

Численное исследование влияния формы вертикальных подвижек дна на образование поверхностных волн*

Л. В. НАДКРИНИЧНЫЙ

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия
e-mail: lmuten@iacp.dvo.ru

Представлены результаты численного моделирования образования и распространения поверхностных волн при подъёме части поверхности дна. Рассматриваются три формы подвижной части дна: остроконечная вершина, гайот и кальдера. Выявлены основные закономерности данного процесса, а именно, влияние параметров подвижной части дна на образование волн. Используется модель на основе уравнений мелкой воды в цилиндрической системе координат. Применяется разностная схема с неувеличивающейся полной вариацией (TVD-схема) на разностной сетке типа "С" по классификации Аракавы.

Ключевые слова: мелкая вода, волнообразование, вертикальные подвижки дна.

Введение

В работе рассматривается образование волн на поверхности жидкости при сильной деформации дна. Такое явление прежде всего относится к задачам моделирования волн цунами. Наиболее частой причиной возникновения цунами являются резкие вертикальные смещения дна океана на больших площадях во время сильных подводных землетрясений [1]. Однако процесс генерации зачастую не рассматривается напрямую, а считается, что возмущение водной поверхности полностью соответствует мгновенным остаточным деформациям дна [2]. При другом подходе [3] деформация дна рассматривается как функция времени, но при учёте того фактора, что вертикальное смещение дна происходит на морских участках со значительной глубиной, т. е. это смещение много меньше глубины водного слоя. Первый вариант в основном используется для моделирования именно распространения волн, второй же касается, скорее, процессов, связанных с возникновением волн.

Подробное описание моделирования волн типа цунами со статическим начальным возвышением части водной поверхности дано в работе [1], содержащей аналитические и статистические материалы по проблеме цунами. Там же приводятся оценки основных величин при моделировании в некотором приближении волн цунами сейсмостектонического происхождения. Влияние движения дна на образование волн рассматривается, например, в [4], где также отмечено, что моделирование образования волн цунами статической деформацией водной поверхности не является адекватным и не может в полной мере описать картину явления.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-98510р_восток_a), ДВО РАН (проекты 12-I-П15-04, 12-I-П18-03, 12-I-П23-02, 13-III-B-03-027).

В настоящей работе моделируются волны, образованные при вертикальном движении (подъёме) крупных подводных объектов различной формы, когда часть донной поверхности поднимается выше начального невозмущённого уровня водной поверхности. Рассматриваются формы донной поверхности, соответствующие широко распространённым горным образованиям в океане [5]. Примерами таких подводных объектов могут быть гайоты [6] и кальдеры [7]. Известно [8], что подводное препятствие в виде подводной горы или холма, действующее в качестве волнореза, сильно искажает движущуюся над ним волну. Надводное же, т. е. выступающее над водной поверхностью, препятствие по сути представляет собой урез, через который волны не проходят. В работе исследуется образование волн при движении подобных “препятствий”.

Представленная математическая постановка задачи отражает сложность описания рассматриваемого явления, что требует привлечения методов численного расчёта. Ещё в [9] был приведён перечень моделей, используемых для описания такого явления: упругая модель, линейные и нелинейные гидродинамические модели (дисперсионные, потенциальные модели, модели на основе уравнений мелкой воды). Там же указывалось, что наиболее приемлемой моделью генерации для численного моделирования волн цунами при реальной топографии дна является модель мелкой воды с переменной функцией дна. Поэтому в качестве модели явления выбрано приближение уравнений мелкой воды.

1. Математическая модель

Рассматривается осесимметричное течение идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной снизу дном Γ_0 , заданным функцией $z = -b(r, t)$, сверху — свободной поверхностью Γ_f , описываемой функцией $z = \eta(r, t)$, где $t \geq 0$ — время, и осью симметрии Γ_1 с абсциссой $r = 0$. Здесь r, z — координаты точек в цилиндрической системе координат с вертикальной осью Oz и горизонтальной осью Or , лежащей на невозмущённой свободной поверхности жидкости (рис. 1).

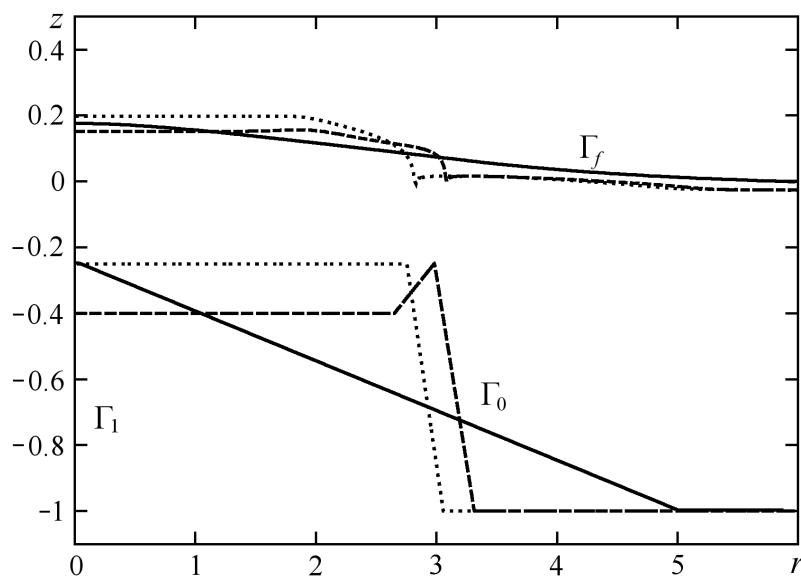


Рис. 1. Расчётный бассейн. Формы подводных образований: сплошная линия — остроконечная вершина, пунктир — гайот, штрих — кальдера

Модель строится с использованием безразмерных величин. Обезразмеривание проводится по формулам

$$(\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{\eta}, \tilde{b}) = \frac{(r, z, \eta, b)}{H_0}, \quad \tilde{t} = t \sqrt{\frac{g}{H_0}}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{\sqrt{gH_0}},$$

где H_0 — характерная глубина слоя жидкости, g — ускорение свободного падения, u — скорость жидкости. Символом \sim отмечены безразмерные величины (далее опущен).

При указанном обезразмеривании критериями подобия являются $L = \frac{A_b}{H_0}$ — отношение

линейных размеров и $F = \frac{V_b}{\sqrt{gH_0}}$ — число Фруда. Величины A_b и V_b означают максимальную высоту подъёма горы и постоянную скорость её роста, L определяет уровень, до которого поднимается подводная гора, причём $L > 1$ соответствует случаю, когда пик горы выступает выше начального невозмущённого уровня жидкости.

Форма дна задаётся следующим образом:

$$b(r, t) = \begin{cases} 1 - [tF + \mu] B_i(r), & t \leq \frac{L - \mu}{F}, \\ 1 - LB_i(r) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь функции $B_i(r)$ описывают основные формы рассматриваемых подводных гор ($i = 1, 2, 3$), μH_0 — начальная (минимальная) высота подводной горы. Поскольку рассматривается подводный объект, то задаётся коэффициент $\mu = 0.75$.

Для удобства дальнейших математических выкладок используются функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

и абсолютное значение

$$ABS(x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{1 - \varepsilon/2} \frac{x^2}{2\varepsilon}, & |x| \leq \varepsilon, \\ \frac{1}{1 - \varepsilon/2} \left[|x| - \frac{\varepsilon}{2} \right] & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $B_i(r)$ можно записать в виде

$$B_i(r) = \theta\left(\frac{\gamma\beta_i - r}{\beta_i}\right) \theta\left(\frac{r - \delta\beta_i}{\beta_i}\right) \left[1 - (1 - \alpha) ABS\left(\frac{r - \gamma\beta_i}{(\delta - \gamma)\beta_i}, \varepsilon\right) \right] + \\ + \alpha \theta\left(\frac{\delta\beta_i - r}{\beta_i}\right) + \theta\left(\frac{\beta_i - r}{\beta_i}\right) \theta\left(\frac{r - \gamma\beta_i}{\beta_i}\right) \left[1 - ABS\left(\frac{r - \gamma\beta_i}{(1 - \gamma)\beta_i}, \varepsilon\right) \right].$$

Здесь параметры α, δ, γ определяют форму подводных объектов, причём функция $B_i(r)$ при $\alpha = 1, \delta = \gamma = 0$ описывает простую остроконечную гору, при $\alpha = 1$ — гайот, при иных значениях параметров — кальдеру (см. рис. 1). В расчётах приняты следующие значения параметров: для простой горы $\alpha = 1, \delta = \gamma = 0$, для гайота $\alpha = 1, \delta = 0, \gamma = 0.9$, для кальдеры $\alpha = 0.8, \delta = 0.8, \gamma = 0.9$. Параметр $\varepsilon = 0.01$ необходим, чтобы немного сгладить склон.

Коэффициенты ширины подводной горы β_i ($\beta_i H_0$ — ширина основания подводной горы) задаются таким образом, чтобы объёмы

$$V_i(t) = 2\pi (tF + \mu) \int_0^{\beta_i} r B_i(r) dr = 2\pi (tF + \mu) D_i$$

всех объектов были равны, т. е. $V_1 = V_2 = V_3$ или $D_1 = D_2 = D_3$. Поскольку

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{6}\beta_1^2, & D_2 &= \frac{1}{6}\beta_2^2(1 + \gamma + \gamma^2), \\ D_3 &= \frac{1}{6}\beta_3^2(\alpha\delta^2 - \delta^2 + 1 + \gamma(1 - \delta + \alpha\delta) + \alpha\gamma^2), \end{aligned}$$

то исходя из [5] в качестве общего коэффициента ширины выбирается $\beta = \beta_1 = 5$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{\beta}{\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2}}, \\ \beta_3 &= \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\delta^2 - \delta^2 + 1 + \gamma(1 - \delta + \alpha\delta)\alpha\gamma^2}}. \end{aligned}$$

Следует заметить, что $\beta_1 > \beta_3 > \beta_2$ и, таким образом, наибольший уклон склона $\partial b/\partial r$ имеет гайот:

$$\max \left\{ \frac{L}{\beta_1}, \frac{L}{(1 - \gamma)\beta_2}, \frac{L}{(1 - \gamma)\beta_3} \right\} = \frac{L}{(1 - \gamma)\beta_2}.$$

Для моделирования течения жидкости используются уравнения мелкой воды в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} \eta_t + Q_r = -\frac{Q}{r}, \\ Q_t + (Qu)_r = -\frac{Qu}{r} - H\eta_r - ku|u|, \\ H = \eta + b, \\ Q = Hu, \end{cases} \quad (1)$$

где Q — расход жидкости, u — горизонтальная скорость жидкости, η — уровень свободной поверхности, $H = \eta + b$ — полная глубина, $ku|u|$ — сила трения, следующая из формулы Шези [10]. Трение необходимо, чтобы гасить катящиеся волны (rolling waves), образующиеся на склоне гор, причём коэффициент “шероховатости” k (коэффициент Шези) задаётся из условия

$$k > \frac{1}{4} \frac{\partial b}{\partial r} = \frac{1}{4} \max \left\{ \frac{L}{\beta_1}, \frac{L}{(1 - \gamma)\beta_2}, \frac{L}{(1 - \gamma)\beta_3} \right\} = \frac{L}{4(1 - \gamma)\beta_2},$$

что гарантирует отсутствие катящихся волн на склоне подводных гор. В расчётах значение коэффициента $k = 1.1 \frac{L}{4(1 - \gamma)\beta_2}$.

При значении L , близком или большем 1, возможно осушение части дна. Для учёта осушения в расчётах используется приём, описанный в [11], а именно, в точках суши расход и соответственно скорость полагаются нулевыми. Точки суши определяются из

условия $H < H_{\min}$, где H_{\min} — некоторая малая величина, имеющая, например, порядок размера донной шероховатости. Величина H_{\min} служит для указания, является ли часть выступившего дна осушенной или нет, а также задаёт некоторую прослойку жидкости на “осушенной” поверхности, чтобы сохранить устойчивость вычислений. Для расчётов в работе выбрано эмпирическое значение $H_{\min} = 5/N$, где N — количество ячеек расчётной сетки (см. ниже раздел 3). При этом расход и скорость жидкости зануляются только из ячейки, в которой $H < H_{\min}$, иначе скорость вычисляется обычным способом: $u = Q/H$.

В начальный момент времени $t = 0$ жидкость покоится ($u(r, 0) = 0$) и ограничена сверху невозмущённой свободной поверхностью $\eta(r, 0) = 0$, снизу — начальным уровнем дна $z = -b(r, 0)$. На оси симметрии Γ_1 ставится граничное условие $u(0, t \geq 0) = 0$. Область считается неограниченной, поэтому на внешней стенке задаётся условие свободного прохождения: $Q(r_{\text{внеш}}, t) = \sqrt{H(r_{\text{внеш}}, t)} \cdot \eta(r_{\text{внеш}}, t), t \geq 0$ [9], где $r_{\text{внеш}} > \beta$ — внешняя стенка.

Алгоритм численного решения представлен в разделе 3.

2. Результаты вычислительных экспериментов

В работе проводится сравнение изменения уровня жидкости для трёх типов подводных образований: остроконечная вершина, гайот, кальдера. Поскольку весь процесс показать графически не представляется возможным, даются пояснения рассматриваемых событий.

В расчётах используются модельные параметры: высота поднятия подводного объекта L и скорость этого поднятия F . При $L < 1$ подводный объект не достигает начального уровня свободной поверхности, при $L \geq 1$ подводный объект достигает начального уровня свободной поверхности или выступает выше этого уровня. Относительного параметра F необходимо сделать пояснения. В литературе (см., например, [1]) указывается, что период движения дна в реальных величинах составляет более 100 с. При глубине водного слоя 1 км безразмерный период составит более 10. В настоящей работе время T движения дна явно не указано, оно определяется из отношения параметров F и L : $T = (L - \mu)/F$. Например, при $T = 20$, $L = 1$ получаем $F = 1.25 \cdot 10^{-2}$. В расчётах с целью исследовать гипотетически крупное явление используются довольно большие значения F и L : $10^{-2} \leq F \leq 10^{-1}$, $0.9 \leq L \leq 1.1$.

Рассмотрим динамику волнообразования для трёх типов подводных гор. На рис. 2 представлены мареограммы — графики уровней свободной поверхности в точках расчётной области $r = 0$, $r = 3$ и $r = 8$, т. е. в центре, на склоне и на удалении от подводных объектов, для $L = 0.9$, $F = 10^{-1}$.

До момента остановки движения дна ($t = 1.5$) в точке $r = 0$ происходит равномерный рост свободной поверхности, причём значение $L - \mu = 0.15$ достигается только для гайота. Это связано с тем, что возмущение водного слоя передаётся от склона к центру со скоростью $c = \sqrt{1 - \mu}$ и проходит плоский участок гайота за время $\tau = \gamma\beta_2/c \simeq 5.5 > t$. Для кальдеры ситуация аналогичная, но возмущение от её пика идёт с большей скоростью $c = \sqrt{1 - \alpha\mu}$, в силу чего уровень свободной поверхности в центре кальдеры ниже, чем в центре гайота. На графике кальдеры виден локальный максимум, связанный с наличием пика (правильнее — кольца). Возмущение, двигаясь по склону пика к центру, ускоряется, затем на горизонтальном участке резко замедляется, из-за чего возрастает амплитуда возмущения. Таким образом, для случая кальдеры образуется внутренний

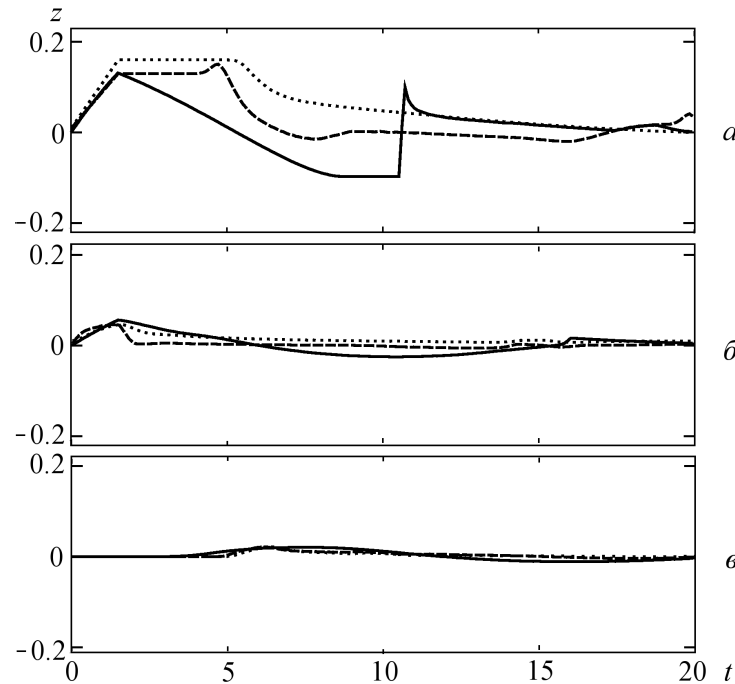


Рис. 2. Изменение уровня свободной поверхности в точках $r = 0$ (а), $r = 3$ (б), $r = 8$ (в); $F = 10^{-1}$, $L = 0.9$. Сплошная линия — остроконечная вершина, пунктир — гайот, штрих — кальдера

водоём, в котором возникают свои режимы течения. При остроконечной вершине уровень свободной поверхности над ней равномерно понижается до обмеления.

На графике остроконечной вершины в точке $r = 0$ виден резкий всплеск, вызванный затоплением пика волной отражения. Впоследствии пик горы остаётся затопленным. Для гайота и кальдеры подобный всплеск не наблюдается, поскольку ни в один момент времени обмеления не достигается. На графике кальдеры различимы локальные максимумы, один из которых указан выше. Это связано с волновым движением во внутреннем водоёме. Следует заметить, что в случае кальдеры водный уровень падает быстрее, чем в случае гайота. В последующие моменты времени водный уровень в точке $r = 0$ для всех трёх видов подводных образований постепенно понижается.

Вблизи склона (в точке $r = 3$) водный уровень для рассматриваемых типов гор ведёт себя схоже: в процессе движения дна постепенно повышается, затем происходит плавное понижение. Значительно отличается поведение свободной поверхности в случае кальдеры: уровень свободной поверхности после остановки движения дна резко падает. Тем самым пик кальдеры вносит свой вклад в течение: он снижает поток и гасит возмущения из внутреннего водоёма.

Образованные волны представлены на мареограммах в точке $r = 8$. Интересно отметить, что уровни свободной поверхности в этом случае для кальдеры и гайота совпадают, хотя в $r = 0$ и $r = 3$ они весьма различаются. Из графиков также следует, что результирующая волна в случае остроконечной вершины образуется раньше, чем в остальных двух случаях. Для кальдеры и гайота наблюдается локальный максимум (горб) на передней части волны. Такая неоднородность вызвана тем, что часть водного слоя захватывается этими подводными образованиями. Таким образом, результирующая волна не отражает первоначальную форму ни гайота, ни кальдеры.

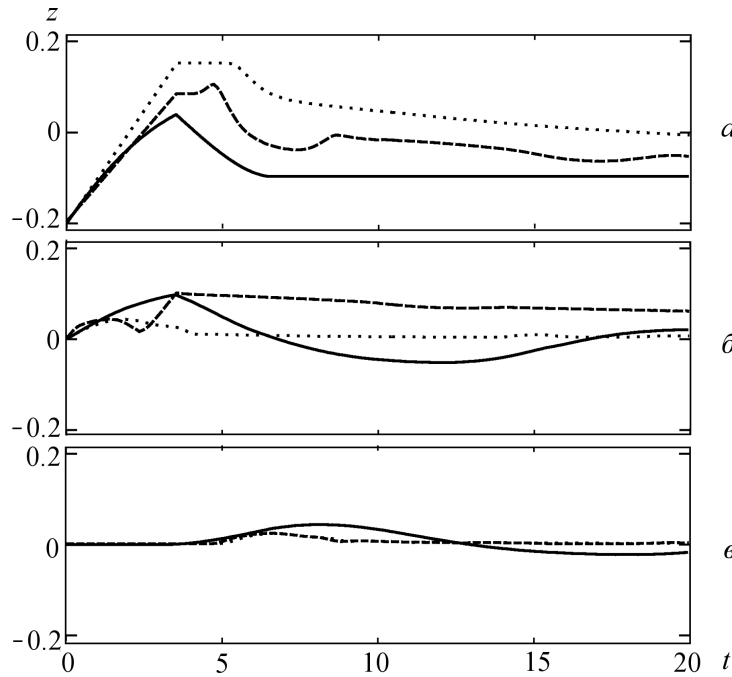


Рис. 3. Изменение уровня свободной поверхности в точках $r = 0$ (а), $r = 3$ (б), $r = 8$ (в); $F = 10^{-1}$, $L = 1.1$. Сплошная линия — остроконечная вершина, пунктир — гайот, штрих — кальдера

Рассмотрим результаты расчёта при $F = 10^{-1}$, $L = 1.1$, когда подводная гора выступает выше начального уровня свободной поверхности. На рис. 3 представлены мареограммы расчёта при указанных значениях параметров в точках $r = 0$, $r = 3$, $r = 8$. Поскольку объём жидкости, вытесненный движением подводной горы, будет больше, чем в предыдущем случае, то и амплитуда возмущений становится значительно больше. Теперь длительность подвижки дна составляет $t = (L - \mu)/F = 3.5$, до этого момента водный уровень для кальдеры и гайота равномерно повышается, поскольку возмущение от склона ещё не дошло до точки $r = 0$. С остроконечной вершины возмущение начинает сходиться ещё до остановки движения дна. В целом картины в точке $r = 0$ при $L = 0.9$ и $L = 1.1$ качественно схожи за исключением того, что в последнем случае обмеляются все три типа вершин и отсутствует повторное затопление остроконечной вершины. Однако обмеление кальдеры и гайота возникает намного позже соответствующего образования волны, в случае же остроконечной вершины результирующая волна образуется ещё до обмеления вершины, что видно на мареограммах в точке $r = 8$.

В случае кальдеры в точке $r = 3$ для значений параметра $L = 0.9$ и $L = 1.1$ различается поведение водного уровня: при $L = 1.1$, как и при $L = 0.9$, уровень вначале падает, но затем резко возрастает и медленно понижается. Здесь также вносит свой вклад пик кальдеры: до момента $t = (1 - \mu)/F = 2.5$ водный уровень ведёт себя, как и в случае $L = 0.9$, далее часть водного слоя запирается во внутреннем водоёме, внешний склон обмеляется, и уровень жидкости на нём поднимается равномерно вместе с дном. В случаях гайота и остроконечной вершины различия при $L = 0.9$ и $L = 1.1$ имеют только качественный характер.

Рассмотрим далее графики изменения уровня свободной поверхности во внешней точке $r = 8$ при различных значениях модельных параметров (рис. 4, 5). Прежде всего

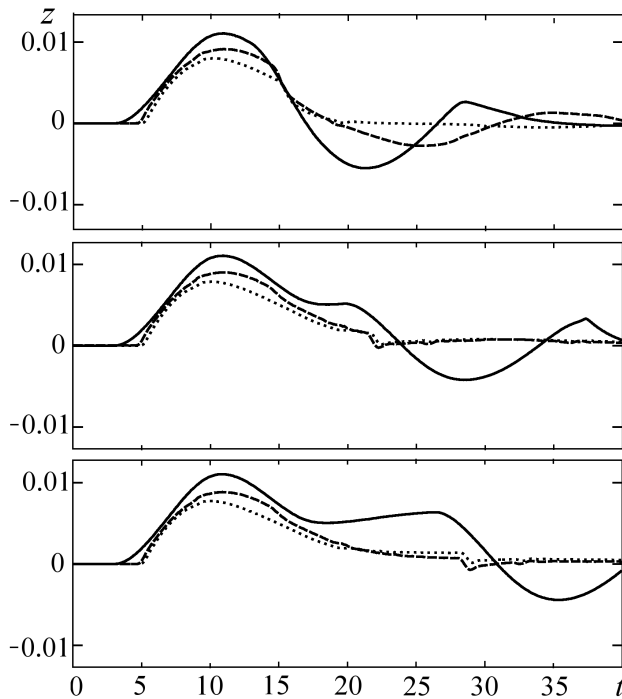


Рис. 4. Изменение уровня свободной поверхности ($F = 1.5 \cdot 10^{-2}$) в точке $r = 8$. Сплошная линия — остроконечная вершина, пунктир — гайот, штрих — кальдера. Сверху вниз: $L = 0.9$, $L = 1.0$, $L = 1.1$

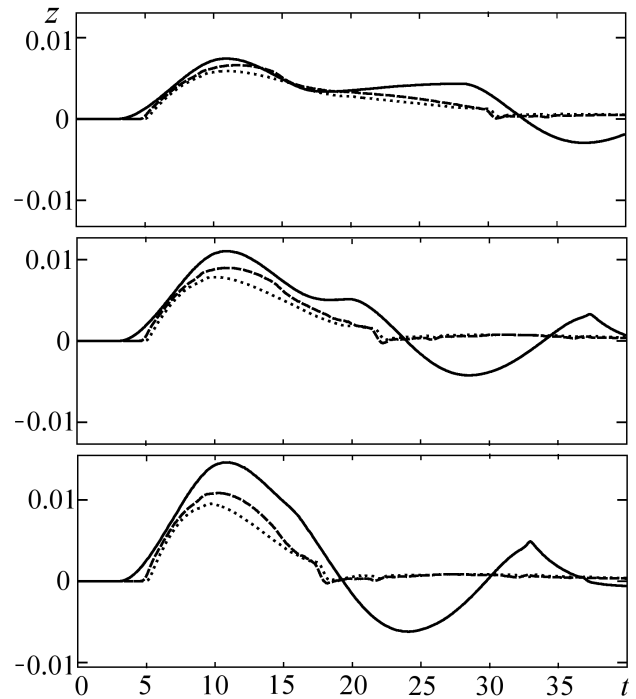


Рис. 5. Изменение уровня свободной поверхности ($L = 1.0$) в точке $r = 8$. Сплошная линия — остроконечная вершина, пунктир — гайот, штрих — кальдера. Сверху вниз: $F = 10^{-2}$, $F = 1.5 \cdot 10^{-2}$, $F = 2.0 \cdot 10^{-2}$

из представленных данных видно, что амплитуды и длины волн для гайота и кальдеры меньше, чем для остроконечной вершины. Более того, мареограммы кальдеры и гайота в большинстве случаев качественно совпадают, и лишь амплитуда в случае гайота меньше таковой в случае кальдеры. Если форма волны для гайота и кальдеры представляет собой уединённую волну, то в случае остроконечной вершины образуется волна сложной конфигурации: наблюдаются несколько локальных максимумов. Это связано с тем, что при некоторых значениях модельных параметров пик остроконечной вершины осушается и повторно затопляется, создавая таким образом широкую область возмущения. Для остроконечной вершины характерно наличие волны понижения, которая не наблюдается для гайота и кальдеры.

Из мареограмм на рис. 4, 5 следует, что при увеличении L незначительно возрастает амплитуда волны и заметно возрастает её длина. Напротив, при увеличении F амплитуда волны значительно возрастает, а её длина существенно падает. В целом можно полагать, что на “катастрофичность” результирующей волны влияет период движения дна $T = (L - \mu)/F$: с его уменьшением образуются более крупные волны. В крайнем случае, при $T = 0$, возникают самые крупные волны, что соответствует традиционному подходу к моделированию подобного явления, однако не отвечает действительности.

3. Алгоритм численного расчёта

Численные расчёты проводились для жидкости, заполняющей бассейн радиусом R . Отрезок $\Omega = [0; R]$ равномерно покрыт интервалами Ω_h с постоянным шагом h и коли-

чеством ячеек N в направлении оси Or . Согласно сетки типа “С” по классификации Аракавы [12] на границах каждого отрезка Ω_h находятся значения скорости u_i^n и расхода Q_i^n , а внутри интервалов — значения уровней свободной поверхности $\eta_{i+\frac{1}{2}}^n$ и дна $b_{i+\frac{1}{2}}^n$.

Используется явная численная схема с неувеличивающейся полной вариацией (TVD-схема) первого порядка точности по пространству и времени, основанная на работе [13]. В [13] даётся условие, при котором в данной схеме не будет увеличиваться полная вариация, т. е. она будет TVD-схемой. Причём для явной схемы это условие совпадает с условием устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви (КФЛ). Таким образом, условие КФЛ $C \cdot \Delta t / \Delta r < 1$ (где C — характерная скорость) обеспечивает устойчивость схемы и гарантирует отсутствие нефизических осцилляций в решении. Шаг по времени определяется на каждом временном слое согласно данному условию.

Рассмотрим алгоритм численного расчёта. Пусть на n -м слое по времени известны значения $Q_i^n, \eta_{i+\frac{1}{2}}^n$. По предложенным формулам вычисляются значения уровня дна $b_{i+\frac{1}{2}}^n$ и дополнительные величины

$$u_i^n = \begin{cases} Q_i^n / H_{i-\frac{1}{2}}^n, & Q_i^n > 0, \\ Q_i^n / H_{i+\frac{1}{2}}^n, & Q_i^n < 0, \\ 0, & Q_i^n = 0, \end{cases} \quad H_{i+\frac{1}{2}}^n = \eta_{i+\frac{1}{2}}^n + b_{i+\frac{1}{2}}^n.$$

Вычисление решения на $(n+1)$ -м слое состоит из нескольких этапов. Вначале из формулы

$$\tau^n = \lambda h \left[2 \max_i \sqrt{H_{i+\frac{1}{2}}^n} + \max_i |u_i^n| \right]^{-1}, \quad (2)$$

где $\lambda = 0.1$ — коэффициент устойчивости, определяется шаг по времени. Формула (2) содержит условие устойчивости и совпадающее с ним условие неувеличения полной вариации, где выражение $2 \max_i \sqrt{H_{i+\frac{1}{2}}^n} + \max_i |u_i^n|$ представляет собой сумму максимумов скоростей приходящей и уходящей гравитационных волн и скорости жидкости.

На следующем этапе вычисляются численные скорости переноса для уравнений из системы (1):

$$a_{i+1}^n = \begin{cases} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2(\eta_{i+\frac{1}{2}}^n - \eta_{i-\frac{1}{2}}^n)}, & \eta_{i+\frac{1}{2}}^n - \eta_{i-\frac{1}{2}}^n \neq 0 \\ u_{i+1}^n, & \eta_{i+\frac{1}{2}}^n - \eta_{i-\frac{1}{2}}^n = 0, \end{cases}$$

$$b_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{u_{i+1}^n Q_{i+1}^n - u_i^n Q_i^n}{Q_{i+1}^n - Q_i^n}, & Q_{i+1}^n - Q_i^n \neq 0 \\ u_{i+1}^n, & Q_{i+1}^n - Q_i^n = 0. \end{cases}$$

Далее на новом временном слое $(n+1)$ вычисляются значение свободной поверхности

$$\eta_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \eta_{i+\frac{1}{2}}^n - \frac{\tau^n}{h} \left[Q_{i+1}^n - Q_i^n + W(a_{i+1}^n) (\eta_{i+\frac{3}{2}}^n - \eta_{i+\frac{1}{2}}^n) - \right. \\ \left. - W(a_i^n) (\eta_{i+\frac{1}{2}}^n - \eta_{i-\frac{1}{2}}^n) \right] - \tau^n \frac{Q_{i+1}^n + Q_i^n}{2r_{i+\frac{1}{2}}} - (b_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - b_{i+\frac{1}{2}}^n),$$

значение потока массы

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\tau^n}{h} \left[\frac{(Q_{i+1}^n + Q_i^n)(u_{i+1}^n + u_i^n)}{4} - \frac{(Q_i^n + Q_{i-1}^n)(u_i^n + u_{i-1}^n)}{4} + \right. \\ \left. + W(b_{i+\frac{1}{2}}^n)(Q_{i+1}^n - Q_i^n) - W(b_{i-\frac{1}{2}}^n)(Q_i^n - Q_{i-1}^n) \right] - \\ - \tau^n \frac{2Q_i^n u_i^n}{r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{\tau^n}{h} \frac{H_{i-\frac{1}{2}}^n + H_{i+\frac{1}{2}}^n}{2} \left(\eta_{i+\frac{1}{2}}^n - \eta_{i-\frac{1}{2}}^n \right) - \tau^n k u_i^n |u_i^n|$$

и (по известным формулам) значение уровня дна $b_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$.

Приведённые выше выражения являются разностной аппроксимацией дифференциальной системы (1), причём слагаемые, содержащие $W(x)$, представляют собой схемную численную вязкость. Множитель $W(x)$ имеет вид

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\nu} + \nu \right), & |x| < \nu, \\ |x| & \text{иначе,} \end{cases}$$

где коэффициент $\nu = 0.125$.

Полученные значения на $(n+1)$ -м временном слое корректируются, чтобы удовлетворять граничным условиям. Согласно [14], условие полного отражения для сеток типа "С" по классификации Аракавы

$$Q_0^{n+1} = -Q_2^{n+1}, \quad Q_1^{n+1} = 0, \quad \eta_{\frac{1}{2}}^{n+1} = \eta_{\frac{3}{2}}^{n+1}.$$

Условие свободного прохождения имеет вид

$$Q_{N-1}^{n+1} = Q_{N-2}^{n+1} = \sqrt{H_{N-\frac{3}{2}}^{n+1}} \cdot \eta_{N-\frac{3}{2}}^{n+1}, \quad \eta_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} = \eta_{N-\frac{3}{2}}^{n+1}.$$

Учёт "осушения" ячеек рассчитывается следующим образом: если $H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \leq H_{\min}$, то $Q_i^{n+1} = 0$ при $Q_i^{n+1} < 0$ и $Q_{i+1}^{n+1} = 0$ при $Q_{i+1}^{n+1} > 0$.

Описанный алгоритм численного расчёта, как указано в начале данного раздела, основан на TVD-схеме Хартена с тем отличием, что оригинальная скалярная схема Хартена применяется к каждому уравнению переноса из системы (1) отдельно. До непосредственного использования схемы к настоящей задаче были проведены тестовые расчёты классической задачи распада разрыва (разрушение плотины), показавшие, что такой приём вполне допустим и имеет простую и производительную реализацию.

Означенные этапы численного интегрирования проводятся на каждом временном слое, пока не будет достигнут необходимый временной слой, соответствующий требуемому расчётному времени. Представленный алгоритм реализован на язык Си для параллельных вычислений с использованием библиотеки MPICH-2.0.

Заключение

Проведённые численные расчёты показали, что при вертикальном движении подводных гор образуются волны, причём для остроконечной вершины, гайота и кальдеры имеются различия как в эпицентрах волнообразования, так и в результирующих волнах. В эпицентрах волнообразования, т. е. непосредственно над подводным объектом,

течения различаются при движении всех трёх типов объектов. Результирующие волны для гайота и кальдеры практически совпадают — амплитуда для гайота незначительно меньше, чем для кальдеры. Волны, образованные движением остроконечной горы, значительно отличаются от таковых для кальдеры и гайота: из-за относительно быстрого осушения вершины остроконечной горы и её последующего затопления возникшие волны имеют сложную структуру в виде нескольких горбов с наличием волны понижения, не присутствующей в случаях гайота и кальдеры.

Показано различие результирующих волн для разных значений модельных параметров L , F — высоты поднятия подводного объекта и скорости этого поднятия. Установлено, что совместно параметры в виде зависимости $T = (L - \mu)/F$ — периода движения дна — влияют следующим образом: уменьшение периода приводит к возникновению наиболее крупных волн, причём с увеличением L лишь немного возрастает амплитуда результирующей волны, но заметно снижается длина волны. Увеличение F приводит к значительному росту амплитуды волны и уменьшению её длины.

При сравнении результирующих волн для гайота и кальдеры отмечено, что данные волны не отражают форму источника волнообразования. Заметное отличие результирующей волны от этих двух случаев наблюдается для остроконечной вершины из-за быстрого осушения и повторного затопления пика. Критерий осушения $L > 1$ для гайота и кальдеры влияет только на течение непосредственно над подводным объектом. Для остроконечной вершины при L , близком или большем 1, возможно осушение вершины с последующим затоплением и возникновением результирующей волны сложной конфигурации.

В данной постановке задачи наиболее крупные волны образуются при вертикальном движении остроконечной вершины.

Список литературы

- [1] ЛЕВИН Б.В., НОСОВ М.А. Физика цунами и родственных явлений в океане. М.: Янус-К, 2005. 360 с.
- [2] KOWALIK Z., KNIGHT W., LOGAN T., WHITMORE P. Numerical modeling of the global tsunamis: Indonesian tsunamis of 26 December 2004 // *Sci. of Tsunami Hazards*. 2005. Vol. 23, No. 1. P. 40–56.
- [3] DOTSSENKO S.F., SOLOVIEV S.L. On the role of residual displacements of ocean bottom in tsunami generation by underwater earthquakes // *Oceanology, English Translation*. 1995. Vol. 35, No. 1. P. 20–26.
- [4] НОСОВ М.А., КОЛЕСОВ С.В. Метод постановки начальных условий в задаче численного моделирования цунами // *Вестник Московского ун-та. Физика, Астрономия*. 2009. № 2. С. 96–99.
- [5] ЖУЛЁВА Е.В. Объёмы вулканических гор как фактор, определяющий формирование морфоструктуры ложа океана // *Океанология*. 2010. Т. 50, № 1. С. 114–120.
- [6] РАШИЛОВ В.А., НОВИКОВА П.Н., ДОЛГАЛЬ А.С. Подводящие каналы гайотов Вулканолог и Коцебу (Магеллановы горы, Тихий океан) // *Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле*. 2009. Т. 13, № 1. С. 98–106.
- [7] ЛОМТЕВ В.Л., ГУРИНОВ М.Г. Экструзии (плюмы) охотской окраины Курильской дуги близ кальдеры Львиная пасть (о-ва Итуруп) // *Литосфера*. 2008. № 1. С. 124–132.

- [8] НАДКРИНИЧНЫЙ Л.В. Численное исследование генерации поверхностных волн и прохода волн над подводным препятствием // Матем. моделирование. 2010. Т. 22, № 2. С. 148–160.
- [9] МАРЧУК АН.Г., ЧУБАРОВ Л.Б., ШОКИН Ю.И. Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука, 1983. 175 с.
- [10] СТОКЕР J.J. Water Waves. The Mathematical Theory With Applications. New York: Univ., Institute of Math. Sci., 1957. 600 p.
- [11] ФЕДОТОВА З.И. Обоснование численного метода для моделирования наката длинных волн на берег // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 5. С. 58–76.
- [12] МЕЗИНГЕР Ф., АРАКАВА А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Л.: Гидрометеоздат, 1979. 135 с.
- [13] YEE H.C., WARMING R.F., HARTEN A. Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations // J. of Comput. Phys. 1985. Vol. 57, No. 3. P. 327–360.
- [14] РОУЧ П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1972. 600 с.

*Поступила в редакцию 30 января 2012 г.,
с доработки — 14 февраля 2013 г.*