Об “истинно параллельной” и недетерминированной семантике временных элементарных сетевых систем

И. Б. Вирбицкайте, А. В. Быстров
Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, Россия
e-mail: `virb@iis.nsk.su, avb@iis.nsk.su`

Предлагается метод построения “истинно параллельной” и недетерминированной семантики дискретно-временных элементарных сетевых систем (ДВЭСС). В частности, построены семантики в терминах временных расширений последовательностей шагов, сетей-процессов и структур событий, а также показано взаимно-однозначное соответствие между данными семантическими представлениями в контексте ДВЭСС.

Ключевые слова: временные элементарные сетевые системы, семантика “истинного параллелизма”, недетерминированная семантика, временные последовательности шагов, временные сети-процессы, временные структуры событий.

Введение

Сети Петри — популярная модель параллельных систем и процессов, используемая как для теоретических исследований с целью установления фундаментальных закономерностей, присущих параллельным вычислениям, так и для практических приложений с целью проектирования корректных коммуникационных систем, производственных систем, систем управления движением транспорта, программных систем и т. д. Элементарные сетевые системы (ЭСС)[1] [1] являются подклассом сетей Петри, поскольку места такого рода систем могут содержать не более, чем по одной фишке, иначе говоря ЭСС моделируют выполнимость логических условий (наличие фишки в месте интерпретируется как “соответствующее условие выполнено”), а не счётчики, как в обычных сетях Петри. С одной стороны, ЭСС играют значительную роль в становлении и развитии теории сетей Петри: в контексте этой модели была показана разрешимость классических задач (достижимости, живости, отсутствия тупиков) [2], установлены теоретико-категорные взаимосвязи различных моделей параллелизма [3], разработаны эффективные методы верификации [4, 5]. С другой стороны, поскольку места ЭСС естественно моделируют двоичные датчики, исполнительные механизмы и внутреннюю память программируемых логических контроллеров, данная модель находит применение в индустриальных приложениях (см., например, [6, 7]). Следует отметить, что в настоящее время, когда концепция “Интернета вещей” становится реальностью и необходимо обеспечивать надёжное взаимодействие устройств с ограниченными вычислительными возможностями, таких, например, как радиочастотные датчики и разнообразные сенсоры, актуальность модели растёт.

[1]ЭСС иногда называются безопасными (ординарными) сетями Петри.

Построение и изучение “истинно параллельной” и недетерминированной семантики моделей сетей Петри позволяют лучше понять природу и установить закономерности процессов, протекающих в параллельных/распределённых системах. Отправной точкой в этих исследованиях стала работа [8], где были показаны тесные взаимосвязи между моделями сетей-процессов и первичных структур событий в контексте ЭСС. В 1980-х гг. наиболее активно изучались особенности и свойства семантики сетей-процессов ЭСС (см., например, [9, 10]). В 1990 г. Нильсен, Розенберг и Тиагараджан [11] показали, что такие семантические представления, как сети-процессы, трассы Мазуркевича, частично упорядоченные множества, первичные структуры событий, совпадают с точностью до изоморфизма в контексте ЭСС. Семантика локальных структур событий, которые являются обобщением первичных структур событий и базируются на понятии шагов — множеств параллельно выполняемых действий, была разработана для сетей Петри [12]. Кроме того, семантики решеток и структур событий были предложены в контексте сетей Петри с ингибиторными дугами [13]. В работах [14 – 18] представлены новые методы построения и изучения семантики сетей-процессов на основе последовательностей шагов параллельных переходов для сетей Петри и их ингибиторных обобщений.

Функционирование реальных параллельных систем в значительной степени зависит от временных параметров, поэтому многие модели теории параллелизма были дополнены понятием времени, что позволило описывать и исследовать не только качественные, но и количественные аспекты поведения систем. Наиболее популярными являются модели дискретно-временных сетей Петри [19, 20] и непрерывно-временных сетей Петри [21]. Временные расширения ЭСС также нашли свое применение на практике (см., например, [22 – 24]), поскольку они адекватно моделируют системы, в которых событию может быть приписана определённая длительность/задержка (например, количество тактов процессора, требуемое для выполнения команды, время срабатывания исполнительного механизма, задержка при считывании входных данных и т. д.). Однако введение и изучение временных характеристик в более абстрактные (семантические) “истинно параллельные” и недетерминированные модели были не столь активными. Семантика C-сетей (моделей сетей-процессов, включающих события и условия, находящиеся в отношениях причинной зависимости и параллелизма), в которых с каждым условием связана задержка до того момента времени, когда это условие считается выполненным, была предложена для моделей дискретно-временных ограниченных ординарных сетей Петри в работе [25], а семантика C-сетей, в которых с каждым событием связано время его выполнения, — для моделей непрерывно-временных ЭСС в [26]. Позднее [27, 28] в контексте непрерывно-временных ограниченных ординарных сетей Петри была исследована семантика O-сетей (моделей сетей-процессов, включающих события и условия, находящихся в отношениях причинной зависимости, параллелизма и недетерминированного выбора (конфликта)), в которых с каждым событием связан временной интервал его выполнения. Насколько нам известно, в литературе не представлены исследования по семантике структур событий (моделей, в которых события находятся в отношениях причинной зависимости, параллелизма и конфликта) временных моделей сетей Петри.

В настоящей работе предлагается метод построения “истинно параллельной” и недетерминированной семантики дискретно-временной элементарной сетевой системы (ДВЭСС) в терминах временных расширений последовательностей шагов (параллельных переходов ДВЭСС), сетей-процессов и структур событий. Сначала на основе множества временных последовательностей шагов конструируется множество согласованных с ними временных C-сетей и показывается существование взаимно-однозначного отображения между этими множествами. Затем на основе специального объединения C-сетей, согласованных с временными последовательностями шагов, разрабатывается семантика ДВЭСС в терминах временного расширения O-сетей, которая в дальнейшем трансформируется во временные структуры событий. При этом демонстрируется взаимно-однозначное соответствие между семантиками временных C-сетей и временных структур в контексте ДВЭСС.

1. Дискретно-временные элементарные сетевые системы

Рассмотрим ряд понятий, связанных со структурой и поведением временного расширения Рамхандани—Штарке [19, 20] модели ЭСС, которое будем называть дискретно-временной элементарной сетевой системой. Другими словами, под ДВЭСС понимается ЭСС, где с каждым переходом связана временная длительность (количество тактов) его срабатывания. Поведение ДВЭСС в значительной степени отличается от безвременного случая. Состояние ДВЭСС представляет собой разметку (множество выполненных условий) и множество работающих переходов с их остаточными длительностями срабатываний. Смена одного состояния в некоторый момент времени на другое состояние в следующий момент времени осуществляется посредством срабатывания шага (множества готовых переходов), при этом фишки удаляются из входных мест переходов при начале их срабатывания и добавляются в выходные места после истечения соответствующих временных длительностей, а остаточные длительности работающих переходов уменьшаются на один такт.

Пусть $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел и $\mathbf{N}^+$ — множество положительных натуральных чисел.

Определение 1. *Дискретно-временная элементарная сетевая система — это кортеж $\mathcal{TN} = (P,\ T,\ F,\ W,\ M_0,\ D)$, где $(P,\ T,\ F,\ M_0)$ — ЭСС с множеством P мест, множеством T переходов, отношением $F \subseteq (P \times T \cup T \times P)$, начальной разметкой $M_0 \subseteq P$ и $D : T \longrightarrow \mathbf{N}^+$ — временная функция, сопоставляющая каждому переходу натуральное число, соответствующее временной длительности срабатывания данного перехода.*

Неформально говоря, для каждого перехода t значение $D(t)$ определяет длительность срабатывания t, т. е. если t срабатывает в момент времени β, то фишки из входных мест перехода t исчезают в момент времени β и появляются в выходных местах перехода t в момент времени $\beta + D(t)$.

Для перехода $t \in T$ введём обозначения ${}^\bullet t = \{p \in P \mid (p,t) \in F\}$ (множество входных мест) и $t^\bullet = \{p \in P \mid (t,p) \in F\}$ (множество выходных мест).

Перейдем к рассмотрению поведения ДВЭСС $\mathcal{TN} = (P,T,F,M_0,D)$. *Состоянием* $\mathbb{M}$ в $\mathcal{TN}$ называют пару (M,A), где $M \subseteq P$ — *разметка* и $A \subseteq T \times \mathbf{N}^+$ (*множество работающих переходов с их остаточными длительностями срабатываний*) такое, что верно $\forall t \in T,\ \forall \alpha \geq D(t) \diamond (t,\alpha) \notin A$. *Начальное состояние* — это $\mathbb{M}_0 = (M_0, \emptyset)$.

Пусть $\mathcal{TN} = (P,T,F,W,M_0,D)$ — ДВЭСС и $\mathbb{M}$ — состояние в $\mathcal{TN}$. Тогда множество $\mathbb{R} \subseteq T$ — *шаг* (*множество переходов, готовых к срабатыванию) в состоянии* $\mathbb{M}$, если верно

$$\forall t \in \mathbb{R} \diamond {}^\bullet t \subseteq M \ \wedge\ \forall t \neq t' \in \mathbb{R} \diamond {}^\bullet t \cap {}^\bullet t' = \emptyset.$$

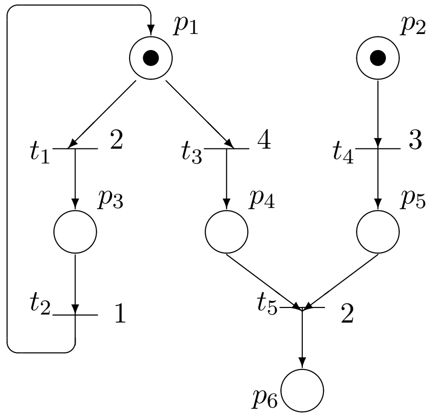

Рис. 1. Пример дискретно-временной элементарной сетевой системы

Срабатывание шага $\mathbb{R}$ в состоянии $\mathbb{M} = (M, A)$ в момент времени $\beta \geq 0$ *приводит* к состоянию $\mathbb{M}' = (M', A')$ в момент времени $\beta + 1$ (обозначается $\mathbb{M}[\mathbb{R} > \mathbb{M}'$), определяемому следующим образом:

$$M' = M \setminus \bigcup_{t\in\mathbb{R}} {}^{\bullet}t \cup \bigcup_{t\in\mathbb{R}\wedge D(t)=1} t^{\bullet} \cup \bigcup_{(t,1)\in A} t^{\bullet},$$

$$A' = \{(t, D(t)-1) \mid t \in \mathbb{R} \wedge D(t) > 1\} \ \cup\ \{(t, \alpha - 1) \mid (t, \alpha) \in A \wedge \alpha > 1\}.$$

В ДВЭСС $\mathcal{TN} = (P, T, F, W, M_0, D)$ $\sigma := \mathbb{M}_0[\mathbb{R}_1 > \mathbb{M}_1 \ \ldots\ \mathbb{M}_{n-1}[\mathbb{R}_n > \mathbb{M}_n$ — *временная последовательность шагов*, если $\mathbb{M}_{i-1}[\mathbb{R}_i > \mathbb{M}_i$ для всех $i \in \{1, \ \ldots, \ n\}$. Множество всех возможных временных последовательностей шагов в $\mathcal{TN}$ будем обозначать через $TSS(\mathcal{TN})$. Для σ пусть n обозначает её длину. *Префиксом* временной последовательности шагов σ будем называть её начальный фрагмент вида $\sigma_i = \mathbb{M}_0[\mathbb{R}_1 > \mathbb{M}_1 \ \ldots\ \mathbb{M}_{i-1}[\mathbb{R}_i > \mathbb{M}_i$ $(0 \leq i \leq n)$. Состояние $\mathbb{M}$ в $\mathcal{TN}$ называется *достижимым*, если существует временная последовательность шагов, заканчивающаяся в $\mathbb{M}$. Множество достижимых состояний в $\mathcal{TN}$ обозначается как $RS(\mathcal{TN})$. Будем говорить, что ДВЭСС *свободна от контактов*, если верно $\forall \mathbb{M} \in RS(\mathcal{TN}),\ \forall t \in T \diamond {}^{\bullet}t \subseteq M \Rightarrow t^{\bullet} \cap M = \emptyset$.

Пример 1. На рис. 1 изображена ДВЭСС, рядом с каждым переходом указана длительность его срабатывания. Начальное состояние — $\mathbb{M}_0 = ((1, 1, 0, 0, 0), \emptyset)$. Одна из временных последовательностей шагов имеет вид $\sigma := \mathbb{M}_0[\mathbb{R}_1 > \mathbb{M}_1[\mathbb{R}_2 > \mathbb{M}_2[\mathbb{R}_3 > \mathbb{M}_3[\mathbb{R}_4 > \mathbb{M}_4[\mathbb{R}_5 > \mathbb{M}_5[\mathbb{R}_6 > \mathbb{M}_6[\mathbb{R}_7 > \mathbb{M}_7$, где

$\mathbb{R}_1 = \{t_1, t_4\}$	$\mathbb{M}_1 = ((0, 0, 0, 0, 0, 0), \{(t_1, 1), (t_4, 2)\}),$
$\mathbb{R}_2 = \emptyset$	$\mathbb{M}_2 = ((0, 0, 1, 0, 0, 0), \{(t_4, 1)\}),$
$\mathbb{R}_3 = \{t_2\}$	$\mathbb{M}_3 = ((1, 0, 0, 0, 1, 0), \emptyset),$
$\mathbb{R}_4 = \{t_3\}$	$\mathbb{M}_4 = ((0, 0, 0, 0, 1, 0), \{(t_3, 3)\}),$
$\mathbb{R}_5 = \emptyset$	$\mathbb{M}_5 = ((0, 0, 0, 0, 1, 0), \{(t_3, 2)\}),$
$\mathbb{R}_6 = \emptyset$	$\mathbb{M}_6 = ((0, 0, 0, 0, 1, 0), \{(t_3, 1)\}).$

Далее рассматриваются только свободные от контактов дискретно-временные элементарные сетевые системы — будем называть их ДВЭСС.

2. Временные семантические модели

В данном разделе вводятся определения временных расширений таких семантических моделей, как C-, O-сети и структуры событий.

Прежде всего рассмотрим ряд вспомогательных понятий, связанных с моделями сетей-процессов.

Сеть — это тройка $N = (B, E, V)$, где B — множество условий, E — множество событий и $V \subseteq B \times E \cup E \times B$ — отношение инцидентности. Пусть $X = B \cup E$ и $\preceq = V^*$, где V^* — транзитивное и рефлексивное замыкание отношения V. Для элемента $x \in X$ определим ${}^\bullet x = \{y \mid y\ V\ x\}$ (множество входных элементов), $x^\bullet = \{y \mid x\ V\ y\}$ (множество выходных элементов), $\uparrow x = \{y \in X \mid x \preceq y\}$ (множество элементов-преемников) и $\downarrow x = \{y \in X \mid y \preceq x\}$ (множество элементов-предшественников). Кроме того, пусть $\mathrm{Min}(N) = \{b \in B \mid {}^\bullet b = \emptyset\}$ и $\mathrm{Max}(N) = \{b \in B \mid b^\bullet = \emptyset\}$. Будем говорить, что событие e — *непосредственный предшественник* события e' (обозначается $e \prec\!\!\cdot\ e'$), если $(e, b) \in V \wedge (b, e') \in V$ для некоторого условия b.

Концепция временных C-сетей [25] является естественным расширением идеи C-сетей [9], условия и события которых находятся в двух базовых отношениях — причинной зависимости и параллелизма — за счёт сопоставления каждому условию натурального числа, представляющего временную задержку до того момента времени, когда условие будет считаться выполненным.

Определение 2. *Временная C-сеть (помеченная над алфавитом Σ символов) — это кортеж $TN = (B,\ E,\ V,\ l,\ delay)$, где*

- *(B, E, V) — сеть, для которой выполнены следующие аксиомы:*
  1. *$\preceq = V^*$ — частичный порядок[2] (отношение причинной зависимости);*
  2. *$\forall b \in B \diamond |{}^\bullet b| \leq 1$;*
  3. *$\forall b \in B \diamond |b^\bullet| \leq 1$;*
- *$l : B \cup E \to \Sigma$ — помечающая функция, сопоставляющая каждому условию из B и каждому событию из E символ из Σ;*
- *$delay : B \to \mathbf{N}$ — временная функция условий, сопоставляющая каждому условию из B временную задержку до того, как данное условие станет выполненным.*

Для временной C-сети TN отношение *параллелизма* определяется следующим образом: $\smile = (X \times X \setminus (\preceq \cup \succeq))$.

Теперь введём понятие временной O-сети. Как и в классическом случае [8], условия и события временной O-сети находятся в трех базовых отношениях — причинной зависимости, параллелизма и конфликта. Вместе с тем каждому событию временной O-сети сопоставляется натуральное число, представляющее временную длительность (число тактов) выполнения события.

Определение 3. *Временная O-сеть (помеченная над алфавитом Σ символов) — это кортеж $\widehat{TN} = (\widehat{B},\ \widehat{E},\ \widehat{V},\ \widehat{l},\ \widehat{\Delta})$, где*

- *$(\widehat{B}, \widehat{E}, \widehat{V})$ — сеть, для которой выполнены аксиомы:*
  1. *$\preceq = \widehat{V}^*$ — частичный порядок (отношение причинной зависимости);*
  2. *$\forall b \in \widehat{B} \diamond |{}^\bullet b| \leq 1$;*
  3. *$\forall e_1, e_2 \in \widehat{E} \diamond (e_1 \neq e_2 \wedge {}^\bullet e_1 \cap {}^\bullet e_2 \neq \emptyset) \Rightarrow \uparrow e_1 \cap \uparrow e_2 = \emptyset$;*

[2] Антисимметричность исключает циклы.

— $\widehat{l} : \widehat{B} \cup \widehat{E} \to \Sigma$ — *помечающая функция, сопоставляющая каждому условию из B и событию из E символ из Σ;*
— $\widehat{\Delta} : \widehat{E} \to \mathbf{N}^+$ — *временная функция, сопоставляющая каждому событию из $\widehat{E}$ временную длительность его выполнения.*

Для временной O-сети $\widehat{TN}$ отношения *конфликта и параллелизма* определяются соответственно как $x \ \# \ y \Leftrightarrow \exists e_1 \neq e_2 \in \widehat{E} \diamond (e_1 \in \downarrow x) \wedge (e_2 \in \downarrow y) \wedge ({}^\bullet e_1 \cap {}^\bullet e_2 \neq \emptyset)$ и $\smile = ((\widehat{B} \cup \widehat{E})^2 \setminus (\preceq \cup \succeq \cup \#))$.

Структура событий [8] — это множество событий, связанных отношениями причинной зависимости, конфликта, параллелизма. Конфигурация (состояние) структуры событий — это подмножество выполненных событий. Переход из одной конфигурации в другую происходит при выполнении готового события. Во временной структуре событий (ВСС) каждому событию сопоставляется временная длительность его выполнения. Поведение ВСС в значительной степени отличается от классического случая. Временная конфигурация (состояние ВСС) — это пара, состоящая из множества выполненных событий и множества выполняющихся событий с их остаточными длительностями срабатываний. Выполнение множества готовых событий во временной конфигурации в некоторый момент времени приводит к новой временной конфигурации в следующий момент времени, при этом остаточные длительности выполняющихся событий уменьшаются на один такт.

Определение 4. *Временная структура событий (ВСС) (помеченная над алфавитом Σ символов) — это кортеж $TES = (E, \leq, \#, l, \delta)$, где*
— E — *множество событий;*
— $\leq \subseteq E \times E$ — *частичный порядок (отношение причинной зависимости), удовлетворяющий принципу конечности причин: $\forall e \in E \diamond \{e' \in E \mid e' \leq e\}$ — конечное множество;*
— $\# \subseteq E \times E$ — *симметричное и иррефлексивное отношение (отношение конфликта), удовлетворяющее принципу наследования конфликта: $\forall e, e', e'' \in E \diamond e \# e' \leq e'' \Rightarrow e \ \# \ e''$;*
— $l : E \to \Sigma$ — *помечающая функция, сопоставляющая каждому событию из E символ из Σ;*
— $\delta : E \to \mathbf{N}^+$ — *временная функция, сопоставляющая каждому событию из E временную длительность его выполнения.*

Для ВСС $TES = (E, \leq, \#, l, \delta)$ отношение параллелизма между событиями из E определяется следующим образом: $\smile = (E \times E) \setminus (< \cup > \cup \#)$. Также пусть $\downarrow e = \{e' \in E \mid e' \leq e\}$ и ${}^\bullet e = \{e' \in E \mid \neg \exists e'' \in E \mid e' \leq e'' \leq e\}$, $e^\bullet = \{e' \in E \mid \neg \exists e'' \in E \mid e \leq e'' \leq e'\}$.

Подмножество $\mathcal{C} \subseteq E$ — *левозамкнутое*, если верно $\forall e, e' \in E \diamond e \in \mathcal{C} \ \wedge \ e' \leq e \Rightarrow e' \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ — *бесконфликтное*, если верно $\forall e, \ e' \in \mathcal{C} \diamond \neg(e \ \# \ e')$; $\mathcal{C}$ — *конфигурация в* TES, если $\mathcal{C}$ — левозамкнутое и бесконфликтное множество. Множество всех конечных конфигураций в TES обозначается через $Conf(TES)$. Для $\mathcal{C} \in Conf(TES)$ определим множество множеств возможных событий $En(\mathcal{C}) = \{E' \subseteq (E \setminus \mathcal{C}) \mid (\forall e \neq e' \in E' \diamond e \smile e') \wedge (\mathcal{C} \cup E' \in Conf(TES))\}$.

Временной конфигурацией в TES будем называть двойку $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$, где $\mathcal{C} \in Conf(TES)$ и $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \times \mathbf{N}^+$ такие, что верно $\forall e \in \mathcal{C}, \forall \alpha \geq \delta(e) \diamond (e, \alpha) \notin \mathcal{A}$. Считаем, что $(\emptyset, \emptyset)$ — *начальная временная конфигурация* в TES. Множество событий $E' \in En(\mathcal{C})$ — *шаг во временной конфигурации* $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$, если для всех $e' \in E'$ выполнено

$$\forall e \in {}^\bullet e', \ \forall 0 < \alpha < \delta(e) \ \diamond \ (e, \alpha) \notin \mathcal{A}.$$

Выполнение множества E' событий во временной конфигурации $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ в момент времени k *приводит* к временной конфигурации $(\mathcal{C}', \mathcal{A}')$ в момент времени $k+1$ (обозначается $(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \stackrel{E'}{\to} (\mathcal{C}', \mathcal{A}')$), где $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup E'$ и

$$\mathcal{A}' = \{(e, \delta(e) - 1) \mid e \in E' \ \wedge \ \delta(e) > 1\} \ \cup \ \{(e, \alpha - 1) \mid (e, \alpha) \in \mathcal{A} \ \wedge \ \alpha > 1\}.$$

Выполнение временной структуры событий TES представляется последовательностью вида $(\emptyset, \emptyset) = (\mathcal{C}_0, \mathcal{A}_0) \stackrel{E_1}{\to} (\mathcal{C}_1, \mathcal{A}_1)$, ..., $(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{A}_{n-1}) \stackrel{E_n}{\to} (\mathcal{C}_n, \mathcal{A}_n)$. Будем говорить, что выполнение $(\emptyset, \emptyset) = (\mathcal{C}_0, \mathcal{A}_0) \stackrel{E_1}{\to} (\mathcal{C}_1, \mathcal{A}_1)$, ..., $(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{A}_{n-1}) \stackrel{E_n}{\to} (\mathcal{C}_n, \mathcal{A}_n)$ *согласовано с временной конфигурацией* $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ *в* TES *по функции* $time : \mathcal{C}_n \to \{1, \dots, n\}$, если верно $(\mathcal{C}, \mathcal{A}) = (\mathcal{C}_n, \mathcal{A}_n)$ и $time^{-1}(i) = E_i$ для всех $1 \leq i \leq n$. Тройка $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, time)$ называется *достижимой временной конфигурацией в* TES, если существует выполнение TES, согласованное с $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ по функции $time$. Множество достижимых временных конфигураций в TES будем обозначать как $RTC(TES)$.

3. Семантика ДВЭСС в терминах сетей-процессов

В данном разделе определяется семантика ДВЭСС на основе временных C-сетей [25].

Определение 5. *Пусть* $\mathcal{TN} = (P, T, F, W, M_0, D)$ *— ДВЭСС. Временной* C*-процесс в* $\mathcal{DTN}$ *— это временная* C*-сеть* $\pi = (B,\ E,\ V,\ l,\ delay)$ *такая, что выполнены следующие пункты:*

1. $l(B) \subseteq P$, $l(E) \subseteq T$.
2. $\forall e \in E \diamond l \mid_{^\bullet e}$ *— биекция между* $^\bullet e$ *и* $^\bullet l(e)$, $l \mid_{e^\bullet}$ *— биекция между* $e^\bullet$ *и* $l(e)^\bullet$.
3. $l \mid_{Min(\pi)}$ *— биекция между* $Min(\pi)$ *и* M_0.
4. $\forall e \in E\ \forall b_1, b_2 \in e^\bullet \diamond delay(b_1) = delay(b_2)$.
5. $\forall b \in B \diamond [b \notin Max(\pi) \ \vee \ b \in (Min(\pi) \cap Max(\pi))] \Longrightarrow delay(b) = 0$.
6. $\forall b \in Max(\pi) \setminus Min(\pi) \diamond delay(b) \in \{0,\ \dots,\ D(l(^\bullet b)) - 1\}$.

Пункты 1–3 определяют C-процесс в безвременном случае, остальные — непосредственно связаны с временными характеристиками.

Введём понятие согласованности между временными последовательностями шагов и временными C-процессами в ДВЭСС.

Определение 6. *Пусть* $\mathcal{TN} = (P, T, F, W, M_0, D)$ *— ДВЭСС и* $\sigma := \mathbb{M}_0 = (M_0, A_0)$ $[\mathbb{R}_1 > \mathbb{M}_1 = (M_1, A_1) \dots \mathbb{M}_{n-1} = (M_{n-1}, A_{n-1})\ [\mathbb{R}_n > \mathbb{M}_n = (M_n, A_n)$ *— временная последовательность шагов в* $\mathcal{TN}$. *Тогда* σ *согласована с временным* C*-процессом* $\pi = (B,\ E,\ V,\ l,\ delay)$ *в* $\mathcal{TN}$ *по функции* $time : E \to \{1,\ \dots,\ n\}$, *если и только если выполнены следующие свойства:*

1. $\forall i \in \{1,\ \dots,\ n\} \diamond l \mid_{time^{-1}(i)}$ *— биекция между* $time^{-1}(i)$ *и* $\mathbb{R}_i$.
2. $A_n = \{(l(e), delay(b)) \mid e \in E,\ b \in e^\bullet \cap Max(\pi),\ delay(b) > 0\}$.

Определение 7. *Пусть* $\sigma := \mathbb{M}_0[\mathbb{R}_1 > \mathbb{M}_1\ \dots\ \mathbb{M}_{n-1}[\mathbb{R}_n > \mathbb{M}_n \in TSS(\mathcal{TN})$.

$\sigma := \mathbb{M}_0$. *Тогда* $\pi_{\mathbb{M}_0} = (B_{\mathbb{M}_0},\ E_{\mathbb{M}_0} = \emptyset,\ V_{\mathbb{M}_0} = \emptyset,\ l_{\mathbb{M}_0},\ delay_{\mathbb{M}_0}$, *где* $B_{\mathbb{M}_0} = \{(b_p, \emptyset) \mid p \in M_0\}$, $l_{\mathbb{M}_0}(b_p, \emptyset) = p$ *и* $delay_{\mathbb{M}_0}(b_p, \emptyset) = 0$ *для всех* $(b_p, \emptyset) \in B_{\mathbb{M}_0}$. *Кроме того,* $time_{\mathbb{M}_0} = \emptyset$.

$\sigma \neq \mathbb{M}_0$. *Пусть* $\sigma' = \mathbb{M}_0\ [\mathbb{R}_1 > \mathbb{M}_1 \dots \mathbb{M}_{n-2}\ [\mathbb{R}_{n-1} > \mathbb{M}_{n-1}$ *и предполагается, что* $\pi_{\sigma'}$ *и* $time_{\sigma'}$ *определены.*

1. *Пусть* $\widetilde{B}_\sigma = \emptyset$, $\widetilde{E}_\sigma = \emptyset$, $\widetilde{V}_\sigma = \emptyset$, $\widetilde{l}_\sigma = \emptyset$, $\widetilde{delay}_\sigma = \emptyset$, $\widetilde{time}_\sigma = \emptyset$.

2. Для каждого перехода $t \in \mathbb{R}_n$ устанавливается:

2.1. $H = \emptyset$ *и для каждого места* $p \in {}^\bullet t$ *в множество* H *добавляется условие* $(b_p, H') \in Max(\pi_{\sigma'}) \cap l_{\sigma'}^{-1}(p)$ *такое, что* $delay_{\sigma'}(b_p, H') = 0$.

2.2. В множество $\widetilde{E}_\sigma$ *добавляется событие* (e_t, H) *и определяются:*

$$\widetilde{V}_\sigma = \widetilde{V}_\sigma \cup \{((b_p, H'), (e_t, H)) \mid (b_p, H') \in H\},$$
$$\widetilde{l}_\sigma(e_t, H) = t,$$
$$\widetilde{time}_\sigma(e_t, H) = n.$$

2.3. Для каждого места $p' \in t^\bullet$ *в множество* $\widetilde{B}_\sigma$ *добавляется условие* $(b_{p'}, \{(e_t, H)\})$ *и определяются:*

$$\widetilde{V}_\sigma = \widetilde{V}_\sigma \cup \{((e_t, H), (b_{p'}, \{(e_t, H)\}))\},$$
$$\widetilde{l}_\sigma(b_{p'}, \{(e_t, H)\}) = p',$$
$$\widetilde{delay}_\sigma(b_{p'}, H') = D(t) - 1.$$

Тогда $time_\sigma$ *и* π_σ *строятся следующим образом:* $time_\sigma = time_{\sigma'} \cup \widetilde{time}_\sigma$ *и* $\pi_\sigma = (B_\sigma = B_{\sigma'} \cup \widetilde{B}_\sigma,\ E_\sigma = E_{\sigma'} \cup \widetilde{E}_\sigma,\ V_\sigma = V_{\sigma'} \cup \widetilde{V}_\sigma,\ l_\sigma = l_{\sigma'} \cup \widetilde{l}_\sigma,\ delay_\sigma = delay' \cup \widetilde{delay}_\sigma)$, *где*

$$delay'(b_p, H) = \begin{cases} 0, & \text{если } (b_p, H) \in B_{\sigma'} \ \wedge \ delay_{\sigma'}(b_p, H) = 0, \\ delay_{\sigma'}(b_p, H) - 1, & \text{если } (b_p, H) \in B_{\sigma'} \ \wedge \ delay_{\sigma'}(b_p, H) > 0. \end{cases}$$

Определим множество $TP(\mathcal{TN}) = \{(\pi_\sigma, time_\sigma) \mid \sigma \in TSS(\mathcal{TN})\}$, которое является представлением семантики ДВЭСС в терминах временных C-процессов.

Лемма 1.

1. $\forall (x_y, H) \in B_\sigma \cup E_\sigma \diamond {}^\bullet(x_y, H) = H$ *и* $l_\sigma(x_y, H) = y$.

2. $\forall (e_t, H) \in E_\sigma \diamond |{}^\bullet(e_t, H)| = |{}^\bullet t|$ *и* $|(e_t, H)^\bullet| = |t^\bullet|$.

3. $\forall (b_p, H) \in B_\sigma \diamond |{}^\bullet(b_p, H)| \le 1$ *и* $|(b_p, H)^\bullet| \le 1$.

4. $\forall (b_p, H) \in B_\sigma \diamond$
$\exists \sigma' \in TSS(\mathcal{TN})$ *такая, что* σ' *— префикс* σ *и* $(b_p, H) \in Max(\pi_{\sigma'})$.

5. $\forall (b_p, H) \in B_\sigma \diamond$
$((b_p, H) \notin Max(\pi_\sigma) \ \vee \ (b_p, H) \in (Min(\pi_\sigma) \cap Max(\pi_\sigma))) \Rightarrow delay_\sigma(b_p, H) = 0$.

6. $\forall (b_p, H) \in Max(\pi_\sigma) \setminus Min(\pi_\sigma) \diamond delay_\sigma((b_p, H)) \in \{0, \ \ldots, \ l_\sigma({}^\bullet(b_p, H)) - 1\}$.

7. $\forall (e_t, H) \ne (e_{t'}, H') \in \widetilde{E}_\sigma \diamond \neg((e_t, H) \prec_\sigma (e_{t'}, H'))$.

8. $l_\sigma \mid_{\widetilde{E}_\sigma}$ *— биекция между* $\widetilde{E}_\sigma$ *и* $\mathbb{R}_n$.

9. $l_\sigma \mid_{Min(\pi_\sigma)}$ $(l_\sigma \mid_{Max(\pi_\sigma)})$ *— биекция между* $Min(\pi_\sigma)$ *и* M_0 $(Max(\pi_\sigma)$ *и* $M_n)$.

10. $A_n = \{(l_\sigma(e_t, H), delay_\sigma(b_p, H')) \mid (b_p, H') \in (e_t, H)^\bullet \cap Max(\pi_\sigma), delay_\sigma(b_p, H') > 0\}$.

11. $\forall t \in \mathbb{R}_n, \forall p \in {}^\bullet t \diamond (b_p, H') \in Max(\pi_{\sigma'}) \cap l_{\sigma'}^{-1}(p) \Rightarrow delay_{\sigma'}(b_p, H') = 0$.

Доказательство. Доказательство леммы 1 следует из построения, приведённого в определении 7, и того, что $\mathcal{TN}$ — свободная от контактов ДВЭСС.

Предложение 1. *Пусть* $\mathcal{TN}$ *— ДВЭСС. Тогда* $\sigma \in TSS(\mathcal{TN})$ *согласована с временным* C*-процессом* π_σ *в* $\mathcal{TN}$ *по функции* $time_\sigma$.

Доказательство. Сначала покажем, что структура π_σ действительно является временным C-процессом в $\mathcal{TN}$. По построению, $(B_\sigma, E_\sigma, V_\sigma)$ — сеть. Транзитивность и рефлексивность V_σ^* очевидны. Антисимметричность V_σ^* обеспечивается построением множества H каждого элемента (x_y, H) сети. Используя пункт 3 леммы 1, имеем $\forall (b_p, H) \in$

$B_\sigma \diamond |^\bullet(b_p, H)| \leq 1$ и $|(b_p, H)^\bullet| \leq 1$. Функция $l_\sigma : (B_\sigma \cup E_\sigma) \to (P \cup T)$ помечает каждое условие (b_p, H') из B_σ местом p из P и каждое событие (e_t, H) из E_σ переходом t из T. Функция $delay_\sigma : B_\sigma \to \mathbf{N}$ сопоставляет каждому условию (b_p, H') из B_σ временную задержку до того, как данное условие станет выполненным, т. е. значение $delay(b_p, H')$ установится в 0. Тогда π_σ — временная C-сеть. Справедливость пунктов определения 5 очевидным образом следует из построения π_σ и пунктов 1, 2, 5, 6, 8 леммы 1. Таким образом, π_σ — временной C-процесс в $\mathcal{TN}$. Ясно, что $time_\sigma$ — функция. Согласованность σ с π_σ по $time_\sigma$ обеспечивается построением функции $time_\sigma$ и пунктами 8, 10 леммы 1. □

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{TN}$ — ДВЭСС. Тогда отображение $f : TSS(\mathcal{TN}) \to TP(\mathcal{TN})$, заданное следующим образом: $\forall \sigma \in TSS(\mathcal{TN}) \diamond f(\sigma) = (\pi_\sigma, time_\sigma)$, является биекцией.*

Доказательство. Заметим, что верно $\sigma = \widetilde{\sigma} \Rightarrow \pi_\sigma = \pi_{\widetilde{\sigma}} \wedge time_\sigma = time_{\widetilde{\sigma}}$. Сюръективность f очевидна. Покажем инъективность f. Предположим, что $\pi_\sigma = \pi_{\widetilde{\sigma}}$ и $time_\sigma = time_{\widetilde{\sigma}}$. Ясно, что длины последовательностей σ и $\widetilde{\sigma}$ совпадают. Доказательство проводится индукцией по длине n.

$n = 0$. Очевидно, что $\sigma = \widetilde{\sigma} := \mathbb{M}_0$.

$n > 0$. По предположению индукции имеем $\sigma' = \widetilde{\sigma}' = \mathbb{M}_0[\mathbb{R}_1 > \mathbb{M}_1 \ \ldots \ \mathbb{M}_{n-2}[\mathbb{R}_{n-1} > \mathbb{M}_{n-1}$. Пусть $\mathbb{M}_{n-1}[\mathbb{R}_n > \mathbb{M}_n$ в σ и $\mathbb{M}_{n-1}[\widetilde{\mathbb{R}}_n > \widetilde{\mathbb{M}}_n$ в $\widetilde{\sigma}$. Поскольку $time_\sigma^{-1}(n) = time_{\widetilde{\sigma}}^{-1}(n)$ и $l_\sigma = l_{\widetilde{\sigma}}$, то $\mathbb{R}_n = \widetilde{\mathbb{R}}_n$. Тогда $\mathbb{M}_n = \widetilde{\mathbb{M}}_n$, в силу определения срабатывания шага $\mathbb{R}_n$ в состоянии $\mathbb{M}_{n-1}$ в момент времени $n-1$.

Таким образом, f — биекция. □

Пример 2. На рис. 2 изображен временной C-процесс в ДВЭСС (см. рис. 1). Чтобы не загромождать рисунок, слева от элементов указаны не их имена, а соответствующие значения функций l и $delay$ для условий. Временная последовательность шагов σ в ДВЭСС из примера 1 согласована с этим временным C-процессом по функции $time$, значения которой показаны справа от событий.

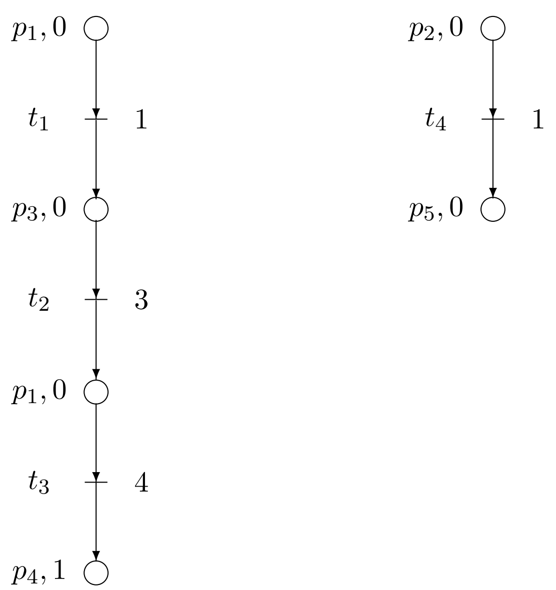

Рис. 2. Временной C-процесс в ДВЭСС, показанной на рис. 1

4. Семантика ДВЭСС в терминах структур событий

Для изучения поведения ДВЭСС $\mathcal{TN}$ в целом определим операцию развёртки следующим образом: сначала для каждой временной последовательности шагов $\sigma \in TSS(\mathcal{TN})$ строим согласованный с ней временной C-процесс $(B_\sigma,\ E_\sigma,\ V_\sigma,\ l_\sigma,\ delay_\sigma)$ (см. определение 7), а затем полагаем:

— $\widehat{B} = \cup_{\sigma \in TSS(\mathcal{TN})} B_\sigma$;

— $\widehat{E} = \cup_{\sigma \in TSS(\mathcal{TN})} E_\sigma$;

— $\widehat{V} = \cup_{\sigma \in TSS(\mathcal{TN})} V_\sigma$;

— $\widehat{l}(x_y, H) = y$ для всех $(x_y, H) \in (\widehat{B} \cup \widehat{E})$;

— $\widehat{\Delta}(e_t, H) = D(l_\sigma(e_t, H))$ для всех $(e_t, H) \in \widehat{E}$, где $\sigma \in TSS(\mathcal{TN})$ и $(e_t, H) \in E_\sigma$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $X_\sigma = B_\sigma \cup E_\sigma$ и $\widehat{X} = \widehat{B} \cup \widehat{E}$.

Пример 3. Для ДВЭСС, приведенной на рис. 1, начальный фрагмент такой развёртки представлен на рис. 3, где рядом с элементами указаны не их имена, а соответствующие значения функции $\widehat{l}$. Кроме того, рядом с событиями указаны соответствующие значения функции $\widehat{\Delta}$.

Лемма 2. *Пусть* $(x_y, H), (x'_{y'}, H') \in \widehat{X}$. *Тогда*

1. $(x_y, H)\ \widehat{V}\ (x'_{y'}, H') \ \Leftrightarrow\ (x_y, H) \in H'$.

2. $(x_y, H)\ \widehat{\preceq}\ (x'_{y'}, H') \ \Leftrightarrow\ \forall \sigma \in TSS(\mathcal{TN}) \diamond$
$[(x'_{y'}, H') \in X_\sigma \ \Rightarrow\ (x_y, H) \in X_\sigma \ \wedge\ (x_y, H) \preceq_\sigma (x'_{y'}, H')]$.

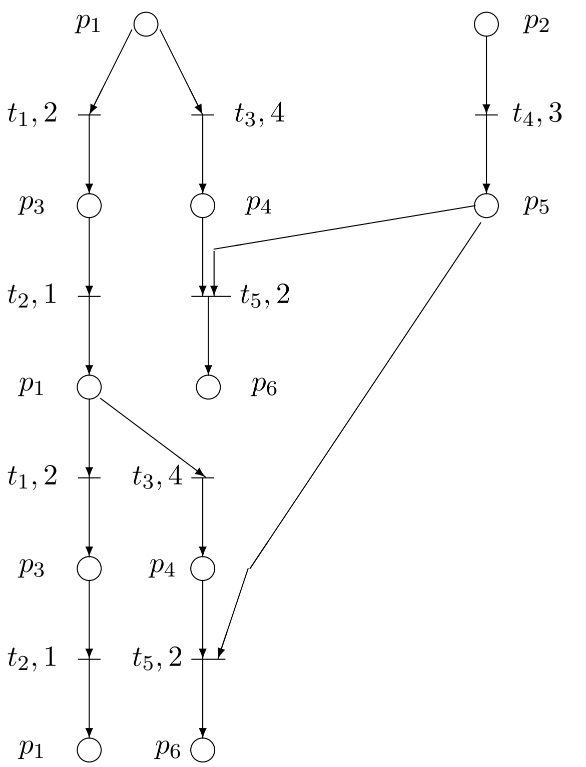

Рис. 3. Начальный фрагмент развёртки для ДВЭСС, приведённой на рис. 1

Доказательство. Рассмотрим доказательство справедливости пункта 1. В силу определения отношения $\widehat{V}$, имеем $(x_y, H)\ \widehat{V}\ (x'_{y'}, H') \Leftrightarrow \exists\sigma \in TSS(\mathcal{TN}) \diamond (x_y, H)\ V_\sigma\ (x'_{y'}, H')$. Тогда, согласно пункту 1 леммы 1, верно $(x_y, H)\, V_\sigma\, (x'_{y'}, H') \iff (x_y, H) \in H'$.

Теперь докажем справедливость пункта 2. Прежде всего отметим, что $(x_y, H) \widehat{\preceq} (x'_{y'}, H') \Leftrightarrow \exists (x_1, H_1), (x_2, H_2), \ldots, (x_n, H_n) \in \widehat{X} (n \geq 1)$ такие, что $(x_y, H) = (x_1, H_1)$, $(x_n, H_n) = (x'_{y'}, H')$ и для $1 \leq i \leq n$ верно $(x_i, H_i)\, \widehat{V}\, (x_{i+1}, H_{i+1})$. Далее будем доказывать индукцией по n.

$n = 1$. Очевидно.

$n > 1$. В силу пункта 1 данной леммы, имеем $(x_1, H_1)\ \widehat{V}\ (x_2, H_2) \Leftrightarrow (x_1, H_1) \in H_2$. В то же время, согласно пункту 1 леммы 1, верно $(x_1, H_1) \in H_2 \Leftrightarrow \forall\sigma \in TSS(\mathcal{TN}) \diamond (x_2, H_2) \in X_\sigma \Rightarrow (x_1, H_1)\ V_\sigma\ (x_2, H_2)$. Тогда $(x_1, H_1) \in X_\sigma$. Требуемый результат следует из предположения индукции. □

Предложение 2. $\widehat{\pi} = (\widehat{B}, \widehat{E}, \widehat{V}, \widehat{l}, \widehat{\Delta})$ *— временная O-сеть.*

Доказательство. Пусть $(b_p, \widetilde{H}) \in \widehat{B}$. Предположим обратное, т. е. $(e_1, H_1)\ \widehat{V}\ (b_p, \widetilde{H})$ и $(e_2, H_2)\ \widehat{V}\ (b_p, \widetilde{H})$. Тогда, согласно пункту 1 леммы 2, $(e_1, H_1), (e_2, H_2) \in \widetilde{H}$. Из определения множества $\widehat{B}$ следует, что $(b_p, \widetilde{H}) \in B_\sigma$ для некоторой $\sigma \in TSS(\mathcal{TN})$. Согласно пункту 1 леммы 1, имеем ${}^\bullet(b_p, \widetilde{H}) = \widetilde{H}$ в π_σ. Так как π_σ — временная C-сеть, то $(e_1, H_1) = (e_2, H_2)$.

Очевидно, что $\widehat{\preceq}$ рефлексивно и транзитивно. Предположим, что (x_y, H), $(x'_{y'}, H') \in \widehat{X}$ такие, что $(x_y, H) \widehat{\preceq} (x'_{y'}, H')$ и $(x'_{y'}, H') \widehat{\preceq} (x_y, H)$. Рассмотрим $\sigma \in TSS(\mathcal{TN})$ такую, что $(x'_{y'}, H') \in X_\sigma$. В силу пункта 2 леммы 2, имеем $(x_y, H) \in X_\sigma$ и $(x_y, H) \preceq_\sigma (x'_{y'}, H')$. Тогда, так как $(x_y, H) \in X_\sigma$, то $(x'_{y'}, H') \widehat{\preceq} (x_y, H)$ означает $(x'_{y'}, H') \preceq_\sigma (x_y, H)$, вновь в силу пункта 2 леммы 2. Поскольку π_σ — временная C-сеть, то $(x_y, H) = (x'_{y'}, H')$. Значит, отношение $\widehat{\preceq}$ антисимметрично.

Теперь предположим, что $(b_p, \widetilde{H}) \in \widehat{B}$ и $(e_1, H_1), (e_2, H_2) \in \widehat{E}$ такие, что $(e_1, H_1) \neq (e_2, H_2)$, $(b_p, \widetilde{H})\ \widehat{V}\ (e_1, H_1)$ и $(b_p, \widetilde{H})\ \widehat{V}\ (e_2, H_2)$. Нужно показать $\uparrow(e_1, H_1) \cap \uparrow(e_2, H_2) = \emptyset$. Предположим обратное, т. е. $(x'_{y'}, H') \in \uparrow(e_1, H_1) \cap \uparrow(e_2, H_2)$. Рассмотрим $\sigma \in TSS(\mathcal{TN})$ такую, что $(x'_{y'}, H') \in X_\sigma$. Тогда, согласно пункту 2 леммы 2, имеем $(b_p, \widetilde{H}), (e_1, H_1)$, $(e_2, H_2) \in X_\sigma$. В силу пунктов 1 лемм 1 и 2, верно $(b_p, \widetilde{H})\ V_\sigma\ (e_1, H_1)$ и $(b_p, \widetilde{H})\ V_\sigma\ (e_2, H_2)$. Пришли к противоречию, так как π_σ — временная C-сеть. Ясно, что каждому событию из $\widehat{E}$ функция $\widehat{l}$ сопоставляет символ, соответствующий переходу из T, а функция $\widehat{\Delta}$ — временную длительность выполнения этого события. □

Используя временную O-сеть $(\widehat{B}, \widehat{E}, \widehat{V}, \widehat{l}, \widehat{\Delta})$, определим для ДВЭСС $\mathcal{TN}$ временную структуру событий $TES_{\mathcal{TN}} = (E, \leq, \#, l, \delta)$ следующим образом:

— $E = \widehat{E}$;

— $\leq = \widehat{\preceq} |_{\widehat{E} \times \widehat{E}}$;

— $\# = \widehat{\#} |_{\widehat{E} \times \widehat{E}}$;

— $l = \widehat{l} |_{\widehat{E}}$;

— $\delta = \widehat{\Delta}$.

Множество $RTC(TES_{\mathcal{TN}})$ представляет семантику ДВЭСС на основе временных структур событий.

Пример 4. Для ДВЭСС, приведенной на рис. 1, начальный фрагмент временной структуры событий показан на рис. 4, где вместо событий изображены сопоставленные им символы в соответствии с функцией l и временные задержки в соответствии

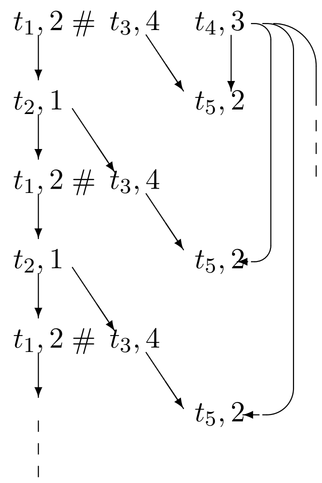

Рис. 4. Начальный фрагмент временной структуры событий для ДВЭСС, приведённой на рис. 1

с функцией δ. Кроме того, между парами событий, включенными в отношение причинной зависимости, проведены стрелки (такие стрелки, относящиеся к парам, выводимым из свойства транзитивности, опущены); между парами событий, включенными в отношение конфликта, указаны символы $'\#'$ (такие символы, относящиеся к парам, выводимым из условия наследования конфликта, опущены).

Установим существование взаимно-однозначного отображения между семантиками временных C-процессов и временных структур событий для ДВЭСС $\mathcal{TN}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{TN}$ *– ДВЭСС. Тогда отображение* $f : TP(\mathcal{TN}) \to RTC(TES_{\mathcal{TN}})$*, заданное следующим образом:* $\forall (\pi_\sigma, time_\sigma) \in TP(\mathcal{TN}) \diamond f(\pi_\sigma = (B_\sigma, E_\sigma, V_\sigma, l_\sigma, delay_\sigma, time_\sigma) = (E_\sigma, A_\sigma, time_\sigma)$*, где* $A_\sigma = \{((e_t, H), delay_\sigma(b_p, H')) \mid (e_t, H) \in E_\sigma, (b_p, H') \in (e_t, H)^\bullet \cap Max(\pi_\sigma), delay_\sigma(b_p, H') > 0\}$*, является биекцией.*

Доказательство. Пусть $\sigma := \mathbb{M}_0[\mathbb{R}_1 > \mathbb{M}_1 \ldots \mathbb{M}_{n-1}[\mathbb{R}_n > \mathbb{M}_n \in TSS(\mathcal{TN})$ согласована с C-процессом π_σ в $\mathcal{DTN}$ по функции $time_\sigma$.

Сначала покажем, что f — хорошо определённая функция, т. е. $(E_\sigma, A_\sigma, time_\sigma) \in RTC(TES_{\mathcal{TN}})$, где $TES_{\mathcal{TN}} = (E, \preceq, \#, l, \delta)$. Индукцией по n будем строить выполнение $(\emptyset, \emptyset) = (\mathcal{C}_0, \mathcal{A}_0) \xrightarrow{E_1} (\mathcal{C}_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{A}_{n-1}) \xrightarrow{E_n} (\mathcal{C}_n, \mathcal{A}_n)$ временной структуры событий $TES_{\mathcal{TN}}$, согласованное с (E_σ, A_σ) по функции $time_\sigma$.

$n = 0$. Очевидно.

$n > 0$. Предполагаем, что по $\sigma' := \mathbb{M}_0[\mathbb{R}_1 > \mathbb{M}_1 \ldots \mathbb{M}_{n-2}[\mathbb{R}_{n-1} > \mathbb{M}_{n-1} \in TSS(\mathcal{TN})$, согласованной с $\pi_{\sigma'}$ по функции $time_{\sigma'}$, построено выполнение $(\emptyset, \emptyset) = (\mathcal{C}_0, \mathcal{A}_0) \xrightarrow{E_1} (\mathcal{C}_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\mathcal{C}_{n-2}, \mathcal{A}_{n-2}) \xrightarrow{E_{n-1}} (\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{A}_{n-1})$ временной структуры событий $TES_{\mathcal{TN}}$, согласованное с $(E_{\sigma'}, A_{\sigma'})$ по функции $time_{\sigma'}$, где $A_{\sigma'} = \{((e_t, H), delay_{\sigma'}(b_p, H')) \mid (e_t, H) \in E_{\sigma'}, (b_p, H') \in (e_t, H)^\bullet \cap Max(\pi_{\sigma'}), delay_{\sigma'}(b_p, H') > 0\}$.

Используя пункт 7 леммы 1 и пункт 2 леммы 2, можно показать, что $\widetilde{E}_\sigma \in En(E_{\sigma'} = \mathcal{C}_{n-1})$. В силу построения π_σ, $\widetilde{E}_\sigma$ — шаг во временной конфигурации $(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{A}_{n-1})$. Пусть $E_n = \widetilde{E}_\sigma$. Тогда, по построению π_σ и определению отношения $(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{A}_{n-1}) \xrightarrow{E_n} (\mathcal{C}_n, \mathcal{A}_n)$ в $TES_{\mathcal{TN}}$, имеем $\mathcal{C}_n = E_\sigma$ и $\mathcal{A}_n = A_\sigma$, где $A_\sigma = \{((e_t, H), delay_\sigma(b_p, H')) \mid (e_t, H) \in E_\sigma,$

$(b_p, H') \in (e_t, H)^\bullet \cap Max(\pi_\sigma)$, $delay_\sigma(b_p, H') > 0\}$. С учётом построения $time_\sigma$, $(\emptyset, \emptyset) = (\mathcal{C}_0, \mathcal{A}_0) \xrightarrow{E_1} (\mathcal{C}_1, \mathcal{A}_1)$, $\ldots$, $(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{A}_{n-1}) \xrightarrow{E_n} (\mathcal{C}_n, \mathcal{A}_n)$ — выполнение временной структуры событий $TES_{\mathcal{TN}}$, согласованное с (E_σ, A_σ) по функции $time_\sigma$.

Легко видеть, что f — инъективное отображение. Докажем, что f сюръективно. Пусть $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, time) \in RTC(TES_{\mathcal{TN}})$. Тогда существует выполнение $(\emptyset, \emptyset) \xrightarrow{E_1} (\mathcal{C}_1, \mathcal{A}_1)$, $\ldots$, $(\mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{A}_{k-1}) \xrightarrow{E_k} (\mathcal{C}_k, \mathcal{A}_k)$ временной структуры событий $TES_{\mathcal{TN}}$, согласованное с $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ по $time$. Будем доказывать индукцией по $k \geq 0$, что существует $\sigma \in TSS(\mathcal{TN})$ такая, что $f(\pi_\sigma, time_\sigma) = (E_\sigma = \mathcal{C}, A_\sigma = \mathcal{A}, time_\sigma = time)$, где $A_\sigma = \{((e_t, H), delay_\sigma(b_p, H')) \mid (e_t, H) \in E_\sigma,\ (b_p, H') \in (e_t, H)^\bullet \cap Max(\pi_\sigma),\ delay_\sigma(b_p, H') > 0\}$.

$k = 0$. Тогда $f(\pi_{\mathbb{M}_0}, \emptyset) = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$.

$k > 0$. По предположению индукции, для выполнения $(\emptyset, \emptyset) = (\mathcal{C}_0, \mathcal{A}_0) \xrightarrow{E_1} (\mathcal{C}_1, \mathcal{A}_1)$, $\ldots$, $(\mathcal{C}_{k-2}, \mathcal{A}_{k-2}) \xrightarrow{E_{k-1}} (\mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{A}_{k-1})$ временной структуры событий $TES_{\mathcal{TN}}$, согласованного с $(\mathcal{C}', \mathcal{A}')$ по $time'$, существует $\sigma' = \mathbb{M}_0[\mathbb{R}_1 > \mathbb{M}_1\ \ldots\ \mathbb{M}_{k-2}[\mathbb{R}_{k-1} > \mathbb{M}_{k-1} \in TSS(\mathcal{TN})$ такая, что $f(\pi_{\sigma'}, time_{\sigma'}) = (E_{\sigma'} = \mathcal{C}', A_{\sigma'} = \mathcal{A}', time_{\sigma'} = time')$, где $A_{\sigma'} = \{((e_t, H), delay_{\sigma'}(b_p, H')) \mid (e_t, H) \in E_{\sigma'},\ (b_p, H') \in (e_t, H)^\bullet \cap Max(\pi_{\sigma'}),\ delay_{\sigma'}(b_p, H') > 0\}$. Используя пункт 4 леммы 1, пункт 1 леммы 2 и предложение 2, нетрудно показать справедливость следующей леммы.

Лемма А. $\forall (e_t, H) \in E_k,\ \forall (b_p, \widetilde{H}) \in H \ \diamond\ (b_p, \widetilde{H}) \in Max(\pi_{\sigma'})$.

Пусть $\mathbb{R}_k = l(E_k)$. Согласно пунктам 1, 5 и 9 леммы 1 и лемме А, $\mathbb{R}_k$ — шаг в состоянии $\mathbb{M}_{k-1}$. По определению, срабатывание шага $\mathbb{R}_k$ в состоянии $\mathbb{M}_{k-1}$ в момент времени $k-1$ приводит в состояние $\mathbb{M}_k$ в момент времени k, где $M_k = M_{k-1} \setminus \bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}_k} {}^\bullet t \cup \bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}_k \wedge D(t) = 1} t^\bullet \cup \bigcup\limits_{(t,1) \in A_{k-1}} t^\bullet$ и $A_k = \{(t, D(t) - 1) \mid t \in \mathbb{R}_k \wedge D(t) > 1\} \cup \{(t, \alpha - 1) \mid (t, \alpha) \in A_{k-1} \wedge \alpha > 1\}$. Следовательно, $\sigma := \mathbb{M}_0[\mathbb{R}_1 > \mathbb{M}_1\ \ldots\ \mathbb{M}_{k-1}[\mathbb{R}_k > \mathbb{M}_k \in TSS(\mathcal{TN})$. При этом, используя пункт 10 леммы 1, имеем $A_k = \{(l_\sigma(e_t, H), delay_\sigma(b_p, H')) \mid (b_p, H') \in (e_t, H)^\bullet \cap Max(\pi_\sigma),\ delay_\sigma(b_p, H') > 0\}$. Отметим, что верно $\forall (e_t, H) \in E \diamond \delta(e_t, H) = \widehat{\Delta}(e_t, H) = D(l((e_t, H)))$ для любой $\sigma \in TSS(\mathcal{TN})$ такой, что $(e_t, H) \in E_\sigma$. Тогда, по построению π_σ и определению отношения $(\mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{A}_{k-1}) \xrightarrow{E_k} (\mathcal{C}_k, \mathcal{A}_k)$ в $TES_{\mathcal{TN}}$, $f(\pi_\sigma, time_\sigma) = (E_\sigma = \mathcal{C}, A_\sigma = \mathcal{A}, time_\sigma = time)$, где $A_\sigma = \{((e_t, H), delay_\sigma(b_p, H')) \mid (e_t, H) \in E_\sigma,\ (b_p, H') \in (e_t, H)^\bullet \cap Max(\pi_\sigma),\ delay_\sigma(b_p, H') > 0\}$. □

Таким образом, показано, что в контексте ДВЭСС существуют взаимно-однозначные соответствия между семантиками временных последовательностей шагов, временных C-процессов и временных структур событий.

Список литературы

[1] Rozenburg G., Engelfriet J. Elementary net systems // Lecture Notes in Comput. Sci. 1998. Vol. 1491. P. 12–121.

[2] Cheng A., Esparaza J., Palsberg J. Complexity results for 1-safe nets // Ibid. 1993. Vol. 761. P. 326–337.

[3] Winskel G., Nielsen M. Models for concurrency // Handbook of Logic in Comput. Sci. 1995. Vol. 4.

[4] Esparza J. Model checking using net unfoldings // Sci. of Comput. Programm. 1994. Vol. 23. P. 151–195.

[5] Knapik M., Szreter M., Penczek W. Bounded parametric model checking for elementary net systems // Trans. on Petri Nets and Other Models of Concurrency. 2010. Vol. 4. P. 42–71.

[6] Brusey J., McFarlane D.C. Designing communication protocols for holonic control devices using elementary nets // Lecture Notes in Comput. Sci. 2005. Vol. 3593. P. 76–86.

[7] Brusey J., McFarlane D.C., Thorne A. Nonautonomous elementary net systems and their application to programmable logic control // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. 2008. Pt A. Vol. 38(2). P. 397–409.

[8] Nielsen M., Plotkin G.D., Winskel G. Petri nets, event structures and domains. Part I // Theor. Comput. Sci. 1981. Vol. 13(1). P. 85–108.

[9] Goltz U., Reisig W. The non-sequential behaviour of Petri nets // Informat. and Control. 1983. Vol. 57(2/3). P. 125–147.

[10] Engelfriet J. Branching processes of Petri nets // Acta Informatica. 1991. Vol. 28(6). P. 575–591.

[11] Nielsen M., Rozenberg G., Thiagarajan P.S. Behavioural notions for elementary net systems // Distributed Comput. 1990. Vol. 4(1). P. 45–57.

[12] Hoogers P.W., Kleijn H.C.M., Thiagarajan P.S. An event structure semantics for general Petri nets // Theor. Comput. Sci. 1996. Vol. 153. P. 129–170.

[13] Baldan P., Busi N., Corradini A., Pinna G.M. Domain and event structure semantics for Petri nets with read and inhibitor arcs // Ibid. 2004. Vol. 323. P. 129–189.

[14] Juhas G., Lorenz R., Mauser S. Complete process semantics for inhibitor nets // Fundamenta Informat. 2008. Vol. 87(3-4). P. 331–365.

[15] Kleijn H.C.M., Koutny M. Process semantics of general inhibitor nets // Informat. and Comput. 2004. Vol. 190(1). P. 18–69.

[16] Kleijn J., Koutny M. Causality in structured occurrence nets // Lecture Notes in Comput. Sci. 2011. Vol. 6875. P. 283–297.

[17] van Glabbeek R.J., Goltz U., Schicke J.-W. Abstract processes of place/transition systems // Informat. Proc. Lett. 2011. Vol. 111(13). P. 626–633.

[18] van Glabbeek R.J., Goltz U., Schicke J.-W. On causal semantics of Petri nets // Lecture Notes in Comput. Sci. 2011. Vol. 6901. P. 43–59.

[19] Ramchandani C. Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Timed Petri Nets. PhD Thesis. MIT TR-120. Cambridge (Mass), 1974.

[20] Starke P. Some properties of timed nets under the earliest firing time // Lecture Notes in Comput. Sci. 1990. Vol. 424. P. 418–432.

[21] Merlin P., Faber D.J. Recoverability of communication protocols // IEEE Trans. of Communicat. 1976. Vol. COM-24(9).

[22] Jones A.H., Uzam M., Ajlouni N. Design of discrete event control systems for programmable logic controllers using T-timed Petri nets // Proc. 1996 IEEE Intern. Symp. on Comput.-Aided Control System Design. Dearborn MI, USA, 1996. P. 212–217.

[23] Klein S., Frey G., Minas M. PLC programming with signal interpreted Petri nets // Lecture Notes in Comput. Sci. 2003. Vol. 2679. P. 440–449.

[24] Mertke T., Frey G. Formal verification of PLC programs generated from signal interpreted Petri nets // Proc. of the SMC 2001. Tucson (AZ) USA, 2001. P. 2700–2705.

[25] Valero V., de Frutos D., Cuartero F. Timed processes of timed Petri nets // Lecture Notes in Comput. Sci. 1995. Vol. 935. P. 490–509.

[26] Aura T., Lilius J. Time processes for time Petri nets // Ibid. 1997. Vol. 1248. P. 136–155.

[27] Chatain T., Jard C. Time supervision of concurrent systems using symbolic unfoldings of time Petri nets // Ibid. 2005. Vol. 3829. P. 196–210.

[28] Bouyer P., Haddad S., Reynier P.-A. Timed unfoldings for networks of timed automata // Ibid. 2006. Vol. 4218. P. 292–306.

Поступила в редакцию 10 июня 2013 г.,
с доработки — 11 сентября 2013 г.