(\xi)$  находится из условия состыковки в некоторый момент времени  $t = t_2$ ,  $t_0 < t_2 < t_*$ , асимптотик в окрестности линии начала старта поршня [15] и функций (14).

Закономерности (14) можно уточнять, используя все большее число слагаемых из бесконечных рядов, задающих в разных видах решение задачи о получении вертикального распределения.

Отметим, что при  $k \rightarrow 0$  выражения (14) переходят в точные формулы для плоско-симметричного случая сжатия газа.

Анализ полученных соотношений позволяет сделать следующие выводы.

1. Найденные асимптотики еще раз подтверждают известный вывод о легко (при малых  $\gamma$ ) и трудно (при больших  $\gamma$ ) сжимаемых средах: при  $1 < \gamma < 3$  вторые слагаемые в правых частях формул стремятся к нулю при  $\tau \rightarrow 0$ , а при  $\gamma > 3$  эти слагаемые стремятся к бесконечности ( $2\chi + 1 = (3 - \gamma)/(\gamma + 1)$ ,  $2\chi + 1 > 0$  при  $1 < \gamma < 3$ ,  $2\chi + 1 < 0$  при  $\gamma > 3$ ).

2. Для всех легко сжимаемых сред при  $1 < \gamma < 5/3$  второе слагаемое имеет показатель степени, не зависящий от  $\gamma$ .

3. Процессы сильного сжатия в общем случае являются неустойчивыми. Если сжимать ударно (на профиле плотности наблюдается вертикаль), то эта неустойчивость проявится сразу; при безударном сжатии (график плотности переходит в вертикаль только в моменты времени, близкие к  $t = t_*$ ) на начальном этапе получаемые течения будут устойчивы. Представленные закономерности указывают на то, что при направлении сжимающего поршня по нормали к поверхности сильного сжатия  $C_*$  при временах, близких к  $t = t_*$ , рассматриваемые процессы будут устойчивы по отношению к малым изменениям поверхности  $C_*$ .

Некоторые результаты данной работы докладывались в 2002 г. на III Международной конференции “Симметрия и дифференциальные уравнения” (Красноярск, Институт вычислительного моделирования СО РАН [17].)

Автор выражает благодарность С.П. Баутину за полезное обсуждение результатов проведенного исследования.

## Список литературы

- [1] ЗАБАБАХИН Е.И., ЗАБАБАХИН И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988.
- [2] ЗАБАБАХИН И.Е., СИМОНЕНКО В.А. Сферическая центрированная волна сжатия // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 3. С. 573–576.
- [3] HUGONIOU P.H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et sp'ecialement dans les gaz parfaits. II // J. l'Ecole Polytechnique. 1889. No. 5. P. 1–125.
- [4] LORD RAYLEIGH (STRUTT J.W.) Aerial plane of finite amplitude // Proc. Royal Soc. London. 1910. Vol. 84A. P. 247–284.
- [5] СТАНЮКОВИЧ К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1955.
- [6] КАЖДАН Я.М. К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1977. № 1. С. 23–30.
- [7] КАЖДАН Я.М. Адиабатическое сжатие газа под действием цилиндрического поршня. М., 1980. (Препр. Института прикладной математики им. М.В. Келдыша; № 56).
- [8] СВАЛОВ А.М. Пример точного решения задачи сжатия газа сферической оболочкой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 6. С. 176–179.
- [9] АНДРЕЕВ В.К. О сферически-симметричном сжатии газа слоем вязкой жидкости // Тр. III Междунар. конф. “Симметрия и дифференциальные уравнения”. Красноярск: Ин-т вычисл. моделирования СО РАН, 2002. С. 10–13.
- [10] СИДОРОВ А.Ф. Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном сжатии газа // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 3. С. 548–552.
- [11] БАУТИН С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.
- [12] БАУТИН С.П., ДЕРЯВИН С.Л. Двумерное истечение в вакуум // Точные и приближенные методы исследования задач механики сплошной среды. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. С. 3–15.
- [13] ДЕРЯВИН С.Л. Трехмерное истечение в вакуум из состояния покоя // Численные методы механики сплошной среды. 1983. Т. 14, № 4. С. 58–73.
- [14] ДЕРЯВИН С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа // Нестационарные проблемы механики сплошных сред. 1984. Вып. 65. С. 56–74.
- [15] БАУТИН С.П. Асимптотические законы безударного сильного сжатия квазиодномерных слоев газа // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 3. С. 415–423.
- [16] КОРН Г., КОРН Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974.
- [17] РОЩУПКИН А.В. Уточненные асимптотические законы безударного сильного сжатия многомерных слоев газа // Тр. III Междунар. конф. “Симметрия и дифференциальные уравнения”. Красноярск: Ин-т вычисл. моделирования СО РАН, 2002. С. 198–201.

*Поступила в редакцию 16 июня 2010 г.,  
с доработки — 23 августа 2010 г.*