

## О совместном движении трёх вязких неизотермических жидкостей в плоском слое\*

Е. Н. ЛЕМЕШКОВА

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия*

e-mail: lena\_lemeshkova@mail.ru

Исследовано однонаправленное движение трёх несмешивающихся несжимаемых вязких неизотермических жидкостей в плоском слое. Предполагается, что движение происходит только под действием градиента давления из состояния покоя. Найдено точное стационарное решение. Решение нестационарной задачи получено в виде конечных аналитических формул методом преобразования Лапласа, и доказано, что оно выходит на стационарный режим, если градиент давления в одной из жидкостей стремится к своему стационарному значению.

*Ключевые слова:* вязкая неизотермическая жидкость, поверхность раздела, преобразование Лапласа.

### 1. Постановка задачи

В качестве основной модели движения будем использовать уравнения вязких теплопроводных жидкостей в отсутствие внешних сил (индекс  $j$  определяет различные жидкости,  $j = 1, 2, 3$ )

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} + \frac{1}{\rho_j} \nabla p_j &= \nu_j \Delta \mathbf{u}_j, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_j = 0, \\ \frac{d\Theta_j}{dt} &= \chi_j \Delta \Theta_j, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}_j, p_j$  — соответственно вектор скорости и давление,  $\Theta_j$  — отклонения от среднего значения температуры,  $\rho_j$  — плотности,  $\nu_j$  — кинематические вязкости,  $\chi_j$  — коэффициенты температуропроводностей,  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}_j \cdot \nabla$ . Для однонаправленного движения в плоских слоях  $-l_1 < y < 0$ ,  $0 < y < l_2$ ,  $l_2 < y < l_3$  с границами раздела  $y = 0$ ,  $y = l_2$  и твёрдыми неподвижными стенками  $y = -l_1$ ,  $y = l_3$  будем считать, что вектор скорости имеет вид  $\mathbf{u}_j = (u_j(y, t), 0, 0)$ . Тогда давление в каждой из жидкостей представимо в виде  $p_j = \rho_j f_j(t)x + \alpha_j(t)$  с произвольными  $f_j, \alpha_j$ , а температура —  $\Theta_j = -A_j x + T_j(y, t)$ . После подстановки в уравнения (1) соответствующих указанных величин функции  $u_j(y, t), T_j(y, t)$  удовлетворяют уравнениям

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy} - f_j(t), \quad (2)$$

$$T_{jt} = \chi_j T_{jyy} + A_j u_j. \quad (3)$$

В (2), (3) индексы  $t$  и  $y$  означают частные производные по этим переменным.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00283).

Условия непрерывности скорости и температуры на поверхностях раздела (в общем виде условия на поверхности раздела приведены в [1]) дают равенства

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad u_2(l_2, t) = u_3(l_2, t), \quad (4)$$

$$T_1(0, t) = T_2(0, t), \quad T_2(l_2, t) = T_3(l_2, t). \quad (5)$$

Кроме того, на этих поверхностях равны потоки тепла и касательные напряжения

$$k_1 T_{1y}(0, t) = k_2 T_{2y}(0, t), \quad k_2 T_{2y}(l_2, t) = k_3 T_{3y}(l_2, t), \quad (6)$$

$$\mu_2 u_{2y}(0, t) - \mu_1 u_{1y}(0, t) = 0, \quad \mu_3 u_{3y}(l_2, t) - \mu_2 u_{2y}(l_2, t) = 0, \quad (7)$$

где  $k_j = \chi_j \rho_j c_j$  — коэффициенты теплопроводностей,  $c_j$  — коэффициенты удельных теплоемкостей,  $\mu_j = \nu_j \rho_j$  — динамические вязкости. В уравнении (3) и граничном условии (7)  $A \equiv A_1 = A_2 = A_3$  (это следствие равенства температур при  $y = 0$  и  $y = l_2$ , см. (5)). Условия для нормальных напряжений сводятся к равенству давлений в жидкостях, а кинематические условия при  $y = 0$ ,  $y = l_2$  выполняются тождественно.

Так как стенки  $y = -l_1$ ,  $y = l_3$  твёрдые и неподвижные, то условия прилипания запишутся в виде

$$u_1(-l_1, t) = 0, \quad u_3(l_3, t) = 0. \quad (8)$$

Считаем также, что на стенки приложен только постоянный градиент температуры, т. е.

$$T_1(-l_1, t) = 0, \quad T_3(l_3, t) = 0. \quad (9)$$

Далее предполагается, что движение возникает лишь под действием градиента давления из состояния покоя, в силу чего

$$u_j(y, 0) = 0, \quad (10)$$

$$T_j(y, 0) = 0. \quad (11)$$

Видно, что уравнения (2)—(11) образуют две последовательно решаемые задачи для скоростей  $u_j$  и возмущений температур  $T_j$ .

Поставленная задача (2)—(9) имеет стационарное решение (скорости обезразмерены на  $\nu_1/l_1$ , а возмущения температур на  $Al_1\nu_1/\chi_1$ )

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\xi) &= N(\bar{l}_1^{-2}\xi^2 + \bar{l}_1 B(\xi + 1) - \bar{l}_1^2), \quad -1 \leq \xi \leq 0, \\ \bar{u}_2(\xi) &= N(\bar{l}_1^{-2}\bar{\mu}_1\xi^2 + \bar{l}_1 B(\bar{\mu}_1\xi + 1) - \bar{l}_1^2), \quad 0 \leq \xi \leq \bar{l}_2/\bar{l}_1, \\ \bar{u}_3(\xi) &= N\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2(\bar{l}_1^{-2}\xi^2 + B(\bar{l}_1\xi - 1) - 1), \quad \bar{l}_2/\bar{l}_1 \leq \xi \leq 1/\bar{l}_1, \\ \bar{T}_1(\xi) &= N\left(\frac{\bar{l}_1^{-2}}{12}\xi^4 + \frac{\bar{l}_1 B}{6}\xi^3 + \frac{\bar{l}_1(B - \bar{l}_1)}{2}\xi^2 + \frac{s_1}{\delta_1}(\xi + 1) - \frac{\bar{l}_1 B}{3} + \frac{5\bar{l}_1^{-2}}{12}\right), \quad -1 \leq \xi \leq 0, \\ \bar{T}_2(\xi) &= N\left(\frac{\bar{\chi}_1\bar{\mu}_1\bar{l}_1^{-2}}{12}\xi^4 + \frac{\bar{\chi}_1\bar{\mu}_1\bar{l}_1 B}{6}\xi^3 + \frac{\bar{\chi}_1\bar{l}_1(B - \bar{l}_1)}{2}\xi^2 + \frac{s_1}{\delta_1}(\bar{k}_1\xi + 1) - \frac{\bar{l}_1 B}{3} + \frac{5\bar{l}_1^{-2}}{12}\right), \\ &\quad 0 \leq \xi \leq \bar{l}_2/\bar{l}_1, \\ \bar{T}_3(\xi) &= N\left(\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\bar{\chi}_2\left(\frac{\bar{l}_1^{-2}}{12}\xi^4 + \frac{\bar{l}_1 B}{6}\xi^3 - \frac{(B + 1)}{2}\xi^2\right) + s_2\xi + \frac{\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\bar{\chi}_2}{3\bar{l}_1^{-2}}\left(\frac{5}{4} + B\right) - \frac{s_2}{\bar{l}_1}\right), \\ &\quad \bar{l}_2/\bar{l}_1 \leq \xi \leq 1/\bar{l}_1, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\xi = y/l_1$ ;  $\bar{l}_1 = l_1/l_3$ ;  $\bar{l}_2 = l_2/l_3$ ;  $\bar{\mu}_1 = \mu_1/\mu_2$ ;  $\bar{\mu}_2 = \mu_2/\mu_3$ ;  $\bar{k}_1 = k_1/k_2$ ;  $\bar{k}_2 = k_2/k_3$ ;  $\bar{\chi}_1 = \chi_1/\chi_2$ ;  $\bar{\chi}_2 = \chi_1/\chi_3$ ;  $N = f_1^0 l_1 l_3^2 / 2\nu_1^2$  – безразмерный градиент давления,

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{-\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (1 - \bar{l}_2^2) - \bar{\mu}_1 \bar{l}_2^2 + \bar{l}_1^2}{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (1 - \bar{l}_2) + \bar{\mu}_1 \bar{l}_2 + \bar{l}_1}, \quad \delta_1 = \bar{k}_1 \bar{k}_2 (1 - \bar{l}_2) + \bar{k}_1 \bar{l}_2 + \bar{l}_1, \\
 s_1 &= \frac{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\chi}_2 \bar{l}_2}{\bar{l}_1} (1 - \bar{l}_2) \left( \bar{l}_2 \left( \frac{\bar{l}_2}{3} + \frac{B}{2} \right) + B + 1 \right) + \\
 &\quad + \frac{\bar{k}_2 \bar{\chi}_1 \bar{l}_2}{\bar{l}_1} (\bar{l}_2 - 1) \left( \bar{\mu}_1 \bar{l}_2 \left( \frac{\bar{l}_2}{3} + \frac{B}{2} \right) + \bar{l}_1 (B - \bar{l}_1) \right) + \\
 &\quad + \frac{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\chi}_2}{3\bar{l}_1} \left( B + \frac{5}{4} \right) + \frac{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\chi}_2 \bar{l}_2^2}{2\bar{l}_1} \left( \frac{\bar{l}_2}{3} \left( \frac{\bar{l}_2}{2} + B \right) - (B + 1) \right) + \\
 &\quad + \frac{\bar{l}_1^2}{3} \left( B - \frac{5\bar{l}_1}{4} \right) - \frac{\bar{\chi}_1 \bar{l}_2^2}{2} \left( \frac{\bar{\mu}_1 \bar{l}_2}{3\bar{l}_1} \left( \frac{\bar{l}_2}{2} + B \right) + \left( B - \frac{2}{\bar{l}_1} \right) \right), \\
 s_2 &= \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 s_1}{\delta_1} - \frac{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\chi}_2 \bar{l}_2}{\bar{l}_1} \left( \bar{l}_2 \left( \frac{\bar{l}_2}{3} + \frac{B}{2} \right) + B + 1 \right) + \frac{\bar{k}_2 \bar{\chi}_1 \bar{l}_2}{\bar{l}_1} \left( \bar{\mu}_1 \bar{l}_2 \left( \frac{\bar{l}_2}{3} + \frac{B}{2} \right) + \bar{l}_1 (B - \bar{l}_1) \right).
 \end{aligned}$$

**Замечание 1.** Рассматриваемое решение уравнений (1) является инвариантным относительно однопараметрической подгруппы непрерывных преобразований, соответствующей оператору  $\partial/\partial x + \rho f(t)\partial/\partial p - A\partial/\partial \Theta$ .

## 2. Решение нестационарной задачи методом преобразования Лапласа

Применим преобразование Лапласа к задаче (2)–(11). Получим для изображений  $\hat{U}_j(y, p)$ ,  $\hat{T}_j(y, p)$  уравнения

$$p\hat{U}_j(y, p) = \nu_j \hat{U}_{jyy}(y, p) - F_j(p), \quad p\hat{T}_j(y, p) = \chi_j \hat{T}_{jpp}(y, p) + A\hat{U}(y, p). \quad (13)$$

К (13) добавляются преобразованные условия (4)–(11)

$$\mu_2 \hat{U}_{2y}(0) - \mu_1 \hat{U}_{1y}(0) = 0, \quad (14)$$

$$\mu_3 \hat{U}_{3y}(l_2) - \mu_2 \hat{U}_{2y}(l_2) = 0, \quad (15)$$

$$\hat{U}_1(0, p) = \hat{U}_2(0, p), \quad \hat{U}_2(l_2, p) = \hat{U}_3(l_2, p), \quad (16)$$

$$\hat{T}_1(0, p) = \hat{T}_2(0, p), \quad \hat{T}_2(l_2, p) = \hat{T}_3(l_2, p), \quad (17)$$

$$\hat{U}_1(-l_1, p) = 0, \quad \hat{U}_3(l_3, p) = 0, \quad (18)$$

$$\hat{T}_1(-l_1, p) = 0, \quad \hat{T}_3(l_3, p) = 0, \quad (19)$$

$$k_1 \hat{T}_{1y}(-l_1, p) = k_2 \hat{T}_{2y}(-l_1, p), \quad k_2 \hat{T}_{2y}(0, p) = k_3 \hat{T}_{3y}(0, p). \quad (20)$$

Общее решение первого уравнения (13),  $j = 1, 2, 3$ , имеет вид

$$\hat{U}_j = C_j^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}} (y + l_1) + C_j^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}} (y + l_1) - \frac{F_j}{p}, \quad (21)$$

второго —

$$\hat{T}_j(y, p) = \hat{C}_j^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} y + \hat{C}_j^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} y + \hat{T}_{jr}, \quad (22)$$

где  $\hat{T}_{jr} = \frac{A}{\sqrt{p\chi_j\Omega_j}} \int \hat{U}_j(z, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}}(z - y) dz$  — частное решение уравнения (13).

Величины  $C_j^1, C_j^2, \hat{C}_j^1, \hat{C}_j^2$  определим из граничных условий (14)–(20):

$$C_3^1 = \frac{\frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} \left( C_2^1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} \tilde{l}_2 + C_2^2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} \tilde{l}_2 \right) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}}(l_3 + l_1) - \frac{F_3}{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} \tilde{l}_2}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}}(l_3 - l_2)},$$

$$C_3^2 = \frac{\frac{F_3}{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} \tilde{l}_2 - \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} \left( C_2^1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} \tilde{l}_2 + C_2^2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} \tilde{l}_2 \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}}(l_3 + l_1)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}}(l_3 - l_2)},$$

$$C_2^1 = \frac{1}{\Delta} \left[ -b_1 \left( -\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 + \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \right) + \right. \\ \left. + a_2 \left( b_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 - b_2 \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right) \right],$$

$$C_2^1 = \frac{1}{\Delta} \left[ -b_1 - (a_2 b_2 + a_1 b_3) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 + (a_2 b_3 + a_1 b_2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \right],$$

$$C_2^2 = \frac{1}{\Delta} \left[ b_1 \left( \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \right) - \right. \\ \left. - a_1 \left( b_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 - b_2 \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right) \right],$$

$$\hat{C}_1^1 = \frac{\frac{S_2 \hat{T}_*}{S_1} - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \hat{T}_{3r}(l_3, p)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} - \frac{\bar{k}_2 \sqrt{\chi_3}}{\sqrt{p}} \left( \bar{k}_1 \hat{T}'_{1ry}(0, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 + \hat{T}'_{2ry}(l_2, p) \right) - d}{\frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\chi_2}} S_3 - \frac{SS_2}{S_1}},$$

$$\hat{T}_* = \frac{\bar{k}_1 \sqrt{\chi_2}}{\sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \hat{T}'_{1ry}(0, p) + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \hat{T}'_{1r}(0, p) + \hat{T}_{2r}(l_2, p) + \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} \hat{T}_{3r}(l_3, p),$$

$$\hat{C}_1^2 = C_1^1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1, \quad \hat{C}_2^1 = \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\chi_1}} C_1^1 + \frac{\bar{k}_1 \sqrt{\chi_2}}{\sqrt{p}} \hat{T}'_{1ry}(0, p),$$

$$\hat{C}_2^2 = C_1^1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 + \hat{T}_{1r}(0, p), \quad \hat{C}_3^1 = \frac{1}{S_1} (C_1^1 S + \hat{T}_*),$$

$$\hat{C}_3^2 = -C_3^1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3 - \frac{\hat{T}_{3r}(l_3, p)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3}, \quad d = \frac{\bar{k}_2 \sqrt{\chi_1}}{\sqrt{\chi_2}} \hat{T}'_{1r}(0, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2.$$

Здесь

$$a_1 = \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} \tilde{l}_2 + \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_3 - l_2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} \tilde{l}_2,$$

$$a_2 = \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} \tilde{l}_2 + \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_3 - l_2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} \tilde{l}_2,$$

$$b_1 = \frac{F_3}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_3 - l_2) p} + \frac{F_2 - F_3}{p}, \quad b_2 = \frac{1}{p} \left[ F_1 \left( 1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right) - F_2 \right],$$

$$b_3 = -\frac{\bar{\mu}_1 F_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1} p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1,$$

$$\Delta = a_2 \left( \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \right) +$$

$$+ a_1 \left( \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 - \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \right),$$

$$S = \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\chi_1}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1, \quad S_1 = \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3,$$

$$S_2 = \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3, \quad S_3 = \bar{k}_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 + \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1, \quad (23)$$

где  $\bar{\nu}_1 = \nu_1/\nu_2$ ,  $\bar{\nu}_2 = \nu_2/\nu_3$ ,  $\tilde{l}_2 = l_1 + l_2$ .

Используя равенства (21)–(23) и проводя достаточно длинные математические выкладки, можно доказать предельные равенства  $\lim_{p \rightarrow 0} p\hat{T}_j(y, p) = T_j^0$  и  $\lim_{p \rightarrow 0} pU_j(y, p) = u_j^0$ , где  $T_j^0, u_j^0$  — стационарное решение (12). Численное обращение преобразования Лапласа позволяет найти решение при любом заданном градиенте давления.

На рис. 1 приведены профили безразмерных скоростей и возмущений температур в слоях  $\bar{u}_j = u_j l_1 / \nu_1, \bar{T}_j = T_j \chi_1 / (Al_1 \nu_1)$  для системы силикон ( $\rho_1 = 956$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_1 = 10.2 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\mu_1 = 9.71 \cdot 10^{-3}$  кг/(м·с),  $k_1 = 0.133$  кг·м/(с<sup>3</sup>·К),  $\chi_1 = 0.0675 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\alpha_1 = 6.4 \cdot 10^{-5}$  кг/(с<sup>2</sup>·К)) — вода ( $\rho_2 = 998$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_2 = 1.004 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\mu_2 = 1.002 \cdot 10^{-3}$  кг/(м·с),  $k_2 = 0.597$  кг·м/(с<sup>3</sup>·К),  $\chi_2 = 0.143 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\alpha_2 = 15.14 \cdot 10^{-5}$  кг/(с<sup>2</sup>·К)) — воздух ( $\rho_3 = 1.205$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_3 = 15.11 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\mu_3 = 0.018 \cdot 10^{-3}$  кг/(м·с),  $k_3 = 0.0257$  кг·м/(с<sup>3</sup>·К),  $\chi_3 = 21 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с) при температуре 20 °С. Видно, что с ростом безразмерного времени  $\tau = \nu_1 t / l_1^2$  решение выходит на стационарный режим. Размерное время при  $\tau = 10$  есть  $t = 1$  с. На рис. 1 приведен случай, когда  $\bar{f}(\tau) = 1 + e^{-\tau} \cos \tau$ ,  $\bar{f}(\tau) = f_1(t) / f_1^0$  — безразмерный градиент давления в первой жидкости.

При  $\bar{f}(\tau) = \sin \tau$  решение не будет сходиться к стационарному, так как предел  $\bar{f}(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$  не существует (на рис. 2, 3 приведены графики только для скоростей, поскольку они имеют конкретный физический смысл). Кривые 1, 2 на рис. 2 соответствуют положительному градиенту давления, 3, 4 — отрицательному, т. е. движение во всех слоях меняется на противоположное и процесс повторяется через  $\tau = 2\pi$ .

Если же безразмерный градиент давления

$$\bar{f}(\tau) = \begin{cases} \tau^* / \tau, & 0 \leq \tau \leq \tau^*, \\ 1 - 5e^{\tau^* - \tau}, & \tau \geq \tau^*, \end{cases}$$

то жидкости сначала будут двигаться в положительном направлении (рис. 3, кривые 1, 2), а при  $\tau = \tau^*$  градиент давления меняет знак и появляется возвратное течение (кривые 3, 4). С ростом времени движение выйдет на стационарный режим (кривая 5).

**Замечание 2.** Задача о совместном движении трёх вязких жидкостей в плоских слоях решена в работе [2].

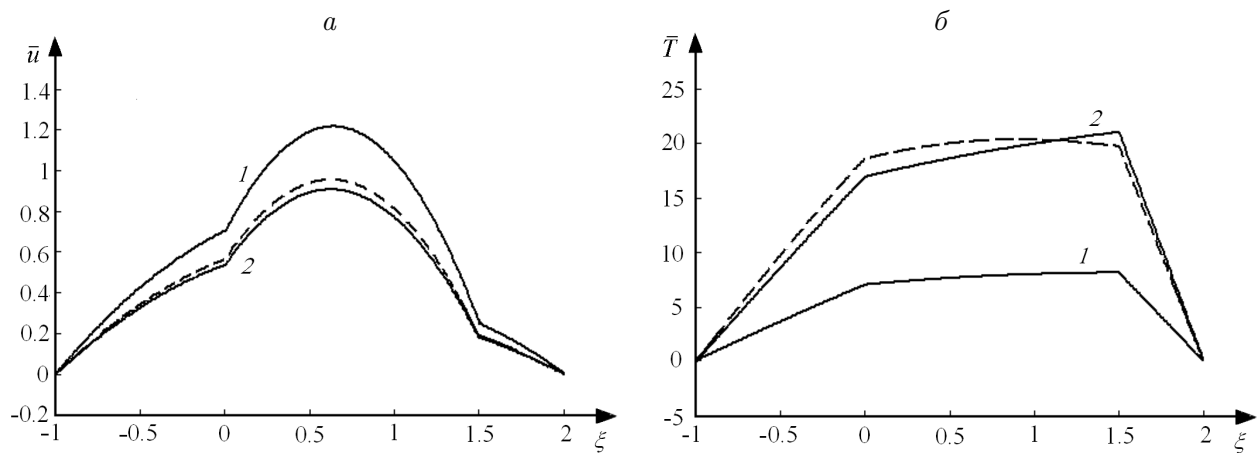


Рис. 1. Профили безразмерных скоростей (а) и возмущений температур (б) в слоях при  $l_1 = 10^{-3}$  м;  $l_2 = 1.5 \cdot 10^{-3}$  м;  $l_3 = 2 \cdot 10^{-3}$  м,  $\bar{f}(\tau) = 1 + e^{-\tau} \cos \tau$ ; штрих — стационарное решение; а: 1 —  $\tau = 1$ , 2 —  $\tau = 7$ ; б: 1 —  $\tau = 2$ , 2 —  $\tau = 9$

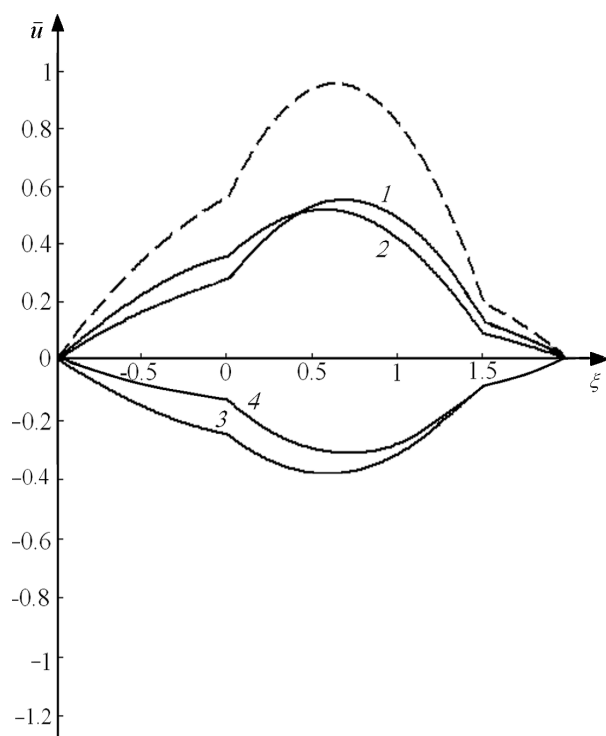


Рис. 2. Профили скоростей в слоях при  $l_1 = 10^{-3}$  м,  $l_2 = 1.5 \cdot 10^{-3}$  м,  $l_3 = 2 \cdot 10^{-3}$  м,  $\bar{f}(\tau) = \sin \tau$ ; 1 —  $\tau = 1$ , 2 —  $\tau = 3$ , 3 —  $\tau = 4$ , 4 —  $\tau = 6$ ; штрих — стационарное решение

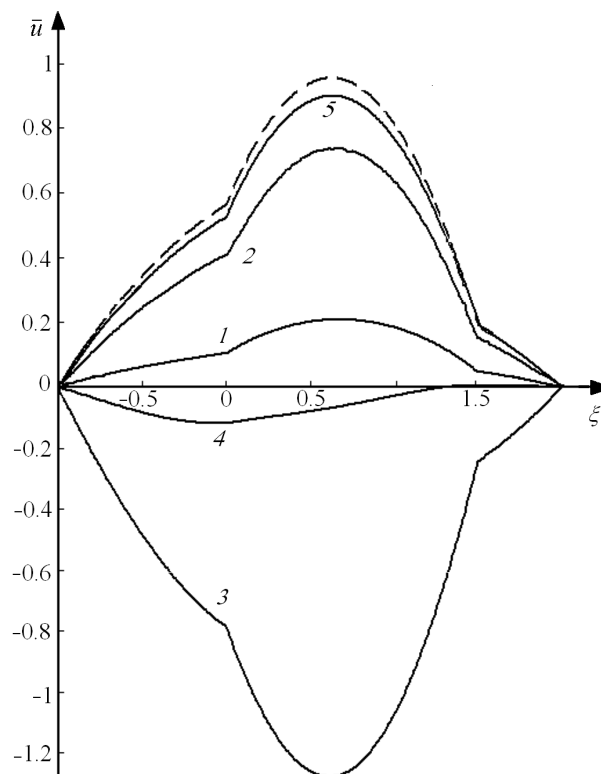


Рис. 3. Профили скоростей в слоях при  $l_1 = 10^{-3}$  м,  $l_2 = 1.5 \cdot 10^{-3}$  м,  $l_3 = 2 \cdot 10^{-3}$  м; 1 —  $\tau = 1$ , 2 —  $\tau = 2$ , 3 —  $\tau = 3$ , 4 —  $\tau = 4$ , 5 —  $\tau = 7$ ;  $\tau^* = 2$ ; штрих — стационарное решение

**Замечание 3.** Решению задачи (2)–(11) можно дать следующую интерпретацию. Предположим, что в начальный момент времени первая жидкость заполняет слой  $-l_1 < y < 0$ , вторая —  $0 < y < l_2$ , третья —  $l_2 < y < l_3$ . Жидкости находятся в покое, и во всем слое поле температур  $\Theta_j = -Ax$ . Мгновенно возникший градиент давления порождает движение жидкостей, при котором поверхности раздела остаются плоскостями  $y = 0, y = l_2$ , а траектории являются прямыми. Жидкости 1 и 3 можно считать также смазкой, вдоль которой скользит жидкость 2.

Автор выражает благодарность профессору В.К. Андрееву за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

## Список литературы

- [1] Андреев В.К., Захватаев В.Е., Рябицкий Е.А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000. 31 с.
- [2] Лемешкова Е.Н. Прямая и обратная задача о совместном движении трёх вязких жидкостей в плоских слоях // Журнал Сибирского федерального ун-та. Математика и физика. 2011. Т. 3, № 4. С. 363–370.

Поступила в редакцию 7 ноября 2012 г.,  
с доработки — 29 декабря 2012 г.