

Численное моделирование пространственных колебаний цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью*

С. А. БОЧКАРЁВ, С. В. ЛЕКОМЦЕВ, В. П. МАТВЕЕНКО
Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия
e-mail: bochkarev@icmm.ru, lekomtsev@icmm.ru, mvp@icmm.ru

Работа посвящена численному анализу собственных колебаний вертикально и горизонтально ориентированных цилиндрических оболочек при разном уровне заполнения жидкостью и различных вариантах граничных условий, задаваемых на торцах упругой конструкции. Решение задачи осуществляется в трёхмерной постановке с использованием метода конечных элементов.

Ключевые слова: цилиндрические оболочки, частичное заполнение жидкостью, собственные колебания, метод конечных элементов.

Введение

В различных технических конструкциях широкое применение находят тонкостенные оболочки, которые погружены в жидкую среду или содержат её внутри себя. Взаимодействие с жидкостью оказывает существенное влияние на динамическое поведение упругого тела.

К настоящему времени количество публикаций, посвящённых исследованию оболочек, содержащих жидкость, весьма значительно. При этом достаточно подробно с использованием различных аналитических и численных методов, включая метод конечных элементов (МКЭ) [1–6], исследованы вертикальные цилиндрические баки. Экспериментальный и теоретический анализ собственных колебаний таких конструкций выполнен в [3, 4]. В этих работах не учитывается плескание свободной поверхности, тогда как в [5–7] отмечается, что этот эффект оказывает влияние на перемещения упругого тела и его необходимо принимать во внимание. Подробное исследование данного явления приведено в [6].

В меньшей степени представлены численные работы по анализу горизонтально расположенных конструкций [8–13]. В этом случае при частичном заполнении жидкостью нарушается симметричность по окружной координате, что приводит к необходимости использования более сложных методов решения. Гибридный численно-аналитический метод, объединяющий в себе классический конечно-элементный подход, теорию оболочек Сандерса и потенциальную теорию, представлен в [8]. С его помощью получены собственные частоты и формы колебаний горизонтальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью, с учётом плескания свободной поверхности. Полученные результаты демонстрируют хорошее совпадение с экспериментом [9]. В работе [8]

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12-01-00323-а и 12-01-31138) и Программы УрО РАН 12-С-1-1015.

было приведено сравнение с моделью, в которой эффект плескания не учитывается [10]. В [8, 10] оболочка представляется в виде набора цилиндрических панелей, что накладывает некоторые ограничения на рассматриваемую геометрию, однако позволяет анализировать незамкнутые конструкции.

В работах [11–13] для численного моделирования задач гидроупругости используется смешанный подход, где перемещения упругого тела определяются с помощью МКЭ, тогда как для жидкости применяется метод граничных интегральных уравнений. Динамические характеристики частично-заполненных горизонтальных цилиндрических оболочек проанализированы в [12]. Здесь предполагается, что при взаимодействии с жидкой средой конструкция колеблется так же, как в вакууме. Каждая форма колебаний вносит свой вклад и приводит к соответствующему распределению давления на границе оболочка — жидкость. В работе [13] исследованы колебания тонкой горизонтально расположенной цилиндрической оболочки, погружённой в жидкость. Оценено влияние свободной поверхности, жёсткой границы и глубины погружения на динамические характеристики системы и проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Практически во всех перечисленных исследованиях, посвящённых частично заполненным горизонтальным цилиндрическим оболочкам [8, 10–13], собственным формам колебаний этих конструкций не уделялось должного внимания. Они использовались лишь для определения и сопоставления соответствующих частот в полученном спектре. Однако несимметричность рассматриваемых систем приводит к появлению особенностей, которые не присущи аналогичным вертикальным конфигурациям. Некоторые из них были экспериментально установлены в [9]. С целью их более детального изучения в настоящей работе предлагаются вариант трёхмерной математической постановки и алгоритм численной реализации, предназначенные для определения динамических характеристик оболочек произвольной геометрии, полностью или частично заполненных сжимаемой невязкой жидкостью. Необходимо отметить, что в представленном варианте в отличие от других подходов, в которых узловыми неизвестными выступают давление или потенциал перемещения жидкости, при моделировании жидкости в качестве единственного параметра используется потенциал возмущения скорости. Это позволяет избежать таких проблем численной реализации задач взаимодействия конструкция — жидкость как ложные формы и явление блокировки [14]. Кроме того, в рамках данного подхода незначительная модификация алгоритма позволяет учитывать течение и вращение невязкой сжимаемой жидкости или газа [15, 16].

1. Математическая постановка задачи и численная реализация

Рассматриваются вертикально и горизонтально ориентированные цилиндрические оболочки длиной L , средним радиусом $R = d_s/2$, толщиной h , полностью или частично заполненные жидкой средой. Уровень наполнения вертикальных конфигураций характеризуется высотой столба жидкости H_f , горизонтальных — параметром d_f (рис. 1).

Движение сжимаемой невязкой жидкой среды, занимающей объём V_f , описывается волновым уравнением [17]

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где φ — потенциал возмущения скорости, c — скорость звука в среде.

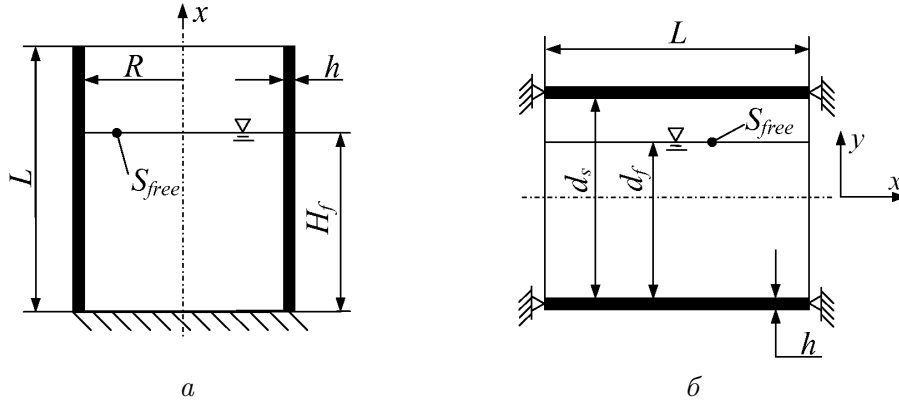


Рис. 1. Расчётные схемы цилиндрической оболочки: *a* — вертикальная, *b* — горизонтальная

Потенциал возмущения скорости на торцах конструкции подчиняется следующим граничным условиям:

$$x = 0, L : \quad \varphi = 0. \quad (2)$$

На границе раздела жидкости и оболочки $S_\sigma = S_f \cap S_s$ задается условие непроницаемости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \delta}{\partial t} \cdot \mathbf{n}, \quad (3)$$

где S_f, S_s — поверхности, ограничивающие объёмы жидкости и оболочки V_s , \mathbf{n} — нормаль к поверхности S_σ , $\delta = \{u, v, w\}^T$ — вектор перемещений оболочки, u, v, w — осевая, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений.

Предполагается, что на свободной поверхности жидкости S_{free} отсутствуют динамическое давление, поверхностное натяжение и перемещения жидкости, а потенциал возмущения скорости удовлетворяет условию $\varphi = 0$ [9].

Уравнение для потенциала возмущения скорости (1) вместе с граничными условиями (2) и условием непроницаемости (3) с помощью метода Бубнова — Галёркина сводится к системе уравнений, которую можно представить в матричном виде [18]

$$\mathbf{K}_f \varphi + \mathbf{M}_f \dot{\varphi} - \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{w}} = 0, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{K}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) dV,$$

$$\mathbf{M}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{1}{c^2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV, \quad \mathbf{C}_f = \sum_{m_\sigma} \int_{S_\sigma} \mathbf{F}^T \mathbf{N}_w dS.$$

Здесь (x, y, z) — декартова система координат, m_f, m_σ — число конечных элементов, на которые разбиваются область жидкости V_f и поверхность S_σ , \mathbf{F}, \mathbf{N}_w — функции формы для потенциала возмущения скорости и нормальной составляющей вектора перемещений оболочки.

Предполагается также, что криволинейная поверхность оболочки произвольной геометрии достаточно точно аппроксимируется совокупностью плоских четырёхугольных элементов, находящихся одновременно под действием мембранных и изгибающих сил.

Для математической постановки задачи используется вариационный принцип возможных перемещений, в который включается линейризованное уравнение Бернулли, определяющее гидродинамическое давление, действующее со стороны жидкости на поверхность S_σ конструкции

$$\int_{V_s} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{V_s} \rho_s \delta \mathbf{d}^T \ddot{\mathbf{d}} dV - \int_{S_\sigma} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{P} dS = 0, \quad \mathbf{P} = \left\{ 0 \quad 0 \quad -\rho_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^T. \quad (5)$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{d} , \mathbf{P} — векторы обобщённых деформаций, напряжений, перемещений и поверхностных нагрузок соответственно, ρ_s — плотность материала оболочки, ρ_f — плотность жидкости. Выполняя стандартные процедуры метода конечных элементов, получим матричное соотношение

$$\mathbf{K}_s \mathbf{d} + \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{d}} + \rho_f \mathbf{C}_s \dot{\varphi} = 0, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{K}_s = \sum_{m_s} \int_{V_s} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{M}_s = \sum_{m_s} \int_{V_s} \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \quad \mathbf{C}_s = \sum_{m_\sigma} \int_{S_\sigma} \mathbf{F}^T \mathbf{N}_w dS.$$

Здесь m_s — число конечных элементов, на которые разбивается поверхность оболочки, \mathbf{D} — матрица упругих констант, \mathbf{B} — матрица градиентов, \mathbf{N} — функции формы конечного элемента оболочки.

Задача исследования динамики поведения оболочек, содержащих неподвижную жидкость, сводится к совместному решению двух связанных систем уравнений

$$\mathbf{M} \left\{ \ddot{\mathbf{d}} \quad \ddot{\varphi} \right\}^T + \mathbf{C} \left\{ \dot{\mathbf{d}} \quad \dot{\varphi} \right\}^T + \mathbf{K} \left\{ \mathbf{d} \quad \varphi \right\}^T = 0, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & -\rho_f \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \rho_f \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_s \\ \mathbf{C}_f & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 \\ 0 & -\rho_f \mathbf{K}_f \end{bmatrix}.$$

Здесь \mathbf{M} — матрица масс, \mathbf{C} — матрица демпфирования, \mathbf{K} — матрица жёсткости.

Представляя возмущённое движение упругой конструкции и жидкости в виде $\mathbf{d} = \mathbf{q} \exp(i^* \omega t)$, $\varphi = \mathbf{f} \exp(i^* \omega t)$, разрешающую систему уравнений (7) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \omega \mathbf{x}, \quad (8)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица, \mathbf{d} и \mathbf{f} — некоторые функции координат, $\mathbf{x} = \left\{ \mathbf{q}, \mathbf{f}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{f}} \right\}^T$, $i^* = \sqrt{-1}$, $\omega = \lambda_1 + i^* \lambda_2$ — характеристический показатель.

При решении стандартной задачи на собственные значения (8) повышение вычислительной эффективности достигается с помощью использования алгоритма на основе метода Ланцоша для разрежённых матриц. Такой подход позволяет сократить время вычислений и значительно снизить необходимый объём оперативной памяти за счёт хранения только ненулевых элементов матриц.

Дискретизация объёма жидкости проводится восьмиузловым конечным элементом в форме призмы. Потенциал возмущения скорости φ внутри конечного элемента находится через узловые неизвестные с помощью функций форм стандартным для метода

конечных элементов образом

$$\varphi^e = \sum_{l=1}^8 F_l(s, t, r) \varphi_l, \quad F_l(s, t, r) = (1/8) (1 + s_l s) (1 + t_l t) (1 + r_l r).$$

Здесь (s, t, r) и (s_l, t_l, r_l) — естественные координаты элемента и l -го узла соответственно.

Вектор перемещений элемента оболочки δ^e содержит двадцать четыре неизвестных, по шесть в каждом узле l :

$$\delta_l^e = \{ \delta_l^m \quad \delta_l^b \quad \theta_{z_l} \}^T = \{ u_l \quad v_l \quad w_l \quad \theta_{x_l} \quad \theta_{y_l} \quad \theta_{z_l} \}^T, \quad l = i, j, k, m, \quad (9)$$

где $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ — углы поворота относительно соответствующих осей декартовой системы координат, связанной с оболочкой, индексы m и b означают мембранные и изгибные составляющие.

Для аппроксимации мембранных перемещений внутри конечного элемента используется линейная зависимость [19]

$$\delta^m = \{ u \quad v \}^T = \mathbf{N}^m \delta_e^m, \quad N_l = (1 + s_0) (1 + t_0) / 4, \quad s_0 = s_l s, \quad t_0 = t_l t. \quad (10)$$

При описании состояния изгиба аппроксимируется только прогиб w в направлении нормали к плоскости элемента. Углы поворота θ_x и θ_y также входят в качестве узловых неизвестных, но они определяются через производные от w с использованием несовместных функций форм [19]

$$\delta^b = \{ w \quad \theta_x \quad \theta_y \}^T = \mathbf{N}^b \delta_e^b, \\ \mathbf{N}_l^b = \frac{1}{8} (s_0 + 1) (t_0 + 1) \left\{ \begin{array}{c} (2 + s_0 + t_0 - s^2 - t^2) \\ -\bar{b}t_l(1 - t)^2 \\ \bar{a}s_l(1 - s)^2 \end{array} \right\}^T. \quad (11)$$

Здесь $2\bar{a}$ и $2\bar{b}$ — стороны четырёхугольного элемента.

Матрицы жёсткости и масс формируются с использованием численного интегрирования в системе координат, связанной с боковой поверхностью оболочки. Поворот вокруг оси z , ортогональной к плоскости конечного элемента, учитывается введением фиктивного момента M_z [19]. Переход к глобальным декартовым координатам, в которых заданы геометрия и уравнение движения, осуществляется с помощью матрицы направляющих косинусов.

2. Численные результаты

Параметры конечно-элементной сетки определены из условия выполнения заданной величины относительной погрешности между собственными частотами пустой оболочки, взятыми из известных экспериментальных данных [4, 7] и вычисленными с помощью разработанного конечно-элементного алгоритма. Дискретизация области жидкости проводится с учётом совместности конечно-элементных сеток на границе двух сред и зависит от уровня заполнения. Для полностью заполненных конфигураций связанная система имеет более 6500 степеней свободы, как правило 3500–4000 из них оболочечных.

2.1. Вертикальные цилиндрические оболочки

Рассматривается вертикально расположенная цилиндрическая оболочка (рис. 1, *a*), жёстко закреплённая у основания ($x = 0 : u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$), со следующими физико-механическими характеристиками: модуль упругости $E = 2.05 \cdot 10^{11}$ Н/м², коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, $\rho_s = 7800$ кг/м³, $R = 0.07725$ м, $h = 1.5 \cdot 10^{-3}$ м, $L/R = 2.99$. Уровень заполнения оболочки жидкостью ($\rho_f = 1000$ кг/м³, $c = 1500$ м/с) определяется параметром $b = H_f/L$.

В табл. 1 приведены собственные частоты колебаний, вычисленные при разном уровне заполнения оболочки жидкостью. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными [4] и конечно-элементными решениями [4, 20, 21]. В двумерных постановках [20, 21], выполненных с применением полуаналитического варианта метода конечных элементов, основанного на представлении решения в виде ряда Фурье по окружной координате, номер гармоники j в разложении соответствует количеству полуволн в окружном направлении, а номер моды m — в продольном (далее обозначения m, j). На рис. 2 представлена зависимость шести первых частот колеба-

Т а б л и ц а 1. Частоты колебаний (Гц) закреплённой у основания вертикальной стальной цилиндрической оболочки с жидкостью

| m | j | $b = 1$ | | | | $b = 0.679$ | | | |
|-----|-----|-----------|--------|--------|--------|-------------|--------|-----------|----------|
| | | Эксп. [4] | [4] | [20] | [21] | 3D shell | [4] | Эксп. [4] | 3D shell |
| 1 | 2 | 421 | 482.1 | 432.7 | 447.4 | 477.4 | 582.0 | 672.7 | 664.5 |
| | 3 | 388 | 400.6 | 369.8 | 375.9 | 398.3 | 522.0 | 543.1 | 538.0 |
| | 4 | 628 | 633.2 | 594.7 | 597.5 | 629.9 | 798.0 | 806.0 | 799.1 |
| | 5 | 1027 | 1033.0 | 982.1 | 984.0 | 1025.8 | 1196.0 | 1188.4 | 1178.8 |
| | 6 | 1546 | 1561.3 | 1494.1 | 1493.5 | 1546.6 | — | 1679.7 | 1657.3 |
| 2 | 3 | 1245 | 1286.9 | 1212.0 | 1251.6 | 1280.1 | 1394.0 | 1425.3 | 1412.2 |
| | 4 | 1094 | 1110.6 | 1033.9 | 1073.5 | 1104.1 | 1244.0 | 1253.2 | 1239.2 |
| | 5 | 1299 | 1304.2 | 1202.8 | 1245.1 | 1291.5 | 1546.0 | 1553.8 | 1535.7 |
| | 6 | 1748 | 1762.6 | 1626.9 | 1670.4 | 1737.2 | — | — | 2092.0 |

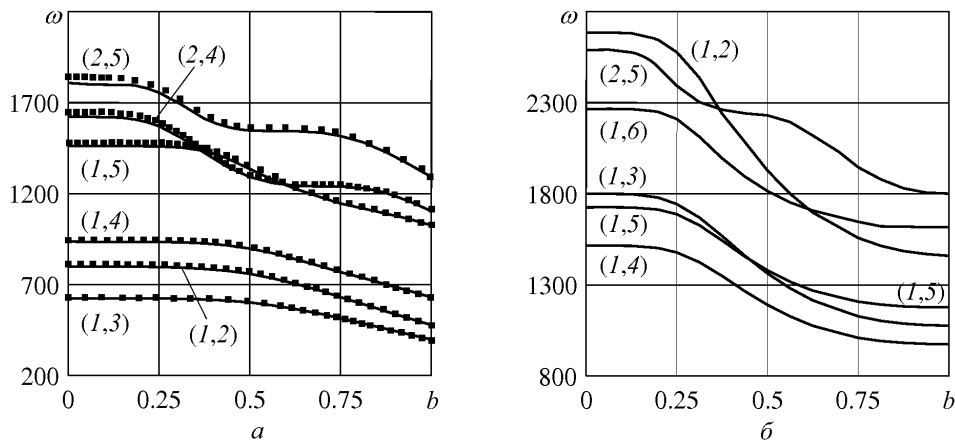


Рис. 2. Собственные частоты колебаний вертикальной цилиндрической оболочки (Гц) при разном уровне заполнения жидкостью: *a* — оболочка, закреплённая у основания, линии — настоящая работа, точки — [4]; *b* — оболочка, жёстко закреплённая на обоих краях

ний от параметра b для разных вариантов граничных условий. Полученные в рамках рассматриваемого конечно-элементного подхода (в таблице обозначен 3D shell) результаты хорошо согласуются с известными данными (см. табл. 1, рис. 2, *a*). Необходимо отметить, что наиболее сильно от экспериментальных значений отличается частота, соответствующая параметрам $(1, 2)$, которая плохо прослеживается в эксперименте [4].

Собственные формы вертикальных цилиндрических оболочек при разном уровне заполнения жидкостью качественно не отличаются от форм колебаний пустых оболочек в вакууме. При этом перемещения упругой конструкции меняются в зависимости от высоты области жидкости H_f и, например, для жёстко закреплённой с обоих краёв оболочки становятся не симметричны по длине относительно сечения $x = L/2$.

2.2. Горизонтальные цилиндрические оболочки

Рассматривается свободно опёртая на обоих краях ($x = 0, L : v = w = \theta_y = \theta_z = 0$) горизонтальная цилиндрическая оболочка (рис. 1, *b*), содержащая жидкость ($E = 2.01 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0.29$, $\rho_s = 7812$ кг/м³, $R = 0.0377$ м, $h = 2.29 \cdot 10^{-4}$ м, $L/R = 6.2$, $\rho_f = 1000$ кг/м³, $c = 1500$ м/с). Параметр, характеризующий заполненность конструкции, $a = d_f/d_s$.

Полученные собственные частоты колебаний и их сравнение с известными результатами приведены на рис. 3 и в табл. 2. Необходимо отметить, что для пустой и полностью заполненной конструкции одной частоте соответствуют две формы колебаний. При частичном заполнении горизонтальных оболочек задача не распадается на симметричную и антисимметричную, поэтому качественно одинаковым формам, различающимся лишь поворотом в окружном направлении, соответствуют разные частоты в спектре. В зависимости от уровня заполнения различие может достигать достаточно больших значений. Например, на рис. 3 показано, что при $a \geq 0.7$ разница между частотами, которым сопоставимы формы с одним количеством полуволн $(1, 5)$ (обозначены светлыми и тёмными маркерами), достаточно велика. Имеющиеся расхождения с [10] могут быть объяснены тем, что в данной работе не указано, какой форме соответствует приведённое значение частоты.

Формы колебаний горизонтальных цилиндрических оболочек существенно изменяются в зависимости от положения свободной поверхности. Как правило, определить

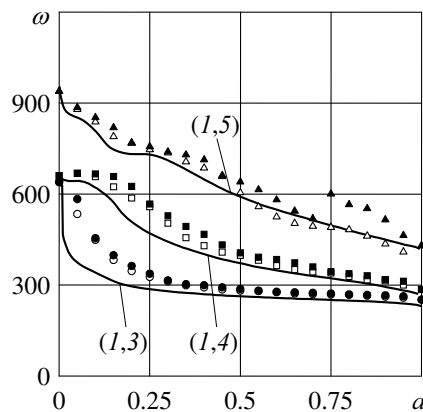


Рис. 3. Частоты колебаний (Гц) горизонтальной цилиндрической оболочки, свободно опёртой на обоих краях: линии — [10], точки — настоящая работа

Т а б л и ц а 2. Частоты колебаний (Гц) стальной цилиндрической оболочки, свободно опёртой на обоих краях

| m | j | $a = 0$ | | | | $a = 1$ | | |
|-----|-----|-----------|------|------|----------|-----------|------|----------|
| | | Эксп. [7] | [10] | [22] | 3D shell | Эксп. [7] | [10] | 3D shell |
| 1 | 3 | 640 | 629 | 651 | 640 | 250 | 234 | 252 |
| | 4 | 688 | 655 | 673 | 661 | 300 | 270 | 286 |
| | 5 | 995 | 942 | 956 | 943 | 430 | 422 | 434 |
| | 6 | 1430 | 1353 | 1361 | 1348 | 680 | 651 | 661 |
| | 7 | 1938 | 1853 | 1849 | 1842 | 970 | 940 | 956 |
| 2 | 3 | 2070 | 2067 | 2124 | 2102 | 813 | 784 | 825 |
| | 4 | 1430 | 1368 | 1429 | 1409 | 600 | 568 | 625 |
| | 5 | 1313 | 1248 | 1311 | 1274 | 625 | 561 | 620 |
| | 6 | 1570 | 1489 | 1541 | 1492 | 755 | 714 | 767 |
| | 7 | 2050 | 1927 | 1950 | 1941 | 1000 | 978 | 1025 |

чёткую границу жидкости по перемещениям конструкции в большинстве случаев не представляется возможным. Это связано с тем, что максимальная высота полуволн в окружном направлении не всегда наблюдается на той части боковой поверхности, которая взаимодействует с жидкой средой (рис. 4, 5). С целью определения особенностей, характерных для горизонтальных цилиндрических оболочек, содержащих жидкость, было проанализировано 25 первых форм колебаний. Уровень заполнения a варьировался в пределах от 0 до 1. Некоторые результаты приведены в табл. 3 и на рис. 4, 5. Отслеживая определённую частоту в спектре, можно заметить, что соответствующая ей форма колебаний изменяется. Подробно этот процесс представлен на рис. 4. Здесь показано, что форма (1,2) при $a = 0.9$ переходит в (1,4) и (1,5), но среди остальных рассмотренных режимов колебаний не реализуется. В дальнейшем она появляется вновь при $a \leq 0.5$ за счёт аналогичной трансформации другой формы. Такого рода изменения сопровождаются смещением спектра частот. По этой причине при уменьшении уровня жидкости частота, соответствующая первой форме (1,5), не растёт, а наоборот, незначительно снижается (см. рис. 3). Второй существенный перепад наблюдается при

Т а б л и ц а 3. Количество полуволн (m, j) для форм колебаний цилиндрической оболочки, свободно опёртой на обоих краях, при разном уровне заполнения жидкостью

| ω_i | Уровень заполнения a | | | | | | | | |
|------------|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 0.6 | 0.65 | 0.7 | 0.75 | 0.8 | 0.85 | 0.9 | 0.95 | 1 |
| 1 | (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) |
| 2 | (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) |
| 3 | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) |
| 4 | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) |
| 5 | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,4) | (1,2) | (1,2) |
| 6 | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,2) |
| 7 | (2,5) | (2,5) | (2,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) |
| 8 | (2,5) | (2,5) | (2,5) | (2,5) | (2,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) |
| 9 | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (2,5) | (2,5) | (2,5) | (2,5) | (2,5) | (2,5) |
| 10 | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (1,5) | (2,5) | (2,5) | (2,5) | (2,5) |

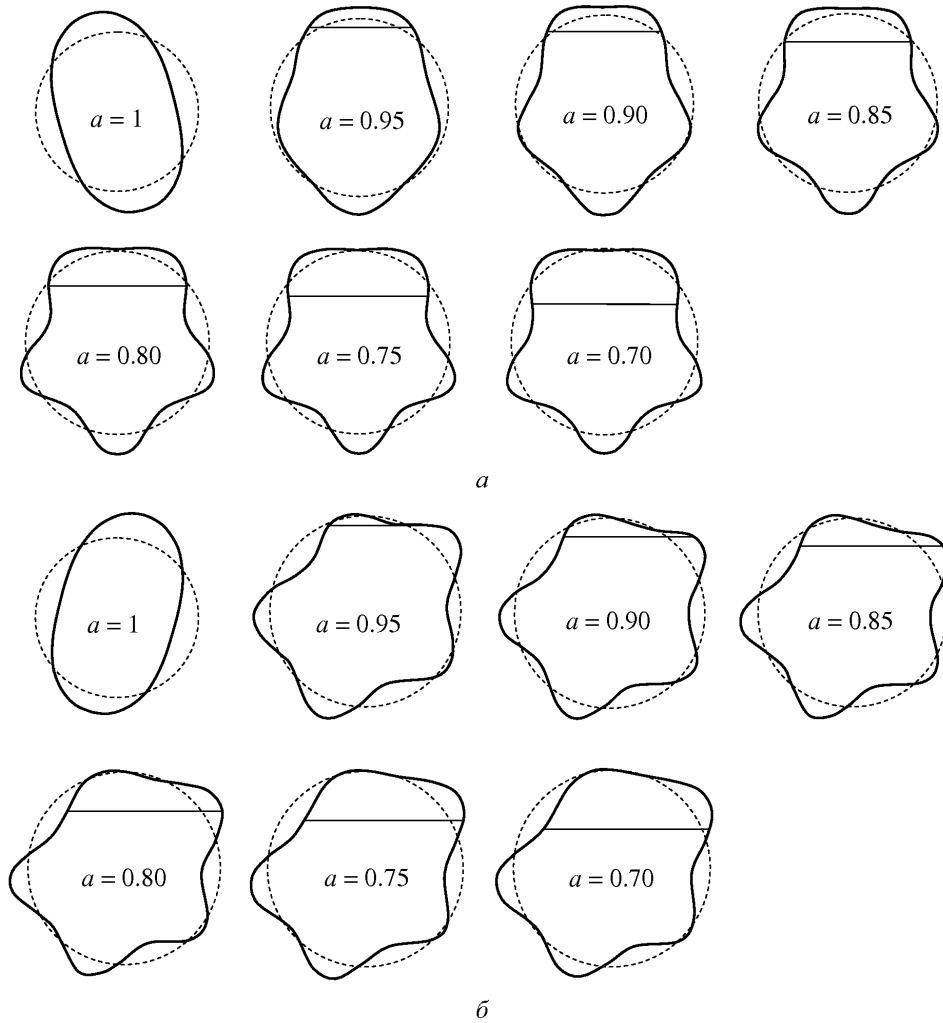


Рис. 4. Схематичное изображение пятой (*a*) и шестой (*б*) собственных форм колебаний горизонтальной цилиндрической оболочки, свободно опертой на обоих краях

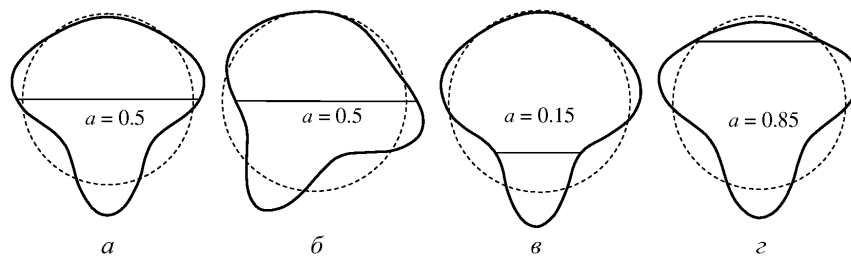


Рис. 5. Схематичное изображение собственных форм колебаний горизонтально расположенной цилиндрической оболочки, свободно опертой на обоих краях: *a* — $\omega_1 = 282$ Гц, *б* — $\omega_2 = 287$ Гц, *в* — $\omega_2 = 399$ Гц, *г* — $\omega_1 = 265$ Гц

$a = 0.75$ для другой комбинации мод $(1,5)$ (тёмные маркеры). Из табл. 3 и рис. 4 видно, что он обусловлен сменой режима колебаний частоты ω_5 . Таким образом, возможно существование нескольких форм с одинаковыми параметрами m и j , которые различаются величиной и расположением полуволн в окружном направлении. Например, при $a = 0.7$ реализуются четыре формы $(1,5)$ (см. табл. 3). Соответствующие им частоты

ω_5 , ω_6 и ω_9 , ω_{10} значительно различаются, потому что в спектре между ними находятся частоты ω_7 , ω_8 , которые относятся к совершенно иным формам колебаний.

Интересной особенностью обладают первые две формы колебаний, для которых при любых величинах параметра a перемещения всегда достигают максимальных значений в области контакта оболочки с жидкостью (см. рис. 5). Подобный факт был отмечен в работе [9] для системы с другими геометрическими и физическими параметрами.

2.3. Сравнительный анализ собственных колебаний вертикальных и горизонтальных цилиндрических оболочек

Первые шесть минимальных собственных частот колебаний горизонтальных цилиндрических оболочек при разном уровне заполнения жидкостью и двух вариантах граничных условий представлены на рис. 6. Физические и геометрические параметры системы принимались такими же, как для вертикальной конфигурации, рассмотренной в разделе 2.1. Зависимости, приведённые на рис. 2, 6, качественно отличаются друг от друга. Даже незначительное количество жидкости в горизонтальных цилиндрических оболочках приводит к заметному снижению минимальных собственных частот. Наиболее существенно это сказывается на конструкциях, зафиксированных на обоих краях (см. рис. 3 и рис. 6, б).

На рис. 7 приведено сравнение некоторых частот колебаний оболочек разной ориентации в зависимости от объёма жидкости. Поскольку для вертикальных конфигураций частоты входят парами (симметричная и антисимметричная), то из полученного спектра возьмём $\omega_1 = \omega_2$, $\omega_3 = \omega_4$ и $\omega_5 = \omega_6$. Для горизонтальных оболочек ограничимся рассмотрением только ω_1 , ω_3 , ω_5 . Соответствующие чётные частоты незначительно отличаются от них (см. рис. 6). В качестве варьируемого параметра используется величина $k = V_f/V_i$, где V_f и V_i — объёмы жидкости и внутренней полости оболочки. На основании сравнительного анализа кривых, приведённых на рис. 7 для разных вариантов граничных условий, можно заключить, что существенное влияние на динамические характеристики системы оказывает не только эквивалентная присоединённая масса жидкости, но и гидроупругое взаимодействие на смоченной поверхности S_σ . Это

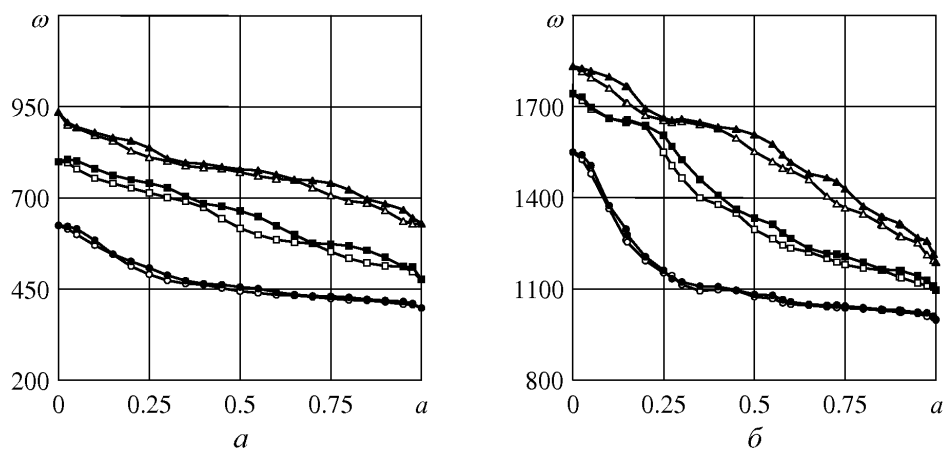


Рис. 6. Первые шесть минимальных собственных частот колебаний горизонтальной цилиндрической оболочки при разном уровне заполнения жидкостью: a — консольно закреплённая оболочка, b — оболочка, жёстко закреплённая на обоих краях

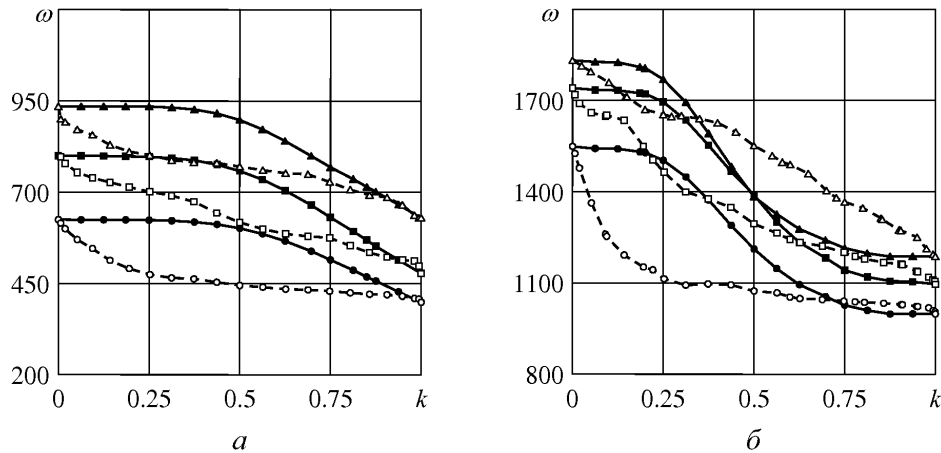


Рис. 7. Собственные частоты колебаний ω_1 , ω_3 , ω_5 (сверху вниз) горизонтальной (штриховая линия) и вертикальной (сплошная линия) цилиндрической оболочки при разном уровне заполнения жидкостью: *a* — оболочка, жёстко закреплённая на одном крае; *b* — оболочка, жёстко закреплённая на обоих краях

проявляется в том, что в большинстве случаев при одинаковых объёмах жидкой среды собственные частоты частично заполненных вертикально и горизонтально ориентированных оболочек не совпадают. Из рис. 7, *a* видно, что частоты закреплённой на одном краю горизонтально ориентированной конструкции ниже частот аналогичной вертикальной конфигурации. Исключением являются практически полностью заполненные оболочки, для которых разницу можно назвать несущественной. Более сложная зависимость наблюдается для граничных условий в виде жёсткого закрепления на обоих краях (рис. 7, *b*). Кривые ω_1 и ω_3 , соответствующие системам с разной ориентацией (штриховая и сплошная линии), пересекаются, причём это происходит при одинаковых объёмах жидкой среды. Однако для другого случая, когда оболочки заполнены наполовину ($k = 0.5$), имеет место достаточно значительное различие между сравниваемыми частотами.

Заключение

Для анализа собственных колебаний горизонтальных и вертикальных цилиндрических оболочек, полностью или частично заполненных жидкостью, предложены математическая модель и алгоритм её численной реализации. Проверка достоверности разработанного конечно-элементного алгоритма осуществлена путём сравнения полученных результатов с известными экспериментальными и теоретическими данными.

Представлен сравнительный анализ колебательных процессов и их характеристик для вертикально и горизонтально расположенных круговых цилиндрических оболочек, содержащих жидкость. Для нескольких вариантов граничных условий, задаваемых на краях конструкции, показано изменение собственных частот в зависимости от уровня жидкости. Установлено, что при частичном заполнении горизонтальных цилиндрических оболочек возможно существование более двух форм колебаний с одинаковым числом полуволн в окружном и меридиональном направлениях, которым соответствуют разные частоты в спектре. Особенности этих форм являются несимметричность и разная величина полуволн в окружном направлении. Для частично заполненных гори-

зонтальных оболочек даже незначительное количество жидкости приводит к уменьшению собственных частот колебаний, а для вертикально ориентированных конфигураций характерно наличие участка, на котором частоты колебаний при увеличении уровня жидкости остаются практически неизменными.

Список литературы

- [1] Шклярчук Ф.Н. Применение метода конечных элементов к расчёту неосесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью. Сб. науч. докл. 5 симп. ЦНТИ “Волна”. М., 1984. С. 284–289.
- [2] МОКЕЕВ В.В., ПАВЛЮК Ю.С. Эффективная процедура решения задач о собственных значениях при исследованиях взаимодействия конструкция — жидкость на основе конечно-элементных моделей // Механика твёрдого тела. 1992. № 4. С. 178–182.
- [3] MAHERI M.R., SEVERN R.T. Dynamic investigations of cylindrical structures in contact with liquid // Steel Structures: Advances in Design and Construction / Ed. R. Narayanan. Els. Appl. Sci. Publ., 1987. P. 643–652.
- [4] MAXUCH T., HORACEK J., TRNKA J., VESELY J. Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement // J. Sound Vib. 1996. Vol. 193, No. 3. P. 669–690.
- [5] BABU S.S., BHATTACHARYYA S.K. Finite element analysis of fluid-structure interaction effect on liquid retaining structures due to sloshing // Comput. Struct. 1996. Vol. 59, No. 6. P. 1165–1171.
- [6] LAKIS A.A., NEAGU S. Free surface effects on the dynamics of cylindrical shells partially filled with liquid // J. Sound Vib. 1997. Vol. 207, No. 2. P. 175–205.
- [7] LINDHOLM U.S., KANA D.D., ABRAMSON H.N. Breathing vibration of a circular cylindrical shell with an internal liquid // J. Aeronaut. Sci. 1962. Vol. 29. P. 1052–1059.
- [8] LAKIS A.A., BURSUC G., TOORANI M.H. Sloshing effect on the dynamic behavior of horizontal cylindrical shells // Nucl. Eng. Des. 2009. Vol. 239. P. 1193–1206.
- [9] AMABILI M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells // J. Sound Vib. 1996. Vol. 191, No. 5. P. 757–780.
- [10] SELMANE A., LAKIS A.A. Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid // J. Fluids Struct. 1997. Vol. 11. P. 111–134.
- [11] ПОСТНОВ В.А. Новая вариационная формулировка проблемы взаимодействия упругих конструкций с жидкостью // Проблемы прочности и пластичности. 2000. № 61. С. 5–12.
- [12] ERGIN A., TEMAREL P. Free vibration of a partially liquid-filled and submerged, horizontal cylindrical shell // J. Sound Vib. 2002. Vol. 254, No. 5. P. 951–965.
- [13] ERGIN A., PRICE W.G., RANDALL R., TEMAREL P. Dynamic characteristics of a submerged, flexible cylinder vibrating in finite water depths // J. Ship Res. 1992. Vol. 36, No. 2. P. 154–167.
- [14] НИТИКИТРАИВООН С., БАТНЕ К.Д. An arbitrary Lagrangian-Eulerian velocity potential formulation for fluid-structure interaction. // Comput. Struct. 1993. Vol. 47. P. 871–891.
- [15] БОЧКАРЁВ С.А. Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью // Вычисл. механика сплошных сред. 2010. Т. 3, № 2. С. 24–33.
- [16] БОЧКАРЁВ С.А., МАТВЕЕНКО В.П. Панельный флаттер вращающихся круговых оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // Там же. 2008. Т. 1, № 3. С. 25–33.

- [17] Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [18] Бочкарёв С.А., Матвеев В.П. Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 3. С. 189–199.
- [19] Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.
- [20] Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В. Численное моделирование упругой трубы с текущей жидкостью // Вестник ПГТУ. Механика. 2011. № 3. С. 5–14.
- [21] Бочкарёв С.А., Матвеев В.П. Конечно-элементный анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки с жидкостью // Вычисл. механика: Сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Пермского гос. техн. ун-та, 2006. Вып. 4. С. 3–12.
- [22] Лекомцев С.В. Конечно-элементные алгоритмы расчёта собственных колебаний трёхмерных оболочек // Вычисл. механика сплошных сред. 2012. Т. 5, № 2. С. 233–243.

*Поступила в редакцию 13 ноября 2012 г.,
с доработки — 1 марта 2013 г.*