

Численные алгоритмы моделирования кавитационных течений вязкой жидкости*

Л.В. ПАНОВ, Д.В. ЧИРКОВ, С.Г. ЧЁРНЫЙ

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: panovleonid62007@yandex.ru

Предложены численные алгоритмы расчета нестационарных трехмерных кавитационных течений вязкой жидкости, базирующиеся на баротропной модели и на моделях с уравнением переноса фазы. Сформулированы правила явно-неявной аппроксимации нелинейных источников членов, улучшающие сходимость. Проведено сравнение построенных алгоритмов с экспериментом на модельной задаче, которое дало хорошие результаты. Исследовано влияние плотности пара на точность решения, форму и размеры каверны.

Ключевые слова: численное моделирование, кавитационные течения жидкости, баротропная модель.

Введение

При работе многих гидродинамических устройств, таких как насосы, гидротурбины, гребные винты, наблюдается явление кавитации — образование пара в потоке жидкости в областях, где давление меньше давления насыщенных паров при данной температуре $p < p_v$. Кавитация приводит к снижению мощности и пропускной способности установки, вызывает повышенную вибрацию и эрозию обтекаемых поверхностей. Для изучения механизмов устранения этого явления актуальна задача моделирования кавитационных течений. Выделяются два качественно различных подхода к численному моделированию кавитационных течений на основе уравнений Навье — Стокса.

Первый подход будем называть методом выделения границы жидкость — пар. Метод состоит в нахождении границы, разделяющей области жидкости и пара и в решении уравнений движения несжимаемой жидкости в области, занятой жидкостью [1, 2]. Метод выделения границы жидкость — пар неплохо подходит для описания пленочной кавитации вблизи тела, однако имеет ряд недостатков, среди которых — необходимость перестроения сетки на каждом шаге, сложность распространения на задачи моделирования трехмерных течений [2] и течений с отрывом паровых каверн.

В последнее время чаще используют второй подход — метод разрешения границы жидкость — пар. Данный метод состоит в моделировании движения сжимаемой смеси, состоящей из жидкой и паровой фаз. При этом во всей области течения решаются уравнения Навье — Стокса динамики сжимаемой смеси, которые замыкаются дополнительным соотношением для определения плотности смеси ρ , в зависимости от которого выделяют две группы моделей — баротропные и модели с уравнением переноса

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00475).

объемной (или массовой) доли одной из фаз. В баротропных моделях [3–5] система Навье—Стокса сжимаемой смеси замыкается с помощью уравнения состояния

$$\rho = \rho(p). \quad (1)$$

Такие модели в целом неплохо описывают динамику смеси, однако имеют ряд недостатков. Так, в них предполагается, что (а) между испарением и конденсацией равновесие устанавливается мгновенно, (б) плотность смеси зависит только от давления; кроме того, для них отсутствует строго обоснованное уравнение состояния.

В последнее десятилетие широко применяются модели с уравнением переноса фазы (УПФ). В них для замыкания системы Навье—Стокса используется дополнительное уравнение переноса объемной (или массовой) доли жидкой (или паровой) фазы, а плотность смеси восстанавливается по формуле

$$\rho = \alpha_L \rho_L + (1 - \alpha_L) \rho_V, \quad (2)$$

где α_L — объемная доля жидкой фазы, ρ_L — плотность жидкости, ρ_V — плотность пара. Уравнение переноса имеет вид

$$\frac{\partial \alpha_L}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_L u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho_L} (m^+ + m^-), \quad (3)$$

где источники m^+ , m^- описывают соответственно процесс конденсации пара и испарения жидкости. Таким образом, модели с УПФ учитывают неравновесность процессов испарения и конденсации и влияние инерционных сил на динамику паровой каверны. В литературе предложено несколько подобных моделей [6–9], различающихся лишь видом источниковых слагаемых m^+ и m^- . В [10] приводится подробный сравнительный анализ моделей с УПФ и делается вывод, что все модели дают качественно схожие результаты. Недостатки моделей с УПФ — наличие эмпирических констант в выражениях для m^+ и m^- и существенное возрастание источникового члена при $\rho_V/\rho_L \ll 1$, что является причиной неустойчивости расчетов.

В большинстве практических задач область кавитации мала по сравнению со всей рассматриваемой областью течения жидкости. Поэтому для решения уравнений кавитационных течений адаптируют численные методы, хорошо зарекомендовавшие себя при расчете течений несжимаемой жидкости, такие как SIMPLE [6, 8, 9], либо основанные на методе искусственной сжимаемости [7].

В настоящей работе на основе численного алгоритма из [11], базирующегося на неявном методе искусственной сжимаемости, предложены численные алгоритмы расчета пространственных кавитационных течений для баротропной модели и для модели с УПФ. За счет совместного решения уравнений движения и УПФ, специальной явно-неявной аппроксимации источникового члена, а также введения релаксации удалось частично решить проблему сходимости при малой ρ_V . Проведено тестирование построенных алгоритмов на задаче обтекания затупленного по сфере цилиндра. Численный алгоритм построен для трехмерных течений в турбомашинах, однако его тестирование было проведено на модельной задаче обтекания затупленного цилиндра, и в работе изложены именно эти результаты.

1. Основные уравнения

1.1. Уравнения движения

Для моделирования движения смеси, состоящей из жидкой и паровой фаз, будем использовать осредненные по Фавру уравнения Навье — Стокса для изотермической гомогенной среды с переменной плотностью:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla \hat{p} = \operatorname{div}(\tau) + \rho \mathbf{f}. \quad (5)$$

Здесь ρ — плотность смеси, кг/м³; \mathbf{v} — скорость, м/с; t — время, с; $\hat{p} = p + \frac{2}{3}\rho k$, p — давление, Па; k — кинетическая энергия турбулентных пульсаций, м²/с²; \mathbf{f} — вектор массовых сил; $\tau = \tau_{ij}$ — тензор вязких напряжений

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_T) \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right],$$

где μ_T — коэффициент турбулентной вязкости смеси, μ — динамический коэффициент вязкости смеси, вычисляемый по формуле

$$\mu = \alpha_L \mu_L + (1 - \alpha_L) \mu_V,$$

в которой μ_L, μ_V — динамические коэффициенты вязкости жидкости и насыщенного пара соответственно. При $T = 17$ °С для воды $\mu_L = 10^{-3}$ Па · с; для насыщенного пара $\mu_V = 10^{-5}$ Па · с.

Коэффициент турбулентной вязкости вычисляется по формуле $\mu_T = C_\mu \rho k^2 / \varepsilon$, где параметры k и ε рассчитываются по стандартной $k - \varepsilon$ -модели турбулентности с логарифмическими пристеночными функциями.

1.2. Модель кавитации

Для замыкания системы уравнений (4)–(5) необходимо задать уравнение для определения плотности смеси ρ .

1.2.1. Баротропная модель

В баротропных моделях предполагается, что плотность смеси может быть найдена по давлению через уравнения состояния (1). В [5] в качестве зависимости $\rho(p)$ предлагается использовать функцию, имеющую S -образный график с максимальным наклоном в точке $p = p_V$:

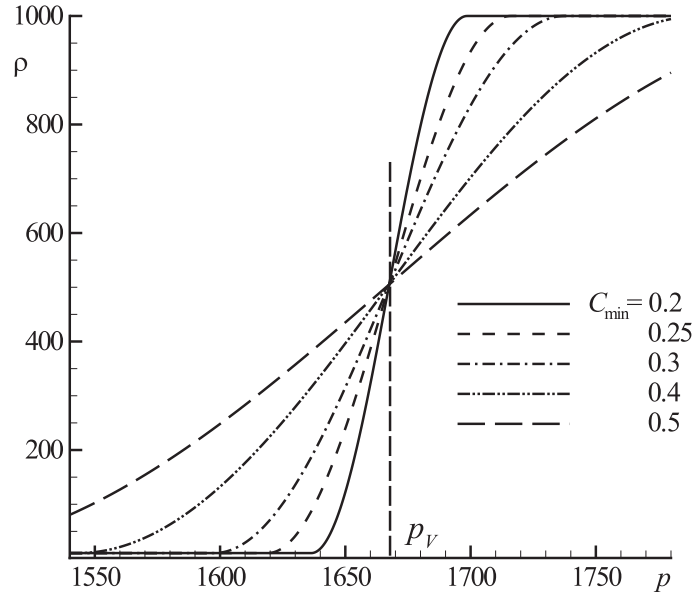
$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_{p=p_V} = \frac{1}{C_{\min}^2},$$

где C_{\min} — скорость звука смеси. В [5] рекомендуется брать $C_{\min} = 1 \div 2$ м/с.

В настоящей работе предлагается следующий баротропный закон:

$$\rho(p) = \begin{cases} \rho_V, & \phi < -\pi/2, \\ (\rho_L - \rho_V)/2 \sin \phi + (\rho_L + \rho_V)/2, & -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, \\ \rho_L, & \phi > \pi/2. \end{cases} \quad \phi = \frac{p - p_V}{C_{\min}^2 (\rho_L - \rho_V) / 2}. \quad (6)$$

Конкретный вид этого закона определяется параметром C_{\min} (рис. 1).

Рис. 1. Зависимость баротропного закона (6) от C_{\min}

1.2.2. Модели с УПФ

Более полными являются модели, основанные на уравнении переноса массовой или объемной доли одной из фаз. В литературе встречается около 10 различных моделей, записанных для массовой или объемной доли жидкости или пара [6–10]. Для всех этих моделей плотность смеси ρ восстанавливается по одной из формул:

$$\rho = \rho_L \alpha_L + \rho_V \alpha_V, \quad \alpha_L + \alpha_V = 1 \quad (7)$$

или

$$\frac{1}{\rho} = \frac{f_L}{\rho_L} + \frac{f_V}{\rho_V}, \quad f_L + f_V = 1, \quad (8)$$

где α_L — объемная доля жидкости; α_V — объемная доля пара; f_L — массовая доля жидкости; f_V — массовая доля пара. Объемные и массовые доли, как легко видеть, связаны следующим образом:

$$\alpha_L = f_L \frac{\rho}{\rho_L}, \quad \alpha_V = f_V \frac{\rho}{\rho_V}.$$

Эти модели путем несложных преобразований могут быть записаны в универсальной форме (3) для α_L и различаться только видом источниковых членов m^+ и m^- , отвечающих за конденсацию и испарение. В настоящей работе используются четыре наиболее распространенные модели, источниковые члены m^+ и m^- которых представлены в таблице (здесь $t_\infty = \frac{L_{\text{хар}}}{U_\infty}$ — характерный временной масштаб, $L_{\text{хар}}$ — характерная длина, U_∞ — характерная скорость на большом удалении от тела). Заметим, что во всех моделях выполняются неравенства

$$m^+ = m^+(p, \alpha_L) \geq 0, \quad m^- = m^-(p, \alpha_L) \leq 0.$$

Эмпирические константы C_{prod} и C_{dest} имеют смысл соответственно скорости продуцирования жидкости (конденсации) и скорости разрушения жидкости (испарения).

Источниковые члены для моделей с УПФ

Модель	m^+	m^-	Константы
Модель 1 [6]	$\frac{C_{\text{prod}} \max[p - p_V, 0] (1 - \alpha_L) \rho_L}{t_\infty (\rho_L U_\infty^2 / 2)}$	$\frac{C_{\text{dest}} \min[0, p - p_V] \rho_L^2 \alpha_L}{\rho_V t_\infty (\rho_L U_\infty^2 / 2)}$	$C_{\text{prod}} = 80$ $C_{\text{dest}} = 1$
Модель 2 [7]	$\frac{C_{\text{prod}} (1 - \alpha_L) \alpha_L^2 \rho_V}{t_\infty \rho_L}$	$\frac{C_{\text{dest}} \alpha_L \min[0, p - p_V] \rho_V}{(\rho_L U_\infty^2 / 2) t_\infty \rho_L}$	$C_{\text{prod}} = 100$ $C_{\text{dest}} = 100$
Модель 3 [8]	$C_{\text{prod}} U_\infty \rho_L^2 \left[\frac{2p - p_V}{3 \rho_L} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - \alpha_L) \rho_V}{\rho}$	$-C_{\text{dest}} U_\infty \rho_L \rho_V \left[\frac{2p - p_V}{3 \rho_L} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha_L \rho_L}{\rho}$	$C_{\text{prod}} = 0.137$ $C_{\text{dest}} = 0.274$
Модель 4 [9]	$\frac{\rho_L \max[p - p_V, 0] (1 - \alpha_L)}{t_\infty (\rho_L - \rho_V) (V_{I,n} - V_{V,n})^2}$	$\frac{\rho_L^2 \min[0, p - p_V] \alpha_L}{\rho_V t_\infty (\rho_L - \rho_V) (V_{I,n} - V_{V,n})^2}$	—

В модели 4 [9] $V_{I,n}$ — скорость интерфейса, $V_{V,n}$ — скорость паровой фазы по нормали к интерфейсу, $V_{V,n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n} = \frac{\nabla \alpha_L}{|\nabla \alpha_L|}$. Для нестационарной кавитации скорость интерфейса вычисляется в процессе счета, для стационарной постановки в работе [9]

предлагается формула $V_{I,n} = \frac{V_{V,n} - \frac{\rho_L}{\rho_V} V_{L,n}}{1 - \frac{\rho_L}{\rho_V}}$, где $V_{L,n}$ — скорость жидкой фазы в направлении нормали к интерфейсу. Для ее вычисления предлагается формула $V_{L,n} = f \cdot V_{V,n}$, где $f = 0.9$. Заметим, что модель 1 [6] переходит в модель 4 [9], если произвести замену

$$\frac{C_{\text{prod}}}{\rho_L U_\infty^2 / 2} \rightarrow \frac{1}{(\rho_L - \rho_V) (V_{I,n} - V_{V,n})^2}, \quad \frac{C_{\text{dest}}}{\rho_L U_\infty^2 / 2} \rightarrow \frac{1}{(\rho_L - \rho_V) (V_{I,n} - V_{V,n})^2}.$$

2. Численный метод

В этом разделе вначале рассмотрим численный метод решения уравнений движения (4)–(5) и модели кавитации с УПФ (3), а затем численный метод для баротропной модели (4)–(5) и (1).

2.1. Численный метод для моделей с УПФ

2.1.1. Метод искусственной сжимаемости

Используя уравнение переноса (3) и соотношение (2), уравнение неразрывности (4) преобразуем к виду

$$\text{div}(\mathbf{v}) = (m^+ + m^-) \left(\frac{1}{\rho_L} - \frac{1}{\rho_V} \right). \quad (9)$$

Решение уравнений (9), (5) и (3) основано на методе искусственной сжимаемости, согласно которому в каждое из этих уравнений добавляется производная неизвестной функции (\hat{p} , u_i или α_L) по псевдовремени τ и полученная система решается методом установления по τ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \tau} + \frac{\partial \beta u_j}{\partial x_j} = \beta (m^+ + m^-) \left(\frac{1}{\rho_L} - \frac{1}{\rho_V} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\alpha_L}{\rho\beta}\right) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \tau} + \frac{\partial \alpha_L}{\partial \tau} + \frac{\partial \alpha_L}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_L u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho_L} (m^+ + m^-). \quad (12)$$

Заметим, что изначально на каждой итерации совместно решались четыре уравнения (10)–(11), а затем решалось уравнение (12) (без слагаемого $\left(\frac{\alpha_L}{\rho\beta}\right) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \tau}$). Однако такой численный алгоритм имел низкую скорость сходимости. Существенно улучшить сходимость позволило совместное решение (10)–(12). Первое слагаемое в уравнении переноса α_L (12) гарантирует совместность (непротиворечивость) уравнений (10) и (12) при расчете предельного случая течения жидкости ($\alpha_L = 1$, $m^+ = 0$, $m^- = 0$), при котором (10) и (12) совпадают [7].

Систему уравнений (10)–(12) можно переписать в векторной форме

$$\mathbf{M} \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \tau} + \mathbf{R}^t \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = \mathbf{H}, \quad (13)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/\rho & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \frac{\alpha_L}{\rho\beta} & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \alpha_L \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \beta u_i \\ \rho u_1 u_i + \delta_{1i} \hat{p} - \tau_{1i} \\ \rho u_2 u_i + \delta_{2i} \hat{p} - \tau_{2i} \\ \rho u_3 u_i + \delta_{3i} \hat{p} - \tau_{3i} \\ \alpha_L u_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \beta \left(\frac{1}{\rho_L} - \frac{1}{\rho_V} \right) (m^+ + m^-) \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \\ \frac{1}{\rho_L} (m^+ + m^-) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}^t = \text{diag}(0, 1, 1, 1, 1).$$

В (13) можно перейти к простейшим переменным $\mathbf{Q} = (\hat{p}, u_1, u_2, u_3, \alpha_L)^T$

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \mathbf{R}^t \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = \mathbf{H}, \quad (14)$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{M} \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} & & & & \\ & \rho & & & \\ & & \rho & & \\ & & & \rho & \\ \frac{\alpha_L}{\rho\beta} & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.2. Дискретизация неявным методом конечных объемов

Дискретизация (14) осуществляется согласно методике, предложенной в работе [11]. Для построения консервативной разностной схемы система (14) представляется в форме интегральных законов сохранения

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \mathbf{Q} dV + \mathbf{R}^t \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{\mathbf{Q}} dV + \oint_{\partial V} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{H} dV, \quad (15)$$

где $\mathbf{K} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)$, ∂V — замкнутая поверхность произвольного фиксированного объема V , $d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS = (dS_1, dS_2, dS_3)$ — элемент поверхности S , умноженный на единичную внешнюю нормаль \mathbf{n} к ней. Вектор потоков представляется как сумма невязкого и вязкого потоков

$$\mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{K}^{in} + \mathbf{K}^{vis}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (16)$$

$$\mathbf{K}^{in} = \begin{pmatrix} \beta u_1 & \beta u_2 & \beta u_3 \\ \rho u_1^2 + \hat{p} & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 \\ \rho u_2 u_1 & \rho u_2^2 + \hat{p} & \rho u_2 u_3 \\ \rho u_3 u_1 & \rho u_3 u_2 & \rho u_3^2 + \hat{p} \\ \alpha_L u_1 & \alpha_L u_2 & \alpha_L u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{vis} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Введем следующие обозначения для векторов \mathbf{Q} , $\bar{\mathbf{Q}}$ и \mathbf{H} , усредненных по ячейке (i, j, k) с объемом V_{ijk} :

$$\mathbf{Q}_{ijk} = \frac{1}{V_{ijk}} \int_{V_{ijk}} \mathbf{Q} dV, \quad \bar{\mathbf{Q}}_{ijk} = \frac{1}{V_{ijk}} \int_{V_{ijk}} \bar{\mathbf{Q}} dV, \quad \mathbf{H}_{ijk} = \frac{1}{V_{ijk}} \int_{V_{ijk}} \mathbf{H} dV,$$

и отнесем их к центру ячейки.

Пусть n, s — номера слоя соответственно по времени и псевдовремени. Аппроксимируем интегральное уравнение (15) полностью неявной по псевдовремени разностной схемой

$$\left[\mathbf{P}^{-1} ((\mathbf{Q}^{n+1})^s) \frac{(\mathbf{Q}^{n+1})^{s+1} - (\mathbf{Q}^{n+1})^s}{\Delta \tau} + \mathbf{R}^t \frac{3(\bar{\mathbf{Q}}^{n+1})^{s+1} - 4\bar{\mathbf{Q}}^n + \bar{\mathbf{Q}}^{n-1}}{2\Delta t} \right] V_{ijk} = (\mathbf{RHS}^{n+1})^{s+1}, \quad (18)$$

где $\Delta \tau$ — шаг по псевдовремени, Δt — шаг по времени. При сходимости итераций по псевдовремени получим полностью неявную схему, аппроксимирующую исходные уравнения (9), (5) и (3) со вторым порядком по времени t . Порядок аппроксимации по пространству определяется способом вычисления потоков правой части \mathbf{RHS} , которая имеет вид

$$\mathbf{RHS} = -((\mathbf{K} \cdot \mathbf{S})_{i+1/2} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{S})_{i-1/2} + (\mathbf{K} \cdot \mathbf{S})_{j+1/2} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{S})_{j-1/2} + (\mathbf{K} \cdot \mathbf{S})_{k+1/2} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{S})_{k-1/2}) + \mathbf{H}V, \quad (19)$$

где $(\mathbf{K} \cdot \mathbf{S})_{i+1/2}$, $(\mathbf{K} \cdot \mathbf{S})_{j+1/2}$, $(\mathbf{K} \cdot \mathbf{S})_{k+1/2}$ представляют собой разностные потоки (невязкие и вязкие) через грани $(i+1/2, j, k)$, $(i, j+1/2, k)$, $(i, j, k+1/2)$ ячейки с номером (i, j, k) и объемом V_{ijk} . Способ аппроксимации и алгоритм вычисления вязких потоков описан в [11] и заимствован из этой работы. Рассмотрим подробно аппроксимацию невязких потоков.

2.1.3. Аппроксимация невязки потоков

Для вычисления невязки потоков будем использовать схему MUSCL. В [12] показано, что при решении предобусловленных уравнений для повышения точности решения следует модифицировать диссипативный член. Модификация состоит в замене матрицы $|\mathbf{A}|$ на матрицу $\mathbf{P}^{-1}|\mathbf{PA}|$

$$(\mathbf{K}^{in} \cdot \mathbf{S})_{m+1/2} = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{K}^{in}(\mathbf{Q}_L) + \mathbf{K}^{in}(\mathbf{Q}_R)) \mathbf{S}_{m+1/2} - \mathbf{P}_{m+1/2}^{-1} |\mathbf{PA}|_{m+1/2} (\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L) \right], \quad (20)$$

где \mathbf{PA} — модифицированная матрица Якоби невязкого потока

$$\mathbf{PA}(\mathbf{Q}) = \mathbf{P} \frac{\partial(\mathbf{K}^{in}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S})}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \rho S_x & \beta \rho S_y & \beta \rho S_z & 0 \\ \frac{S_x}{\rho} & U + u_1 S_x & u_1 S_y & u_1 S_z & 0 \\ \frac{S_y}{\rho} & u_2 S_x & U + u_2 S_y & u_2 S_z & 0 \\ \frac{S_z}{\rho} & u_3 S_x & u_3 S_y & U + u_3 S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U \end{pmatrix},$$

$$U = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} = u_1 S_x + u_2 S_y + u_3 S_z.$$

При нахождении $|\mathbf{PA}| = (\mathbf{PA})^+ - (\mathbf{PA})^-$ применяется расщепление по знакам собственных значений

$$(\mathbf{PA})^\pm = \mathbf{RD}^\pm \mathbf{L}, \quad \mathbf{D}^\pm = \text{diag}(\lambda_1^\pm, \lambda_2^\pm, \lambda_3^\pm, \lambda_4^\pm, \lambda_5^\pm), \quad \lambda_i^\pm = \frac{1}{2}(\lambda_i \pm |\lambda_i|).$$

Собственные значения матрицы \mathbf{PA}

$$\lambda_{1,2} = U, \quad \lambda_{3,4} = U \pm \sqrt{U^2 + \beta |\mathbf{S}|^2}, \quad \lambda_5 = U.$$

Матрицы правых и левых собственных векторов матрицы \mathbf{PA} при $S_x \neq 0$ имеют вид

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \rho c & \beta \rho c & 0 \\ -S_z & -S_y & u(U+c) + \beta S_x & u(U-c) + \beta S_x & 0 \\ 0 & S_x & v(U+c) + \beta S_y & v(U-c) + \beta S_y & 0 \\ S_x & 0 & w(U+c) + \beta S_z & w(U-c) + \beta S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{S_z U - |\mathbf{S}|^2 w}{\rho S_x c^2} - \frac{U w + \beta S_z}{c^2} & -\frac{S_y (U w + \beta S_z)}{S_x c^2} & \frac{(S_x u + S_y v) U + (S_x^2 + S_y^2) \beta}{S_x c^2} & 0 \\ \frac{S_y U - |\mathbf{S}|^2 v}{\rho S_x c^2} - \frac{U v + \beta S_y}{c^2} & \frac{(S_x u + S_z w) U + (S_x^2 + S_z^2) \beta}{S_x c^2} & -\frac{S_z (U v + \beta S_y)}{S_x c^2} & 0 \\ -\frac{U - c}{2\beta \rho c^2} & \frac{S_x}{2c^2} & \frac{S_y}{2c^2} & \frac{S_z}{2c^2} & 0 \\ -\frac{U + c}{2\beta \rho c^2} & \frac{S_x}{2c^2} & \frac{S_y}{2c^2} & \frac{S_z}{2c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $S_x = 0$ необходимо модифицировать первые два столбца матрицы \mathbf{R} и первые две строки матрицы \mathbf{L} . Однако в окончательном алгоритме \mathbf{R} и \mathbf{L} в явном виде не используются, вместо них применяются формулы рационального вычисления потоков, о чем будет сказано ниже.

В формуле (20) $(\mathbf{PA})_{m+1/2} = \mathbf{PA}((\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_R)/2)$, а векторы \mathbf{Q}_R и \mathbf{Q}_L определяются при помощи интерполяции повышенного порядка

$$\mathbf{Q}_L = \mathbf{Q}_m + \left[(1 - \theta)\Delta_{m-1/2}\mathbf{Q} + (1 + \theta)\Delta_{m+1/2}\mathbf{Q} \right] / 4,$$

$$\mathbf{Q}_R = \mathbf{Q}_{m+1} - \left[(1 - \theta)\Delta_{m+1/2}\mathbf{Q} + (1 + \theta)\Delta_{m+3/2}\mathbf{Q} \right] / 4,$$

что при $\theta = 1/3$ дает третий порядок аппроксимации невязких потоков на гладких решениях.

При вычислении потоков по формуле (20) требуется перемножение матриц \mathbf{R} , \mathbf{D}^\pm , \mathbf{L} , отнимающее значительную часть времени счета. В работе [11] при построении схемы для уравнений Навье—Стокса несжимаемой жидкости получены формулы рационального вычисления потоков через грани ячейки, не требующие дорогостоящих перемножений матриц. Использование этих формул позволило сократить время счета на 30 % и упростить программную реализацию. Оказывается, в случае системы с переменной плотностью также удастся получить формулы рационального вычисления потоков в (20). Так, в случае $U \geq 0$ поток (20) равен

$$(\mathbf{K}^{in} \cdot \mathbf{S})_{m+1/2} = \begin{pmatrix} \beta U_L \\ \rho_L u_L U_L + \hat{p}_L S_x + b(u_R - u_L) \\ \rho_L v_L U_L + \hat{p}_L S_y + b(v_R - v_L) \\ \rho_L w_L U_L + \hat{p}_L S_z + b(w_R - w_L) \\ (\alpha_L)_L U_L \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -\beta c \\ \rho(u(U - c) + \beta S_x) \\ \rho(v(U - c) + \beta S_y) \\ \rho(w(U - c) + \beta S_z) \\ -\alpha_L c \end{pmatrix},$$

$$b = \frac{1}{8}(\hat{p}_R - \hat{p}_L)(U_R - U_L), \quad a = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{S^2(\hat{p}_R - \hat{p}_L)}{\rho} + (U - c)(U_R - U_L) \right).$$

Значения переменных, у которых индексы R или L не указаны, вычисляются как среднее арифметическое $\varphi = (\varphi_L + \varphi_R)/2$.

2.1.4. Явно- неявная аппроксимация источникового члена

Представим источниковый член \mathbf{H} системы (14) в виде

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \\ h_\alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} h_1^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_\alpha^+ \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}^+} + \underbrace{\begin{pmatrix} h_1^- \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_\alpha^- \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}^-} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}_f},$$

где введены обозначения

$$h_\alpha^\pm = \frac{1}{\rho_L} m^\pm, \quad h_1^\pm = \beta \left(\frac{1}{\rho_L} - \frac{1}{\rho_V} \right) m^\pm.$$

Источник \mathbf{H}^{s+1} можно аппроксимировать по-разному, в общем случае в виде

$$\mathbf{H}^{s+1} = \mathbf{H}^s + \mathbf{G}^s(\mathbf{Q}^{s+1} - \mathbf{Q}^s), \quad (21)$$

где полностью явная аппроксимация соответствует $\mathbf{G} = 0$, а полностью неявная — выбору

$$\mathbf{G} = \frac{\partial(\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-)}{\partial\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(h_1^+ + h_1^-)}{\partial p} & & \frac{\partial(h_1^+ + h_1^-)}{\partial\alpha_L} \\ & 0 & \\ & & 0 \\ \frac{\partial(h_\alpha^+ + h_\alpha^-)}{\partial p} & & \frac{\partial(h_\alpha^+ + h_\alpha^-)}{\partial\alpha_L} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Известно [11], что для увеличения запаса устойчивости численного алгоритма все слагаемые в источнике, имеющие отрицательные коэффициенты при искомым переменных, нужно аппроксимировать неявно. В случае нелинейного источникового члена необходимо анализировать знак частной производной. Численные эксперименты с моделями 1 [6] и 2 [7] показали, что применительно к специфике нелинейных источниковых членов моделей кавитации справедливы следующие два правила явно-неявной аппроксимации источника, позволяющие значительно повысить устойчивость численного алгоритма (см. ниже рис. 6):

1) отрицательные частные производные источника, находящиеся на главной диагонали матрицы \mathbf{G} , необходимо аппроксимировать неявно;

2) частные производные от источника, находящиеся на побочной диагонали матрицы \mathbf{G} , можно аппроксимировать явно или неявно, поскольку они на сходимость не влияют.

Применяя эти правила при аппроксимации источника модели 1 [6] с учетом того, что для нее

$$\frac{\partial h_1^+}{\partial p} \leq 0, \quad \frac{\partial h_1^-}{\partial p} \leq 0, \quad \frac{\partial h_\alpha^+}{\partial\alpha_L} \leq 0, \quad \frac{\partial h_\alpha^-}{\partial\alpha_L} \leq 0,$$

получим, что для данной модели в (21) в качестве матрицы \mathbf{G}^s достаточно взять

$$\mathbf{G} = \text{diag} \left(\frac{\partial(h_1^+ + h_1^-)}{\partial p}, 0, 0, 0, \frac{\partial(h_\alpha^+ + h_\alpha^-)}{\partial\alpha_L} \right).$$

По этим же правилам аппроксимируются источниковые члены для остальных моделей с УПФ.

2.1.5. Реализация

С использованием подходов [11] схема (18) линеаризуется по методу Ньютона, затем производится LU-факторизация неявного оператора и схема разрешается за два дробных шага бегущим счетом.

Численный алгоритм модели с УПФ плохо сходится при малых значениях плотности пара ρ_V . Для улучшения свойств сходимости проводится релаксация источникового члена \mathbf{H}^+ и неизвестной переменной α_L по формулам

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{H}}^+)^s &= \gamma_1 \cdot (\mathbf{H}^+)^s + (1 - \gamma_1) \cdot (\tilde{\mathbf{H}}^+)^{s-1}, \\ \tilde{\alpha}_L^s &= \gamma_2 \cdot \alpha_L^s + (1 - \gamma_2) \cdot \tilde{\alpha}_L^{s-1} \end{aligned}$$

с коэффициентами $\gamma_1 = 0.001$, $\gamma_2 = 0.2$.

2.2. Численный метод для баротропной модели

При построении численного алгоритма для баротропной модели используются те же методы и подходы, что и для модели с УПФ. Отметим основные особенности, имеющие место в этом случае.

2.2.1. Метод искусственной сжимаемости. Дискретизация

Согласно методу искусственной сжимаемости уравнения движения (4), (5) и баротропной модели (1) преобразуются к виду

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \beta \rho u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (24)$$

$$\rho = \rho(p). \quad (25)$$

Систему уравнений (23)–(25) перепишем в векторной форме и перейдем к простейшим переменным $\mathbf{Q} = (\hat{p}, u, v, w)^T$

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = \mathbf{H}, \quad (26)$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \rho & & \\ & & \rho & \\ & & & \rho \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \beta \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + \delta_{1i} \hat{p} - \tau_{1i} \\ \rho u_2 u_i + \delta_{2i} \hat{p} - \tau_{2i} \\ \rho u_3 u_i + \delta_{3i} \hat{p} - \tau_{3i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \end{pmatrix}.$$

Дискретизируем систему (26) неявным методом конечных объемов. Формулы (15), (18) распространяются на случай баротропной модели с заменой матрицы \mathbf{R}^t на единичную матрицу:

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \mathbf{Q} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{\mathbf{Q}} dV + \oint_{\partial V} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{H} dV,$$

$$\left[\mathbf{P}^{-1} ((\mathbf{Q}^{n+1})^s) \frac{(\mathbf{Q}^{n+1})^{s+1} - (\mathbf{Q}^{n+1})^s}{\Delta \tau} + \frac{3(\bar{\mathbf{Q}}^{n+1})^{s+1} - 4\bar{\mathbf{Q}}^n + \bar{\mathbf{Q}}^{n-1}}{2\Delta t} \right] V_{ijk} = (\mathbf{RHS}^{n+1})^{s+1}.$$

Общий вид правой части (19) не изменится. Невязкий поток в данном случае отличается от невязкого потока (17) только в первом столбце:

$$\mathbf{K}^{in} = \begin{pmatrix} \beta \rho u_1 & \beta \rho u_2 & \beta \rho u_3 \\ \rho u_1^2 + \hat{p} & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 \\ \rho u_2 u_1 & \rho u_2^2 + \hat{p} & \rho u_2 u_3 \\ \rho u_3 u_1 & \rho u_3 u_2 & \rho u_3^2 + \hat{p} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

2.2.2. Аппроксимация невязки потоков

Для баротропной модели невязкие потоки также будем аппроксимировать по схеме MUSCL (20). Заметим, что при вычислении матрицы Якоби \mathbf{PA} потока $\mathbf{K}^{in} \cdot \mathbf{S}$, где \mathbf{K}^{in} имеет вид (27), учтена зависимость $\rho = \rho(p)$ баротропного закона. Предварительные расчеты показали, что это позволило существенно повысить устойчивость и точность численного решения по сравнению с вариантом, где при дифференцировании $\mathbf{K}^{in} \cdot \mathbf{S}$ плотность ρ не учитывается. Итак, введем обозначения и выпишем модифицированную матрицу Якоби \mathbf{PA} :

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} \frac{\beta CU}{CUu + S_x} & \beta \rho S_x & \beta \rho S_y & \beta \rho S_z \\ \frac{\rho}{CUv + S_y} & U + uS_x & uS_y & uS_z \\ \frac{\rho}{CUw + S_z} & vS_x & U + vS_y & vS_z \\ \frac{\rho}{\rho} & wS_x & wS_y & U + wS_z \end{pmatrix}.$$

Эта матрица обладает действительными собственными значениями

$$\lambda_{1,2} = U, \quad \lambda_{3,4} = U + U_\rho \pm d, \quad d = \sqrt{U^2 + U_\rho^2 + \beta \mathbf{S}^2}, \quad U_\rho = \beta CU/2, \quad C = \frac{\partial \rho}{\partial p}.$$

Были получены матрицы правых и левых собственных векторов с учетом зависимости $\rho = \rho(p)$ баротропного закона

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \rho (U_\rho - d) & \beta \rho (U_\rho + d) \\ -S_z & -S_y & u(U_\rho + U + d) + \beta S_x & u(U_\rho + U - d) + \beta S_x \\ 0 & -S_y & v(U_\rho + U + d) + \beta S_y & v(U_\rho + U - d) + \beta S_y \\ -S_x & 0 & w(U_\rho + U + d) + \beta S_z & w(U_\rho + U - d) + \beta S_z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{S_z U - |\mathbf{S}|^2 w}{\rho S_x c^2} & \frac{Uw + \beta S_z}{c^2} & \frac{S_y (Uw + \beta S_z)}{S_x c^2} & \frac{(S_x u + S_y v)U + (S_x^2 + S_y^2)\beta}{S_x c^2} \\ \frac{S_y U - |\mathbf{S}|^2 v}{\rho S_x c^2} & \frac{Uv + \beta S_y}{c^2} & \frac{(S_x u + S_z w)U + (S_x^2 + S_z^2)\beta}{S_x c^2} & \frac{S_z (Uv + \beta S_y)}{S_x c^2} \\ -\frac{U(d - U_\rho) - c^2}{2\beta d \rho c^2} & \frac{S_x (d - U_\rho)}{2dc^2} & \frac{S_y (d - U_\rho)}{2dc^2} & \frac{S_z (d - U_\rho)}{2dc^2} \\ -\frac{U(d + U_\rho) + c^2}{2\beta d \rho c^2} & \frac{S_x (d + U_\rho)}{2dc^2} & \frac{S_y (d + U_\rho)}{2dc^2} & \frac{S_z (d + U_\rho)}{2dc^2} \end{pmatrix}.$$

При расчете невязки потоков по схеме (20) необходимо вычислять комплексы $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{RD}^-\mathbf{L}$, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{RD}^+\mathbf{L}$ путем перемножения матриц. Однако явное перемножение матриц удается исключить, рассмотрев четыре следующих случая:

$$U \geq 0, \quad \beta S^2 \geq 2UU_\rho; \quad U \geq 0, \quad \beta S^2 < 2UU_\rho;$$

$$U < 0, \quad \beta S^2 \geq 2UU_\rho; \quad U < 0, \quad \beta S^2 < 2UU_\rho.$$

Для каждого случая получены формулы перемножения не самих матриц, а только компонент последних двух столбцов матрицы \mathbf{R} и последних двух строк матрицы \mathbf{L} . Использование этих формул уменьшает количество арифметических операций и упрощает программную реализацию.

3. Результаты расчетов

Изложенные алгоритмы построены для численного моделирования трехмерных кавитационных течений в турбомашинах, но в данной работе приводится их тестирование на модельной задаче стационарного обтекания затупленного сферой цилиндра турбулентным потоком вязкой жидкости с $Re = 1.36 \cdot 10^5$. Для этой задачи известны экспериментальные данные по распределению коэффициента C_p вдоль поверхности обтекаемого цилиндра [13]

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\rho_L U_\infty^2 / 2}. \quad (28)$$

На рис. 2 представлены расчетная область, построенная сетка размером 120×60 и граничные условия на твердой стенке, на большом удалении от цилиндра и на выходе.

Давление на выходной границе p_∞ определялось через кавитационное число

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_V}{\rho_L U_\infty^2 / 2}, \quad (29)$$

которое в эксперименте варьировалось от 0.5 (слабая кавитация) до 0.3 (интенсивная кавитация).

Если дополнительно не указано, то расчет проводился на сетке 120×60 с параметрами $\sigma = 0.4$, $\rho_V = 10$, $\Delta\tau = 0.001$ и в качестве модели транспортного уравнения использовалась модель 1 [6]; в баротропной модели принималось $C_{\min} = 0.2$. Расчеты проводились в два этапа: первый состоял из 1000 итераций расчета течения несжимаемой жидкости и необходим для получения начального приближения поля гидродинамических величин, второй — расчет течения сжимаемой смеси — проводился до сходимости итераций.

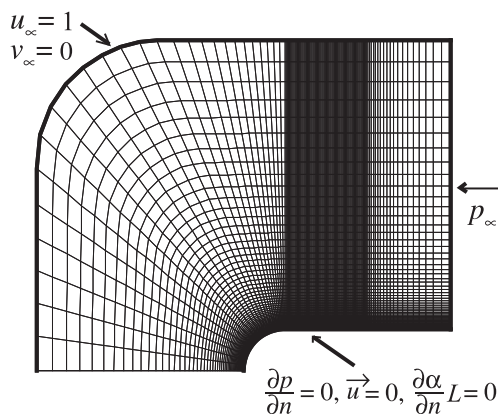


Рис. 2. Расчетная область, сетка и граничные условия

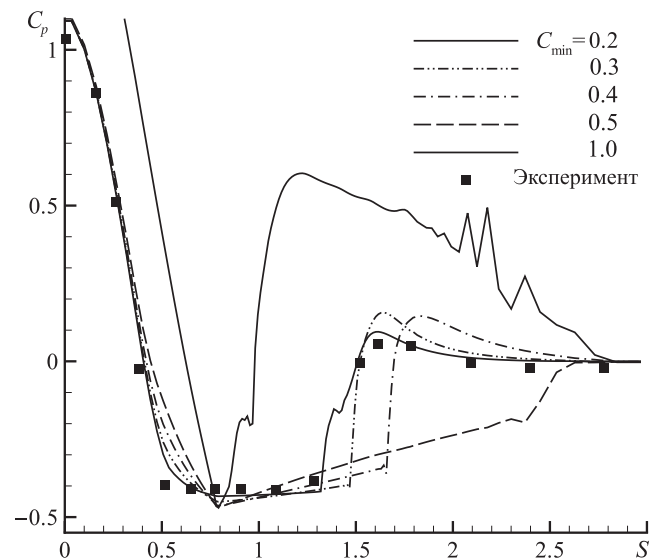


Рис. 3. Влияние параметра C_{\min} в баротропной модели на распределение C_p вдоль поверхности цилиндра

3.1. Выбор параметра в баротропной модели

Представляет интерес выяснить, как влияет параметр C_{\min} баротропного закона (6) на точность решения. В работе [5] предлагается задавать $C_{\min} = 1 \div 2$. На рис. 3 приведены распределения C_p вдоль поверхности цилиндра в зависимости от C_{\min} баротропного закона (6). Видно, что большие значения C_{\min} (в частности $C_{\min} = 1$) дают неправильное распределение C_p ; при $C_{\min} \approx 0.2 \div 0.3$ результаты расчетов уже достаточно близки к эксперименту, поэтому следует принять $C_{\min} \approx 0.2 \div 0.3$.

3.2. Влияние способа явно-неявной аппроксимации источника на сходимость

Для подтверждения правил явно-неявной аппроксимации нелинейных источников членов (см. раздел 2.1.4) проведено сравнение различных аппроксимаций источника для модели 1 [6]. Данные рис. 4 подтверждают первое правило о том, что отрицательные частные производные от источника на главной диагонали матрицы \mathbf{G} следует аппроксимировать неявно. Рисунок 5 подтверждает второе правило — производные на побочной диагонали можно аппроксимировать произвольно, сходимость при этом не меняется.

3.3. Сравнение сходимости численных алгоритмов

В алгоритмах для моделей с УПФ используется релаксация поля источника и поля α_L (см. раздел 2.1.5). Влияние релаксации на скорость сходимости показано на рис. 6. Можно заключить, что использование сильной нижней релаксации с коэффициентами $\gamma_1 = 0.001$, $\gamma_2 = 0.2$ замедляет сходимость. Однако без релаксации не удастся проводить расчеты с малыми плотностями пара $\rho_V \leq 50$, а ее применение позволяет снизить этот параметр до $\rho_V = 3$.

На рис. 7 представлено сравнение сходимости численных алгоритмов для баротропной модели и моделей с УПФ. Видно, что скорость сходимости алгоритма для баротроп-

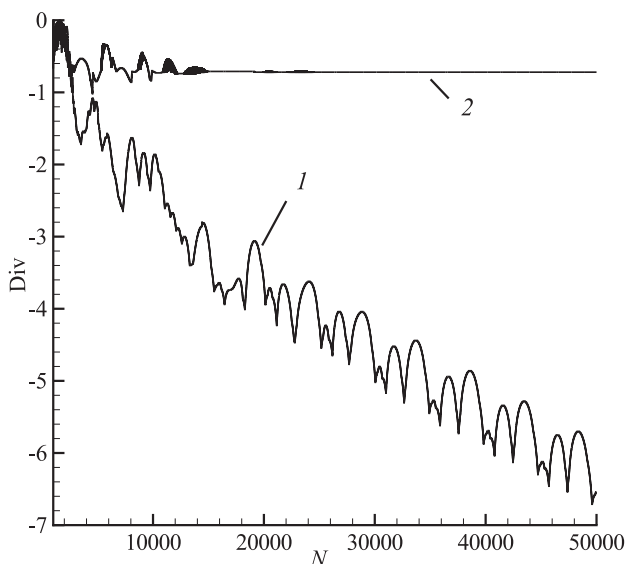


Рис. 4. Учет компонент матрицы \mathbf{G} : 1 — содержит диагональные элементы, 2 — нулевая

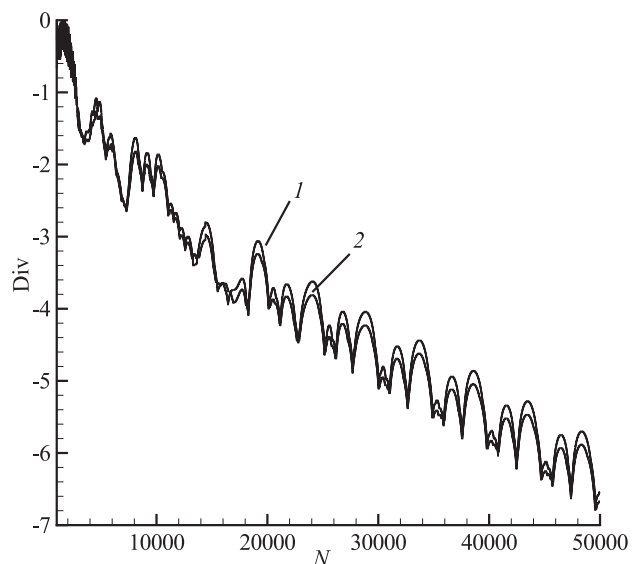


Рис. 5. Учет компонент матрицы \mathbf{G} , содержащей диагональные члены: члены на побочной диагонали матрицы присутствуют (1), нулевые (2)

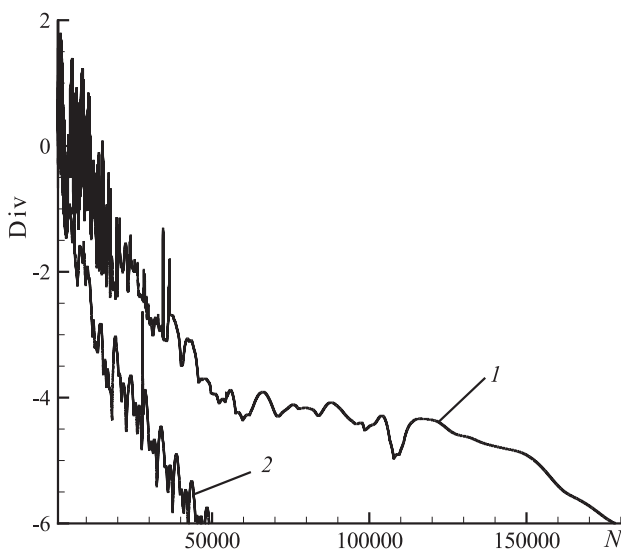


Рис. 6. Сравнение историй сходимостей численного алгоритма для модели 1 с УПФ с релаксацией источника и поля α_L (1) и без нее (2) ($\rho_V = 50$)

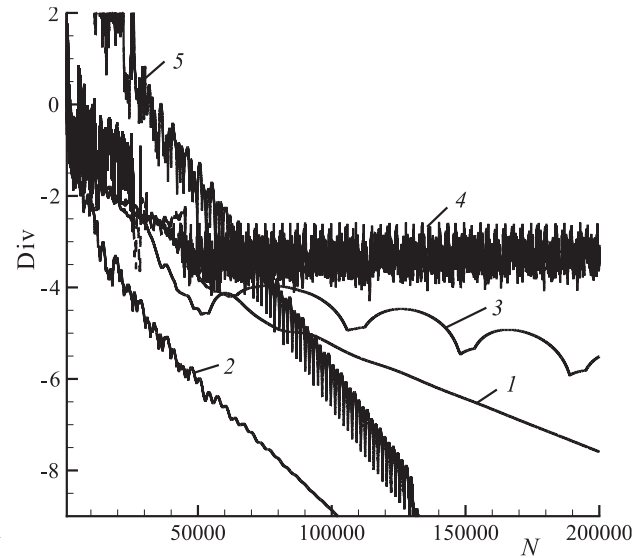


Рис. 7. Сравнение историй сходимостей численных алгоритмов для баротропной модели и моделей с УПФ: 1 — модель 1 [6], 2 — модель 2 [7], 3 — модель 3 [8], 4 — модель 4 [9], 5 — баротропная модель

ной модели выше таковой для моделей 1, 3, 4 [6, 8, 9], так как в последних используется релаксация. Модель 2 [7] сходится и без релаксации, поэтому ее скорость сходимости близка к таковой для баротропной модели. Заметим также, что модель 4 [9] в строгом смысле не сходится, однако невязка устанавливается на уровне 10^{-3} , а этой точности вполне достаточно для получения решения.

3.4. Сравнение с экспериментом

На рис. 8 представлены результаты сравнения C_p , полученной экспериментально и с применением численных алгоритмов на основе баротропной модели и модели 1 с УПФ. Видно, что численный алгоритм для модели с УПФ имеет очень близкий к эксперименту профиль C_p , численные результаты на основе баротропной модели немного хуже. Из рисунка также следует, что с увеличением в расчетной области объема пара (т. е. с уменьшением σ) точность алгоритмов снижается.

Необходимо отметить, что построенный алгоритм неустойчив при $\rho_V < 1$ и тем самым не позволяет провести расчет с реальной плотностью пара $\rho_V \approx 0.01$ кг/м³. Поэтому представляет интерес сравнить, как влияет выбор этой константы на решение. Из рис. 9, где изображены поля α_L (а) и давления p (б), видно, что форма каверны и размеры вихря существенно зависят от ρ_V . Заметим, что эти параметры при $\rho_V = 100$ качественно похожи на полученные в [9], а при малой плотности пара ($\rho_V = 10$) форма каверны существенно отличается. На рис. 10 приведено сравнение C_p для разных плотностей пара. Видно, что чем меньше ρ_V , тем решение точнее. Так, распределение C_p при $\rho_V = 10$ существенно ближе к эксперименту, чем при $\rho_V = 100$. Дальнейшее уменьшение ρ_V в модели с транспортным уравнением (до $\rho_V = 3$) не дает заметного улучшения. Таким образом, выбор $\rho_V \leq 10$ в приложении к данной задаче оправдан.

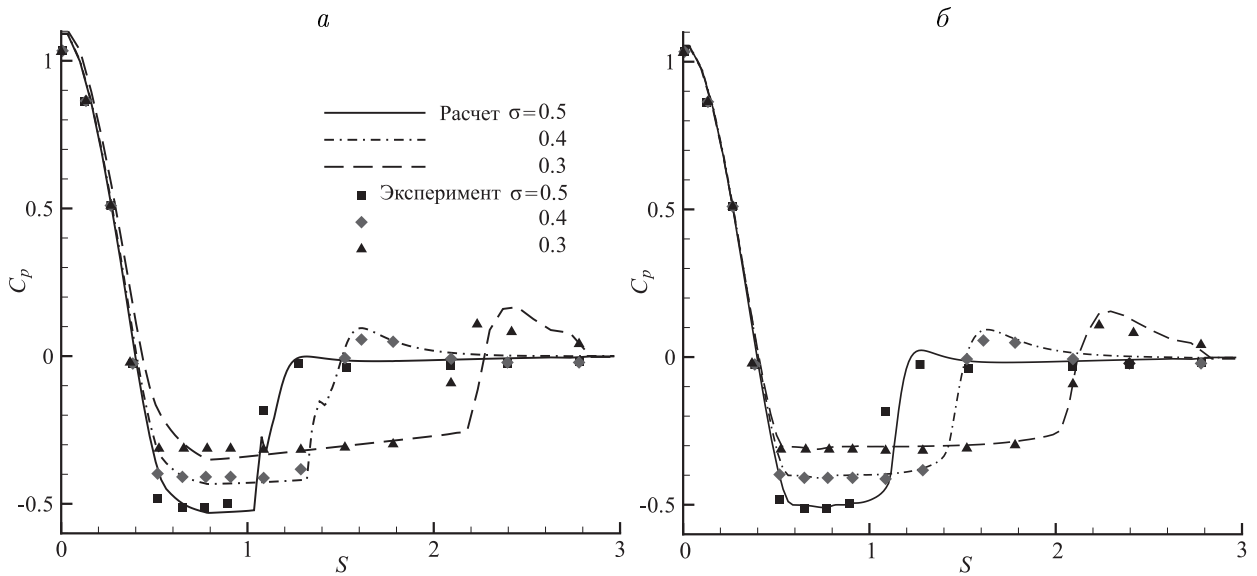


Рис. 8. Сравнение величин C_p , полученных экспериментально и с применением численных алгоритмов, для баротропной модели (а) и для модели 1 [6] (б) при разных σ

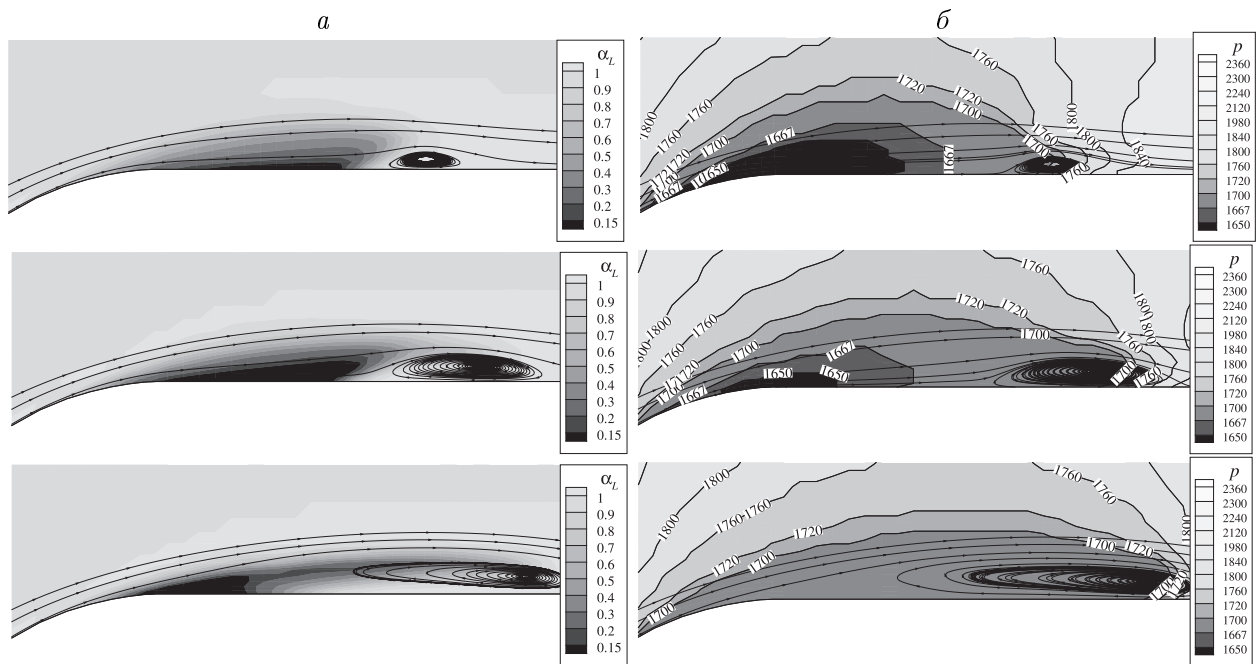


Рис. 9. Влияние константы ρ_V в модели 1 с УПФ [6] на распределение α_L (а) и давления p (б) в расчетной области (сверху вниз — $\rho_V = 100, 50, 10$)

3.5. Сравнение различных моделей с уравнением переноса фазы

На рис. 11 приведено распределение величины C_p , полученное по каждой из моделей таблицы (см. с. 100). Видно, что результаты, полученные по моделям 1 и 4, очень близки к эксперименту, по модели 3 — несколько хуже, а модель 2 дает неправильное распределение. Важно заметить: для всех моделей можно подобрать такие константы C_{prod} и C_{dest} , что профиль C_p будет очень близок к экспериментальным точкам. Например, для модели 2 такими константами являются $C_{prod} = 5$, $C_{dest} = 200$. Из рис. 12, где

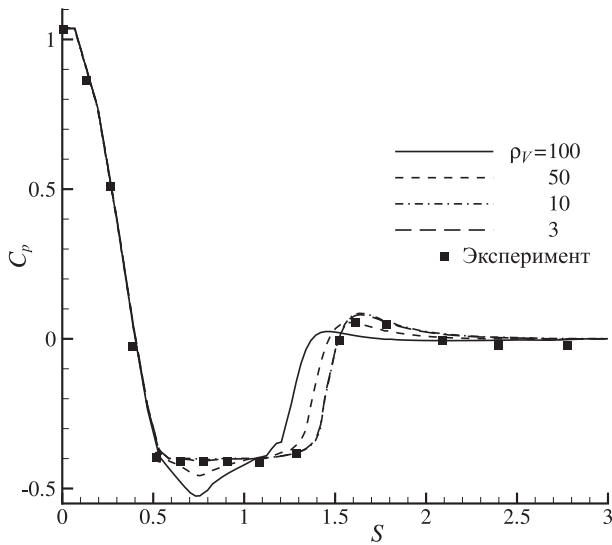


Рис. 10. Влияние константы ρ_V в модели 1 с УПФ [6] на C_p

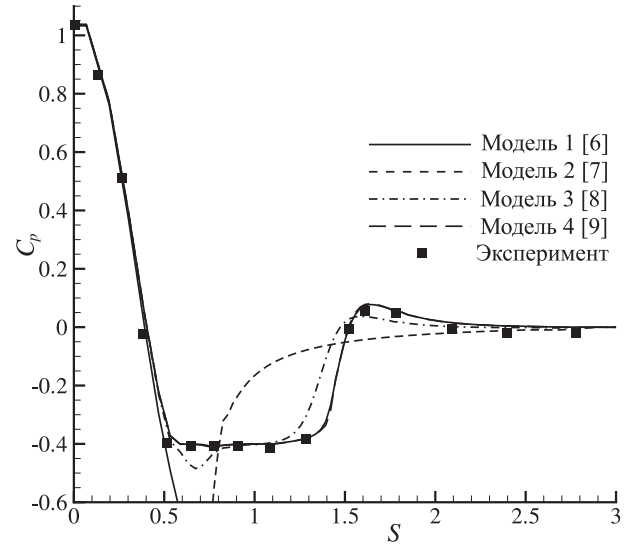


Рис. 11. Влияние моделей с УПФ на распределение C_p по поверхности цилиндра

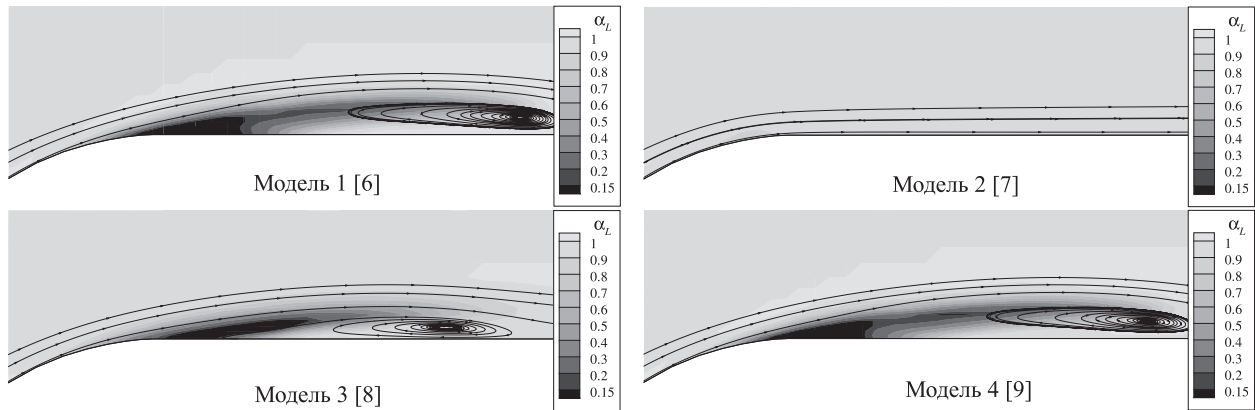


Рис. 12. Влияние моделей транспортного уравнения на распределение переменной α_L в расчетной области

представлено распределение α_L в расчетной области, видно, что в целом формы и размеры каверны и вихря для моделей 1, 3 и 4 похожи, а в соответствии с расчетами по модели 2 каверна вообще не образовалась, что объясняется неверным в данном случае выбором констант C_{prod} и C_{dest} . Можно заключить, что все модели (в том числе модель 2 с подобранными константами) дают достаточно хорошее совпадение с экспериментом.

Заключение

В работе предложены экономичные численные методы расчета трехмерных кавитационных течений вязкой жидкости на основе баротропной модели и моделей с уравнением переноса объемной доли жидкой фазы. Построенные алгоритмы являются развитием метода искусственной сжимаемости [11], хорошо зарекомендовавшего себя при моделировании трехмерных стационарных течений несжимаемой жидкости. Предложен способ рационального вычисления невязких потоков по MUSCL-схеме, позволяющий на 25% сократить время расчета. В алгоритме для моделей с УПФ за счет применения

релаксации и явно-неявной аппроксимации источникового члена частично решена проблема сходимости при малых плотностях пара ρ_V . Построенный алгоритм сходится при $\rho_V/\rho_L \geq 0.003$. На модельной задаче показано, что близкие к эксперименту результаты получаются уже при $\rho_V = 0.01\rho_L$, дальнейшее уменьшение плотности пара на решение не влияет. Исследование влияния на решение вида зависимости $\rho = \rho(p)$ в баротропной модели позволило определить значение параметра $C_{\min} = 0.2$. На примере задачи обтекания затупленного цилиндра проведено сравнение баротропной модели и четырех моделей с УПФ. Выявлено, что все модели с УПФ дают примерно одинаковые результаты и в целом несколько точнее баротропной модели. В настоящее время модели с УПФ применяются авторами для изучения кавитационных течений воды в рабочем колесе и в отсасывающей трубе гидравлической турбины.

Список литературы

- [1] РОЖДЕСТВЕНСКИЙ В.В. Кавитация. Л.: Судостроение, 1977. 247 с.
- [2] HIRSCHI R. Centrifugal pump performance drop due to leading edge cavitation: Numerical predictions compared with model tests // J. Fluids Eng. 1998. Vol. 120. P. 705–711.
- [3] HOSANGADI A., AHUJA V., ARUNAJATESAN S. A generalized compressible cavitation model // CAV 2001: Fourth Intern. Symp. on Cavitation. California Institute of Technology. Pasadena, CA USA, 2001.
- [4] DELANNOY Y., KUENY J.L. Two phase flow approach in unsteady cavitation modeling // ASME. Cavitation and Multi-phase Flow Forum. 1990. Vol. 109. P. 153–159.
- [5] COUTIER-DELGOSHA O., MOREL P., FORTES-PATELLA R., REBOUD JL. Numerical simulation of turbopump inducer cavitating behavior // Intern. J. of Rotating Machinery. 2005. Vol. 2005, iss. 2. P. 135–142.
- [6] SINGHAL A.K., VAIDYA N., LEONARD A.D. Multi-dimensional simulation of cavitating flows using a pdf model for phase change // Proc. of ASME Fluids Eng. Division Summer Meeting. 1997. P. 1–8.
- [7] KUNZ R.F., BOGER D.A., STINEBRING D.A. ET AL A preconditioned Navier–Stokes method for two-phase flows with application to cavitation prediction // Comput. & Fluids. 2000. Vol. 29. P. 849–875.
- [8] ATHAVALE M.M., LI H.Y., JIANG YU, SINGHAL A.K. Application of the full cavitation model to pumps and inducers // Intern. J. of Rotating Machinery. 2002. Vol. 8, No. 1. P. 45–56.
- [9] SENOČAK I., SHYY W. Evaluation of cavitation models for Navier–Stokes computations // Proc. of ASME Fluids Eng. Division Summer Meeting. 2002.
- [10] FRIKHA S., COUTIER-DELGOSHA O., ASTOLFI J.A. Influence of the cavitation model on the simulation of cloud cavitation on 2D foil section // Intern. J. of Rotating Machinery. 2008. Vol. 2008. Article ID 146234. 12 p. doi:10.1155/2008/146234.
- [11] ЧЕРНЫЙ С.Г., ЧИРКОВ Д.В., ЛАПИН В.Н. Численное моделирование течений в турбомашинах. Новосибирск: Наука, 2006. 202 с.
- [12] VAN LEER B., LEE W.T., ROE P.L. Characteristic Time-Stepping or Local Preconditioning of the Euler Equations. AIAA Pap. 91-1552, 1991.
- [13] ROUSE H., MCNOWN J.S. Cavitation and pressure distribution, head forms at zero angle of yaw // Studies in Engineering. Bulletin 32. State Univ. of Iowa, 1948.

*Поступила в редакцию 10 ноября 2010 г.,
с доработки — 4 февраля 2011 г.*