

Математическое моделирование волнового движения воды в узко-глубоком непризматическом водохранилище с учётом перелива (перехлёста) воды через гребень плотины

И. Д. МУЗАЕВ^{1,2}, Н. И. МУЗАЕВ²

¹Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова,

²Центр геофизических исследований ВНИИ РАН и РСО-А, Владикавказ, Россия

e-mail: muzaevid@mail.ru

Музаев И.Д., Музаев Н.И. Математическое моделирование волнового движения воды в узко-глубоком непризматическом водохранилище с учётом перелива (перехлёста) воды через гребень плотины // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 94–106.

Поставлена и решена начально-краевая задача волнового движения воды в водохранилище узкоканьонного типа в случае, когда волны образуются вторжением в него обвально-оползневой массы горной породы либо селелавинообразного потока. При этом в аналитическом подходе к проблеме впервые учтён перелив (перехлёт) воды через гребень плотины.

Ключевые слова: водохранилище, гребень плотины, перелив, водохранилище узкоканьонного типа.

Muzaev I.D., Muzaev N.I. Mathematical modeling of wave motion of water in a narrow-deep non prismatic reservoir with the water overflow (overlap) over the dam // Comput. Technologies. 2014. Vol. 19, No. 2. P. 94–106.

The boundary value problem of water wave motion in a narrow-canyon type reservoir, when the waves are formed after landslide or avalanche invasion has been formulated and solved. Overflow over the dam was accounted for the first time in the history of scientific research on this problem.

Key words: tailings reservoir, the dam, overflow, narrow-canyon type reservoir.

Наличие глубоких и обширных водохранилищ в горных и предгорных местностях ставит перед исследователями ряд актуальных задач, связанных с образованием высоких волн в случае вторжения обвально-оползневой массы горной породы в чашу водохранилища. Правильная постановка и решение таких задач позволяют прогнозировать и предотвращать либо смягчать те последствия и ущерб, которые может вызвать образование разрушительных волн. Имеется много публикаций, касающихся постановки и решения конкретных задач, моделирующих вышеуказанный процесс. При этом предлагаются решения как аналитическими, так и конечно-разностными и конечно-элементными методами. В работах [1–3] задачи поставлены и решены в рамках линейной теории поверхностных волн малой амплитуды. Чаша водохранилища схематизирована в виде ограниченного или полуголобого прямоугольного параллелепипеда.

Перелив воды и непризматическая конфигурация приплотинной области водохранилища не учтены. В работах [4–7], касающихся постановки и решения вышеуказанных задач методами конечных разностей и конечных элементов, учитываются естественная конфигурация чаши водохранилища, нелинейные составляющие характеристик образованных волн. Однако в их основе используется двумерная теория мелкой воды. Вместе с тем при образовании поверхностных волн, длины которых меньше или сравнимы с глубиной водохранилища, теория мелкой воды может дать неточные показатели характеристик образованных волн.

Наиболее достоверные результаты количественных характеристик образованных поверхностных волн дают разработки на основе нелинейной теории пространственного волнового движения идеальной несжимаемой жидкости с учётом естественной конфигурации чаши и процесса перелива воды через участки периметра береговой линии. [8, 9] Решение задач при такой строгой постановке возможно только специально разработанными конечно-разностными методами. Достоверность получаемых количественных значений, как правило, проверяется решениями тестовых задач, полученными аналитическими методами.

Предположим, что в прямоугольной системе координат $xOyz$ часть пространства, ограниченная условиями

$$0 \leq x \leq L, \quad -\frac{B(x, z)}{2} \leq y \leq \frac{B(x, z)}{2}, \quad -H \leq z \leq 0,$$

представляет водохранилище узкоканьонного типа. Ось Ox направлена вдоль каньона, Oy — поперёк, Oz — вертикально вверх. В створе, ограниченном условиями

$$x = 0, \quad -\frac{B(0, z)}{2} \leq y \leq \frac{B(0, z)}{2}, \quad -H \leq z \leq 0,$$

помещена плотина. Здесь L — длина водохранилища, $B(x, z)$ — ширина каньона, зависящая от продольной координаты x и вертикальной координаты z , H — глубина воды.

Рассмотрим волновое движение воды, вызванное вторжением массива горной породы с некоторого участка борта в данное заполненное водохранилище.

Математическая модель волнового движения воды в водохранилище, которая представляет начально-краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа [10–12], имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{B(x, z)} \frac{\partial B(x, z)}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{B(x, z)} \frac{\partial B(x, z)}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{q(x, z, t)}{B(x, z)}, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = v(z, t), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0, \quad (3)$$

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } t = 0, \quad (4)$$

где $\varphi(x, z, t)$ — потенциал средней по ширине водохранилища скорости движения воды, $q(x, z, t)$ — боковая приточность, связанная со скоростью вторжения обвальнополозневой массива горной породы в водохранилище, g — ускорение силы тяжести.

Функция $q(x, z, t)$ берется в виде

$$q(x, z, t) = q_1(x)u(t)\delta_2(z), \quad (5)$$

$$q_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_0 - a < x < x_0 + a, \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq x_0 - a \text{ и } x_0 + a < x < L, \end{cases} \quad (6)$$

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & \text{при } 0 < t < t_0, \\ 0 & \text{при } t > t_0, \end{cases} \quad (7)$$

где x_0 — абсцисса центра фронта, $2a$ — ширина фронта обвально-оползневого массива, u_0 — скорость вторжения, t_0 — продолжительность времени вторжения.

Граничное условие на напорной грани плотины

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = v(z, t) \quad (8)$$

учитывает перелив (перехлёт) воды через гребень плотины (рис. 1).

Легко заметить, что непризматическая конфигурация водохранилища смоделирована изменением ширины каньона $B(x, z)$. Она зависит как от продольной координаты x , так и от вертикальной координаты z .

В связи с тем что коэффициенты дифференциального уравнения (1) зависят от пространственных координат, решение начально-краевой задачи (1)–(7) аналитическими методами связано с большими математическими трудностями. Эти трудности легко преодолеваются, если непризматическую конфигурацию водохранилища аппроксимировать экспоненциальными функциями следующего вида:

$$B(x, z) = B_0 e^{S_1 x} e^{S_2 z},$$

$$B_0 = \text{const}, \quad S_1 > 0, \quad S_2 > 0, \quad (9)$$

где B_0 — длина гребня плотины, параметр S_1 характеризует интенсивность расширения водохранилища в плане, параметр S_2 характеризует интенсивность сужения водохранилища (каньона) по глубине.

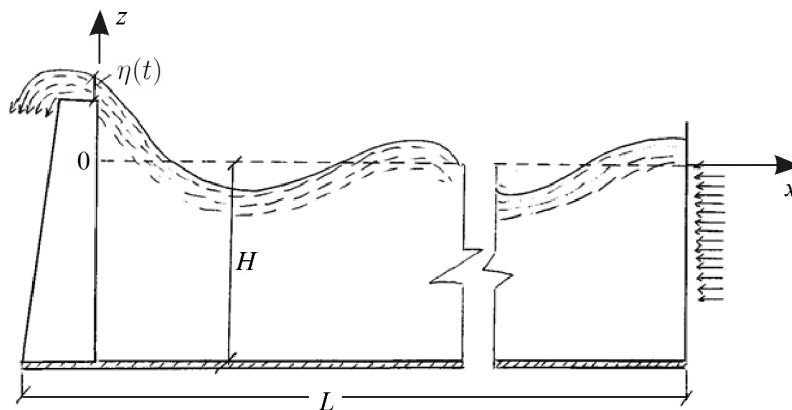


Рис. 1. Схема процесса перелива (перехлеста) воды через гребень плотины

Подставив выражения (5), (6), (7) и (9) в (1)–(4), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + S_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + S_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + = \frac{q_1(x)u(t)\delta_2(z)}{B_0} e^{-S_1 x} e^{-S_2 z}, \quad (10)$$

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{при } t = 0, \quad z = 0, \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = v(t)\delta_1(z), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0, \quad (13)$$

где $v(t)$ — скорость перелива (перехлёста) воды через гребень плотины, $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$ — вспомогательные функции, обеспечивающие гладкое сопряжение скоростей вторжения обвально-оползневого массива и скорости перелива с их нулевыми значениями. Скорость перелива воды через гребень плотины $v(t)$ зависит от возвышения уровня свободной поверхности воды у плотины над её гребнем:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{q(t)}{\varepsilon} & \text{при } -\varepsilon < z < 0, \\ 0 & \text{при } -H \leq z \leq -\varepsilon, \end{cases} \quad (14)$$

$$q(t) = \mu(\eta) \sqrt{2g\eta}^{3/2}(t) B_0, \quad (15)$$

здесь $q(t)$ — расход перелива воды через гребень плотины, $\mu(\eta)$ — коэффициент расхода, B_0 — длина плотины над отметкой её гребня. Выражение (15) представляет известную формулу водослива. Коэффициент расхода μ зависит от величины $\eta(t)$:

$$\mu(\eta) = \begin{cases} 0.402 & \text{при } \eta(t) > 0, \\ 0 & \text{при } \eta(t) \leq 0. \end{cases} \quad (16)$$

Выражения (14) и (15) показывают, что расход перелива воды через гребень плотины распределён (рассредоточен) на участке плотины $-\varepsilon < z < 0$, где ε — бесконечно малая величина, т. е. $\varepsilon \rightarrow 0$. С точки зрения быстрой сходимости тригонометрических рядов, которые получаются в процессе решения начально-краевой задачи, целесообразно сглаживающие функции $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$ представить в виде

$$\delta_1(z) = \frac{z^3(z + \varepsilon)^3}{\varepsilon^6} A, \quad \delta_2(z) = \frac{z^3(z + h)^3}{h^6} B, \quad (17)$$

где h — мощность обвально-оползневого массива, постоянные A и B определяются из условий

$$\int_0^{-\varepsilon} \delta_1(z) dz = 1, \quad \int_0^{-h} \delta_2(z) dz = 1, \quad A = \frac{140}{\varepsilon^6}, \quad B = \frac{140}{h^6}. \quad (18)$$

В результате применения интегрального преобразования Лапласа по времени t и подстановки

$$\tilde{\varphi}(x, z) = \tilde{\psi}(x, z) e^{-\frac{S_1}{2}x} - \tilde{v}(p)\delta_1(z) \frac{(L-x)^3}{3L^2} \quad (19)$$

относительно новой неизвестной функции $\tilde{\psi}(x, z)$ начально-краевая задача (10)–(13) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} + S_2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} - \frac{S_1^2}{4} \tilde{\psi} = \tilde{f}(x, z) e^{\frac{S_1}{2} x}, \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - \frac{S_1}{2} \tilde{\psi} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - \frac{S_1}{2} \tilde{\psi} \right) \Big|_{x=L} = 0, \quad (21)$$

$$\left(p^2 \tilde{\psi} + g \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right) \Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, z) = & \tilde{v}(p) \left[\delta_1(z) \frac{2(L-x)}{L^2} + \delta_1''(z) \frac{(L-x)^3}{3L^2} - \right. \\ & \left. - S_1 \delta_1(z) \frac{(L-x)^2}{L^2} + S_2 \delta_1'(z) \frac{(L-x)^3}{3L^2} \right] + q_1(x) \delta_2(z) \tilde{u}(p) \frac{1}{B_0} e^{-S_1 x} e^{-S_2 z}. \end{aligned} \quad (23)$$

Далее вводятся новая функция $\tilde{\Phi}(x, z)$ и дифференциальный оператор D

$$\tilde{\Phi} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - \frac{S_1}{2} \tilde{\psi}, \quad D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + S_2 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{S_1^2}{4}. \quad (24)$$

Приложим оператор D к функции $\tilde{\Phi}$

$$D[\tilde{\Phi}] = \frac{\partial}{\partial x} D[\tilde{\Phi}] - \frac{S_1}{2} D[\tilde{\Phi}]. \quad (25)$$

В развёрнутом виде выражение (25) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial z^2} + S_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} - \frac{S_1^2}{4} \tilde{\Phi} = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{S_1}{2} x} \tilde{f}(x, z) \right) - \frac{S_1}{2} e^{\frac{S_1}{2} x} \tilde{f}(x, z). \quad (26)$$

Граничные условия (21) и (22) относительно функции $\tilde{\Phi}$ записываются как

$$\tilde{\Phi} \Big|_{x=0} = 0, \quad \tilde{\Phi} \Big|_{x=L} = 0, \quad (27)$$

$$\left(p^2 \tilde{\Phi} + g \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0. \quad (28)$$

Решение дифференциального уравнения (26) при граничных условиях (27) находится в виде следующего тригонометрического ряда по синусам:

$$\tilde{\Phi}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_n(z) \sin a_n x, \quad a_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (29)$$

Разложим правую часть уравнения (26) в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, L)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{S_1}{2} x} \tilde{f}(x, z) \right) - \frac{S_1}{2} e^{\frac{S_1}{2} x} \tilde{f}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\delta}_n(z) \sin a_n x,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_n(z) &= \frac{2}{L} \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{S_1}{2}x} \tilde{f}(x, z) \right) - \frac{S_1}{2} e^{\frac{S_1}{2}x} \tilde{f}(x, z) \right] \sin a_n x dx = \\ &= -\frac{2}{L} \int_0^L \left(a_n \cos a_n x + \frac{S_1}{2} \sin a_n x \right) e^{\frac{S_1}{2}x} \tilde{f}(x, z) dx.\end{aligned}\quad (30)$$

В результате подстановки значения функции $\tilde{f}(x, z)$ из (23) в (30) и вычисления интегралов для $\tilde{\delta}_n(z)$ получается выражение

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_n(z) &= -\frac{4}{L^3} \tilde{v}(p) \delta_1(z) \frac{a_n}{a_n^2 + \frac{S_1^2}{4}} \left(1 - (-1)^n e^{\frac{S_1}{2}L} \right) - \frac{2}{3L^3} \tilde{v}(p) \delta_1''(z) \alpha_n' - \\ &- \frac{2S_1}{L^3} \delta_1(z) \left[\frac{2a_n L}{a_n^2 + \frac{S_1^2}{4}} + \frac{2S_1 a_n}{\left(a_n^2 + \frac{S_1^2}{4} \right)^2} \left(1 - (-1)^n e^{\frac{S_1}{2}L} \right) \right] + \\ &+ \frac{2S_2}{3L^3} \delta_1'(z) \alpha_n + \frac{2}{LB_0} \delta_2(z) \tilde{u}(p) e^{-S_2 z} R_n,\end{aligned}\quad (31)$$

где

$$\alpha_n = \int_0^L (L-x)^3 e^{\frac{S_1}{2}x} \left(a_n \cos a_n x + \frac{S_1}{2} \sin a_n x \right) dx, \quad (32)$$

$$R_n = \int_0^L q_1(x) e^{\frac{S_1}{2}x} \left(a_n \cos a_n x + \frac{S_1}{2} \sin a_n x \right) dx. \quad (33)$$

Подставляя выражения (29) и (30) в (26)–(28) и приравнявая коэффициенты при одинаковых синусах в правых и левых частях, получим

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}_n}{dz^2} + S_2 \frac{d \tilde{\Phi}_n}{dz} - \left(a_n^2 + \frac{S_1^2}{4} \right) \tilde{\Phi}_n = \tilde{\delta}_n(z), \quad (34)$$

$$\left(p^2 \tilde{\Phi}_n + g \frac{d \tilde{\Phi}_n}{dz} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{d \tilde{\Phi}_n}{dz} \Big|_{z=-H} = 0. \quad (35)$$

Решение дифференциального уравнения (34) с граничными условиями (35) имеет вид

$$\tilde{\Phi}_n(z) = e^{-\frac{S_2}{2}z} (\tilde{c}_1 \operatorname{sh} \lambda_n z + \tilde{c}_2 \operatorname{ch} \lambda_n z) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^z \tilde{\delta}_n(s) e^{-\frac{S_2}{2}(z-s)} \operatorname{sh} \lambda_n(z-s) ds, \quad (36)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \frac{\left(p^2 - g \frac{S_2}{2} \right) \tilde{B}_n}{\left(\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n H + \frac{S_2}{2} \operatorname{sh} \lambda_n H \right) (p^2 + \gamma_n^2)}, \quad (37)$$

$$\tilde{c}_2 = -\frac{g\lambda_n\tilde{B}_n}{\left(\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n H + \frac{S_2}{2} \operatorname{sh} \lambda_n H\right) (p^2 + \gamma_n^2)}, \quad (38)$$

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{g\left(\lambda_n^2 - \frac{S_2^2}{4}\right) \operatorname{sh} \lambda_n H}{\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n H + \frac{S_2}{2} \operatorname{sh} \lambda_n H}}, \quad (39)$$

$$\tilde{B}_n = -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^{-H} e^{\frac{S_2}{2}z} \left[\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n (H+z) + \frac{S_2}{2} \operatorname{sh} \lambda_n (H+z) \right] \tilde{\delta}_n(z) dz. \quad (40)$$

В результате подстановки значения $\tilde{\delta}_n(z)$ из (31) в (41), вычисления интегралов и перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим следующее выражение для \tilde{B}_n :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n = \frac{1}{\lambda_n} \left(\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n H + \frac{S_2}{2} \operatorname{sh} \lambda_n H \right) & \left[\frac{4}{L^2} \frac{a_n}{a_n^2 + \frac{S_1^2}{4}} \left(1 - (-1)^n e^{\frac{S_1}{2}L} \right) \tilde{q}(p) - \right. \\ & \left. - \frac{2S_1}{L^3} \left(\frac{2La_n}{a_n^2 + \frac{S_1^2}{4}} + \frac{2S_1a_n \left(1 - (-1)^n e^{\frac{S_1}{2}L} \right)}{\left(a_n^2 + \frac{S_1^2}{4} \right)^2} \right) \tilde{q}(p) + \frac{2R_n K_n}{\lambda_n L B_0} \tilde{u}(p) \right], \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$K_n = \int_0^{-h} e^{\frac{-S_2}{2}z} \left(\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n (H+z) + \frac{S_2}{2} \operatorname{sh} \lambda_n (H+z) \right) \delta_2(z) dz. \quad (42)$$

Подставив выражение (41) в (36), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_n(0, t) = -g \frac{4a_n}{L^3 \left(a_n^2 + \frac{S_1^2}{4} \right)} \left(1 - (-1)^n e^{\frac{S_1}{2}L} \right) \frac{\tilde{q}(p)}{p^2 + \gamma_n^2} + g\lambda_n \frac{2S_1}{L^3} \times \\ \times \left(\frac{2La_n}{a_n^2 + \frac{S_1^2}{4}} + \frac{2S_1a_n \left(1 - (-1)^n e^{\frac{S_1}{2}L} \right)}{\left(a_n^2 + \frac{S_1^2}{4} \right)^2} \right) \frac{\tilde{q}(p)}{p^2 + \gamma_n^2} - \\ - g \frac{2R_n K_n}{LB_0 \left(\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n H + \frac{S_2}{2} \operatorname{sh} \lambda_n H \right)} \frac{\tilde{u}(p)}{p^2 + \gamma_n^2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Переходя от изображения к оригиналу, имеем

$$\begin{aligned} \Phi_n(0, t) = & -g \frac{4a_n}{L^3 \left(a_n^2 + \frac{S_1^2}{4} \right)} \left(1 - (-1)^n e^{\frac{S_1}{2}L} \right) \frac{1}{\gamma_n} \int_0^t q(\tau) \sin \gamma_n(t - \tau) d\tau + \\ & + g\lambda \frac{2S_1}{L^3} \left(\frac{2La_n}{a_n^2 + \frac{S_1^2}{4}} + \frac{2S_1a_n \left(1 - (-1)^n e^{\frac{S_1}{2}L} \right)}{\left(a_n^2 + \frac{S_1^2}{4} \right)^2} \right) \frac{1}{\gamma_n} \int_0^t q(\tau) \sin \gamma_n(t - \tau) d\tau - \\ & - g \frac{2R_nK_n}{LB_0 \left(\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n H + \frac{S_2}{2} \operatorname{sh} \lambda_n H \right)} \frac{1}{\gamma_n} \int_0^t u(\tau) \sin \gamma_n(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (44)$$

Далее обратным ходом сначала в результате решения дифференциального уравнения (24) определяется функция $\psi(x, 0, t)$, а затем из выражения (19) находится функция $\varphi(x, 0, t)$

$$\varphi(x, 0, t) = \psi(x, 0, t) e^{-\frac{S_1}{2}x} = c(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(0, t) I_n(x), \quad (45)$$

где

$$I_n(x) = \frac{\frac{S_1}{2} \sin a_n x + a_n \cos a_n x}{a_n^2 + \frac{S_1^2}{4}} e^{-\frac{S_1}{2}x}. \quad (46)$$

Уравнение волновой поверхности определяется дифференцированием потенциала $\varphi(x, 0, t)$ по переменной t [10–12]

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, 0, t)}{\partial t}, \quad \eta(x, t) = -\frac{1}{g} c'(t) + \frac{1}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi'_n(t) I_n(x). \quad (47)$$

Произвольная функция $c'(t)$ находится из закона сохранения объёма жидкости

$$\int_0^B B_0 e^{-S_1 x} \eta(x, t) dx = - \int_0^t q(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^L \int_0^{-H} q_1(x) \delta_2(z) u(t) dx dz d\tau. \quad (48)$$

Подставив выражение (47) в (48), имеем

$$c'(t) = \frac{gS_1}{(e^{S_1 L} - 1)B_0} \int_0^t q(\tau) d\tau - \frac{g2ahf_0(t)}{B_0} \frac{S_1}{e^{S_1 L} - 1},$$

$$f_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ 1 & \text{при } t > t_0. \end{cases}$$

В итоге для закона колебания уровня воды у плотины получается выражение

$$\eta(t) = - \int_0^t \left\{ \frac{S_1 \sqrt{2g}}{e^{S_1 L} - 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n^2 + \frac{S_1^2}{4}} \left[\frac{4 a_n \left(1 - (-1)^n e^{\frac{S_1 L}{2}}\right)}{L^3 \left(a_n^2 + \frac{S_1^2}{4}\right)} - \frac{4 S_1 a_n \sqrt{2g}}{L^2 \left(a_n^2 + \frac{S_1^2}{4}\right)} - \frac{4 S_1^2 a_n \sqrt{2g}}{L^3 \left(a_n^2 + \frac{S_1^2}{4}\right)^2} \cos \gamma_n(t - \tau) \right] \mu(\tau) \eta^{3/2}(\tau) d\tau + \frac{2ahS_1}{B_0(e^{S_1 L} - 1)} \int_0^t u(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R_n K_n \int_0^t u(\tau) \cos \gamma_n(t - \tau) d\tau}{LB_0 \left(\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n H + \frac{S_2}{2} \operatorname{sh} \lambda_n H \right) \left(a_n^2 + \frac{S_1^2}{4} \right)}, \right. \quad (49)$$

представляющее собой нелинейное интегральное уравнение типа уравнения Вольтерра относительно искомой функции $\eta(0, t) = \eta(t)$, описывающей процесс колебания уровня воды у плотины. При $S_1 = S_2 = 0$

$$\eta(0, t) = - \int_0^t \left\{ \frac{\sqrt{2g}}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{a_n^2 L^3} \cos \gamma_n(t - \tau) \right\} \mu(\tau) \eta^{3/2}(\tau) d\tau + \frac{2ah}{B_0 L} \int_0^t u(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R_n K_n}{LB_0 a_n^2} \int_0^t u(\tau) \cos \gamma_n(t - \tau) d\tau. \quad (50)$$

В результате вычисления интегралов выражение (50) можно привести к виду

$$\eta(t) = \frac{2aH u_0}{B_0 L} f_0(t) + \frac{u_0}{B_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \operatorname{th} a_n H}{a_n \gamma_n} f_n(t) - \frac{\sqrt{2g}}{L} \int_0^t K(t, \tau) \mu_0(\tau) |\eta(\tau)|^{3/2} d\tau, \quad (51)$$

$$f_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ t_0 & \text{при } t \geq t_0, \end{cases}$$

$$f_n(t) = \begin{cases} \sin \gamma_n t & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ 2 \cos \gamma_n \left(t - \frac{t_0}{2} \right) \sin \gamma_n \frac{t_0}{2} & \text{при } t \geq t_0, \end{cases}$$

$$\alpha_n = \frac{4}{La_n} \cos a_n x_0 \sin a_n a, \quad \gamma_n = \sqrt{ga_n \operatorname{th} a_n H}, \quad a_n = \frac{n\pi}{L},$$

$$K(t, \tau) = 1 + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos \gamma_n(t - \tau), \quad \beta_n = \frac{2}{L} \frac{1 - (-1)^n}{a_n^2}.$$

Поскольку (50) является нелинейным интегральным уравнением, решение строгими аналитическими методами связано с большими математическими трудностями. Поэтому применяется численно аналитический метод решения. В качестве первого приближения использовано выражение

$$\eta_1(t) = \frac{2aHu_0}{B_0L} f_0(t) + \frac{u_0}{B_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \operatorname{th} a_n H}{a_n \gamma_n} f_n(t),$$

второго —

$$\eta_2(t) = \eta_1(t) - \frac{\sqrt{2g}}{L} \int_0^t K(t, \tau) \mu_1(\tau) |\eta_1(\tau)|^{3/2} d\tau$$

и т. д.

$$\eta_n(t) = \eta_{n-1}(t) - \frac{\sqrt{2g}}{L} \int_0^t K(t, \tau) \mu_{n-1}(\tau) |\eta_{n-1}(\tau)|^{3/2} d\tau.$$

Для вычисления интеграла

$$\int_0^t K(t, \tau) \mu_1(\tau) |\eta_1(\tau)|^{3/2} d\tau$$

использована формула трапеции

$$\begin{aligned} \int_0^t K(t, \tau) \mu_0(\tau) |\eta_0(\tau)|^{3/2} d\tau &\approx \Delta t \frac{K(t, 0) \mu_1(0) |\eta_1(0)|^{3/2} + K(t, t) \mu_1(t) |\eta_1(t)|^{3/2}}{2} + \\ &+ \sum_{j=1}^{t-1} K(t, j\Delta t) \mu_1(j\Delta t) |\eta_1(j\Delta t)|^{3/2}. \end{aligned}$$

Скорость и расход перелива (перехлеста) воды через гребень плотины вычисляются формулами

$$v(t) = \begin{cases} \mu(t) \sqrt{2q\eta(t)} & \text{при } \eta(t) > 0, \\ 0 & \text{при } \eta(t) \leq 0, \end{cases}$$

$$Q(t) = \begin{cases} \mu(t) B_0 \sqrt{2g} |\eta(t)|^{3/2} & \text{при } \eta(t) > 0, \\ 0 & \text{при } \eta(t) < 0. \end{cases}$$

В качестве примеров на рис. 2, 3 представлены графики зависимостей от времени уровня воды в створе плотины, объёма, расхода и скорости перелива (перехлеста) воды через гребень плотины при различных значениях входных параметров. Из рисунков следует, что с течением времени из-за перелива воды амплитуда образованных волн, расход и скорость перелива воды через гребень плотины уменьшаются. Из приведённых графиков также видно, что образованная в середине водохранилища волна добегает до плотины за ~ 100 с, проходя за это время расстояние 2500 м со скоростью 25 м/с.

Согласно классической теории волн для скорости волны имеется формула

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}}. \quad (52)$$

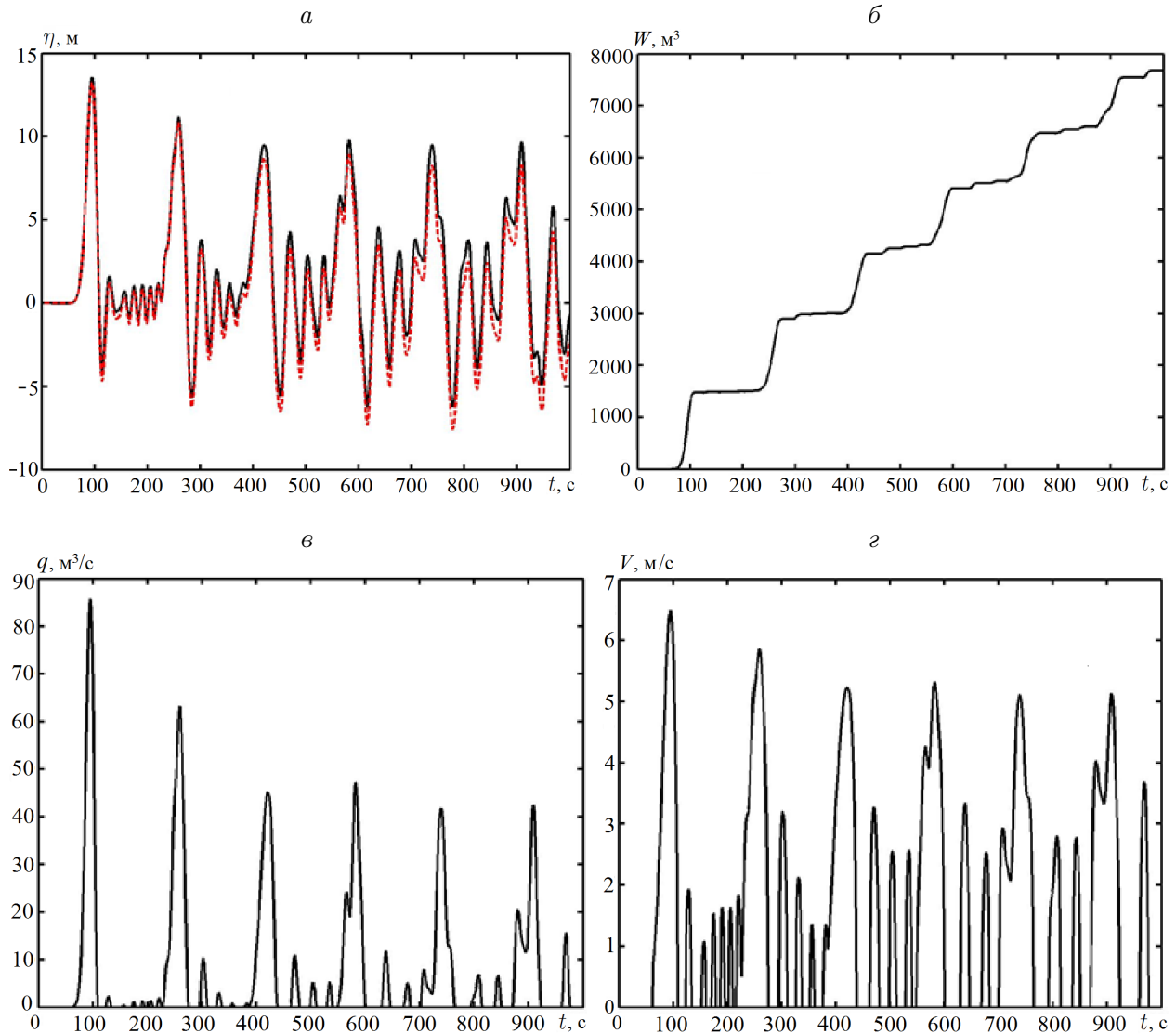


Рис. 2. Графики зависимостей от времени уровня воды в створе плотины (а), объема (б), расхода (в) и скорости перелива (перехлеста) воды через гребень плотины (г); параметры: $H = 100$ м, $a = 100$ м, $t_0 = 20$ с, $v_0 = 10$ м/с, $L = 5000$ м, $x_0 = 2500$ м, $B_0 = 500$ м

В качестве длины образованной волны можно принять удвоенную ширину фронта обвално-оползневого массива

$$\lambda = 4a = 400 \text{ м}, \quad H = 100 \text{ м}.$$

Скорость волны, вычисленная по формуле (52), равна $c = 25$ м/с. Следовательно, численное значение скорости образованной волны точно совпадает со значением, получаемым по общеизвестной классической формуле.

На рис. 2, б представлена зависимость объема воды, перелитой через гребень плотины, от времени. График имеет ступенчатую форму в связи с тем, что перелив наблюдается в промежутках времени, когда уровень воды у створа плотины превышает уровень у гребня плотины, т. е. при $\eta(0, t) > 0$. При $\eta(0, t) \leq 0$ волна от плотины полностью отражается и излив воды не происходит.

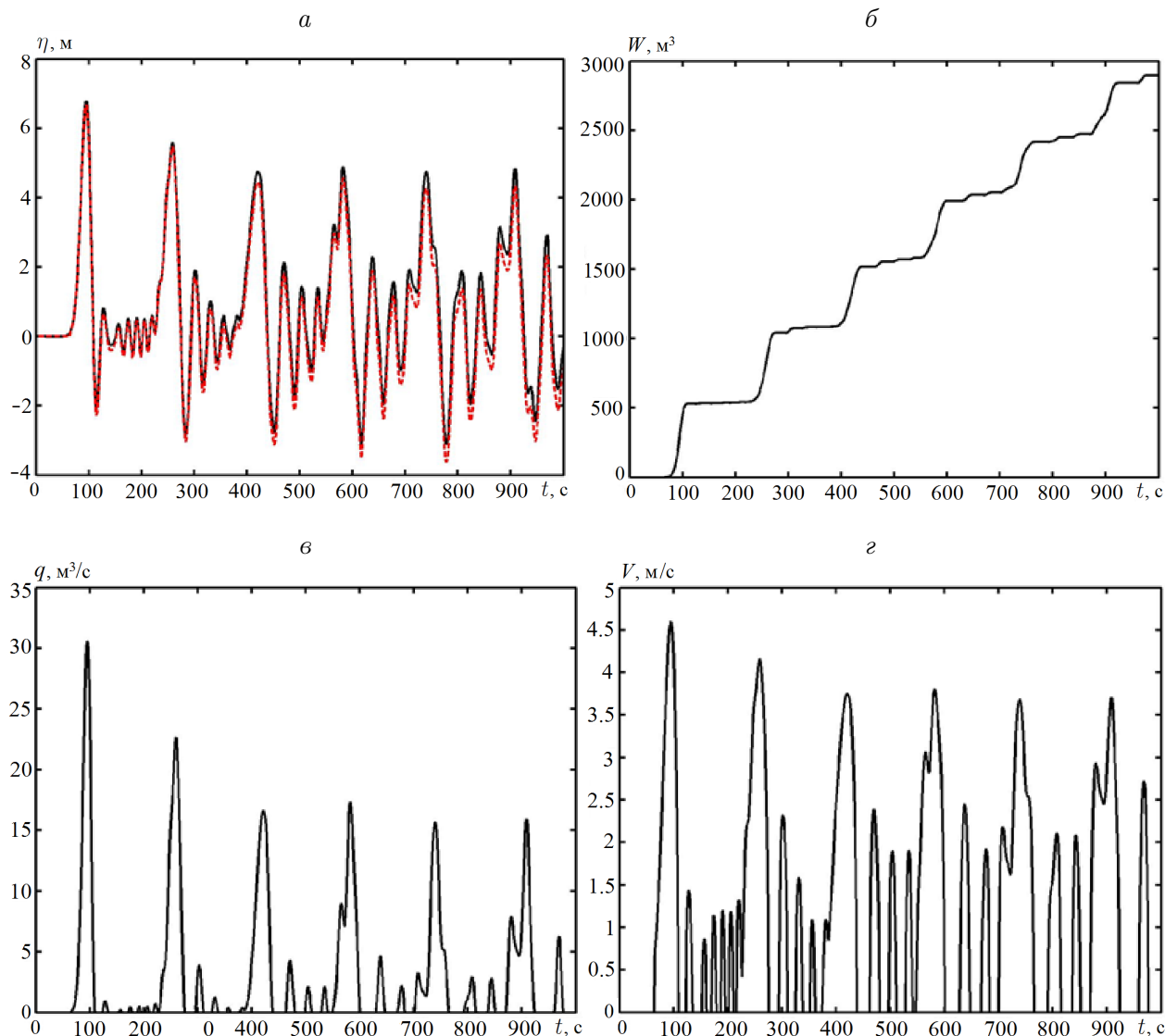


Рис. 3. Графики зависимостей от времени уровня воды в створе плотины (*a*), объёма (*б*), расхода (*в*) и скорости перелива (перехлёста) воды через гребень плотины (*г*); параметры: $H = 100$ м, $a = 100$ м, $t_0 = 20$ с, $v_0 = 5$ м/с, $L = 5000$ м, $x_0 = 2500$ м, $B_0 = 500$ м

На рис. 2, *в*, *г* приведены зависимости расхода и скорости перелива воды через гребень плотины от времени. Как видно из графиков, с течением времени расход воды уменьшается более интенсивно, чем скорость перелива. Колебание скорости между двумя максимальными (пиковыми) значениями обусловлено колебанием уровня воды у плотины в промежутках времени между двумя максимальными (пиковыми) значениями уровня воды.

Вычислительные эксперименты показали, что количественные значения характеристик образованных волн наиболее чувствительны к скорости вторжения массива в водохранилище. На рис. 3 представлены графики при скорости вторжения в два раза меньшей, чем в предыдущем случае, т. е. $v_0 = 5$ м/с. Приведённые данные указывают на прямо пропорциональную зависимость между амплитудой образованных волн и скоростью вторжения массива в водохранилище.

Результаты настоящей работы получены аналитическими методами решения начально-краевых задач. При этом учитывались непряматическая конфигурация приплотинной части водохранилища и процесс перелива воды через гребень плотины. Полученные теоретические зависимости могут быть применены для вычисления характеристик образованных волн в узком глубоком водохранилище. Кроме того результаты работы могут быть использованы в качестве тестовой задачи для установления достоверности данных, полученных конечно-разностными методами решения начально-краевых задач.

Список литературы

- [1] NODA E.K. Water waver generated by lands-lider // J. of the Waterways Harbors and Coastal Eng. Division. 1970. Vol. 96, No. 4. P. 835–855.
- [2] МАМРАДЗЕ Г.П., МУЗАЕВ И.Д. Возникновение волн в водохранилище вследствие оползневых явлений // Сообщения АН ГССР. 1971. Т. 64, № 2. С. 115–120.
- [3] ГВЕЛЕСИАНИ Т.Л., ДЖИНДЖИХАШВИЛИ Г.Я. Прогноз максимальной амплитуды плоской волны в водохранилище, возникающей при сейсмогравитационных деформациях // Строительство и архитектура. Сейсмическое строительство. 1980. Вып. 9. С. 27–29.
- [4] ОСТАПЕНКО В.В. Численное моделирование волновых течений в Сарезском озере, вызванных катастрофическим обрушением берегового оползня // Вычисл. технологии. 1994. Т. 3, № 8. С. 116–125.
- [5] ГОГЕЛИАНИ Л., АМБРОЛАДЗЕ Т. Гидравлическая модель лавинно-оползневых потоков, вторгшегося в водохранилище под воздействием сейсмических сил // Гидравлика. Гидротехника. Гидроэкология. Тбилиси: Самигобло, 1996. С. 60–66 (на грузинском языке).
- [6] БЕРЕЗИН Е.Н., БЕЙЗЕЛЬ С.А. Параллельная реализация алгоритма для расчёта генерации длинных поверхностных волн цунами движением оползня // Вычисл. технологии. 2009. Т. 14, № 1. С. 7–20.
- [7] ШОКИН Ю.И., ЧУБАРОВ Л.Б. О подходах к численному моделированию оползневых механизмов генерации волн цунами // Там же. 2006. Т. 11. Спец. выпуск, посвященный 85-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. Ч. 2. С. 100–111.
- [8] БЕЙЗЕЛЬ С.А., ХАКИМЗЯНОВ Г.С., ЧУБАРОВ Л.Б. Моделирование поверхностных волн, порождаемых подвижным оползнем, движущимся по пространственно неоднородному склону // Там же. 2010. Т. 15, № 3. С. 35–51.
- [9] ШОКИН Ю.И., ФЕДОТОВА З.И., ХАКИМЗЯНОВ Г.С. и др. Моделирование генерации волн цунами движением оползня с учётом вертикальной структуры течения // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф. Труды VIII Всероссийской конф. Кемерово: Институт угла и углехимии СО РАН, 2005. С. 3–27.
- [10] МУЗАЕВ И.Д., МУЗАЕВ Н.И. Постановка и решение начально-краевой задачи поверхностных гравитационных волн в водохранилище узкоканьонного типа // Изв. высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009. № 2. С. 22–24.
- [11] МУЗАЕВ И.Д., МУЗАЕВ Н.И., ДЗЕБОЕВ Б.А. Математическое моделирование сейсмостойкости плотины с учётом влияния водной среды // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 1. С. 90–99.
- [12] СРЕТЕНСКИЙ Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.

*Поступила в редакцию 23 октября 2013 г.,
с доработки — 26 февраля 2014 г.*