

## Анализ численных алгоритмов решения задачи о совместном течении в пласте, перфорационных каналах и скважине

О. Б. БОЧАРОВ, Д. Ю. КУШНИР

Компания Бейкер Хьюз БВ, Новосибирск, Россия

e-mail: Oleg.Bocharov@bakerhughes.com, Dmitry.Kushnir@bakerhughes.com

**Бочаров О.Б., Кушнир Д.Ю.** Анализ численных алгоритмов решения задачи о совместном течении в пласте, перфорационных каналах и скважине // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 4. С. 3–18.

Описывается численный алгоритм для расчёта притока в скважину через систему перфорационных каналов, учитывающий течение в пласте, перфорационных каналах и скважине. Представлены уравнения фильтрации в пласте в полной трёхмерной постановке и уравнения течения в перфорационных каналах и скважине в приближении трубной гидравлики, а также условия сопряжения между ними. Для расчёта ламинарных и турбулентных течений в перфорационных каналах и скважине приведено сравнение трёх численных алгоритмов. По результатам тестирования и анализа выбран оптимальный алгоритм. С его использованием проведён анализ влияния течений в канале и скважине на продуктивность системы в целом.

*Ключевые слова:* фильтрация в пористых средах, перфорационный канал, скважина, численный алгоритм, сопряжение моделей, одномерное приближение трубной гидравлики.

**Bocharov O.B., Kushnir D.Yu.** Numerical algorithms analysis of joint fluid flow modeling in formation, perforation tunnels and a borehole // Computational Technologies. 2014. Vol. 19, No. 4. P. 3–18.

A numerical algorithm for computation of a fluid flow into a borehole through a system of perforation tunnels is proposed. The algorithm considers filtration in a porous medium, flow in perforation tunnels and a borehole. The porous medium filtration is described in the full, three dimensional formulation, and the perforation tunnels and borehole fluid flow equations are hydraulic-approximated. Matching conditions for the joint algorithm are described. A comparison of some algorithms for modeling laminar and turbulent tunnel and borehole flow regimes is presented.

The effective algorithm for computation of the joint fluid flow in a formation, perforation tunnels and a borehole has been developed. The algorithm is based on an analysis of schemes for conjugating three- and one-dimensional models. This algorithm is appropriate for industrial optimization of oil production through a system of perforation tunnels. Using the algorithm we have analyzed the perforation tunnels and borehole flow influence on the whole system productivity. It is pointed out that the convective fluid transport slightly influences on the whole system productivity under the operational conditions. The analysis demonstrates that the tunnels and borehole cleanness effects on the productivity in a stronger manner than the pressure regime.

*Keywords:* filtration in porous medium, hydraulic approach, perforation tunnel, borehole, multicomponent mathematical models, consistent numerical algorithms, matching conditions.

## Введение

Перфорирование обсадки скважины и прискважинной зоны является одним из наиболее распространённых методов установления эффективной связи между коллектором и стволом скважины [1]. Производительность системы перфорационных каналов и скважины в целом зависит от многих факторов, связанных со свойствами коллектора, с типом используемой системы перфорирования, условиями эксплуатации и др. Для априорной оценки эффективности перфорационных систем необходим численный алгоритм, позволяющий рассчитывать решение задачи о совместном течении в пласте, перфорационных каналах и скважине. При этом с учётом задач оптимизации алгоритм должен быть достаточно быстрым. Для нахождения решений разрабатывались приближённые численные алгоритмы и использовались стандартные пакеты вычислительной гидродинамики [2–5]. Однако анализ в условиях совместного течения в пласте, перфорационных каналах и скважине в научных публикациях не проведён.

Авторами в работе [6] был представлен специальный численный алгоритм расчёта притока в скважину через систему перфорационных каналов, в котором перфорационные каналы описывались как линейные сингулярные стоки. Используемый подход является обобщением на трёхмерный случай метода сопряжения моделей массопереноса разных размерностей во взаимосвязанных течениях подземных и поверхностных вод, реализованного в двумерной постановке в монографии [7]. Алгоритм требует небольших вычислительных ресурсов и позволяет за приемлемое время рассчитывать приток к протяжённым (до 1 км) участкам перфорированных вертикальных скважин в слоистых пластах [8].

В настоящей работе проанализирован численный алгоритм, обобщающий алгоритм [6] и учитывающий совместные течения в пласте, перфорационных каналах и скважине. С использованием разработанного алгоритма проведён анализ влияния течений в канале и скважине на продуктивность системы в целом.

## 1. Математическая формулировка задачи

Для представления полной совместной модели необходимы уравнения движения в пласте, перфорационных каналах и скважине, а также условия сопряжения между ними. Задача о фильтрации в пористой среде рассматривается в полной трёхмерной постановке, а в каналах и скважине течение описывается в одномерном приближении трубной гидравлики. Общая схема расчётной области задачи представлена на рис. 1.

### 1.1. Фильтрационное течение в пласте

Для описания течения в пористой среде используется модель фильтрации, основанная на законе Дарси [9]. Перфорационный канал реализован как сингулярный линейный сток, сосредоточенный внутри расчётных блоков. Уравнение сохранения массы в пористой среде с учётом массообмена с каналами принимает вид

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}_f) + \sum_{j=1}^{N_t} \rho q_{tj}(t, \mathbf{x}) \delta_{tj} = 0,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $m$  — пористость среды;  $t$  — время;  $\mathbf{x}$  — координаты точки пространства;  $\mathbf{v}_f$  — скорость фильтрации в пористой среде;  $q_{tj}$  — приток жидкости

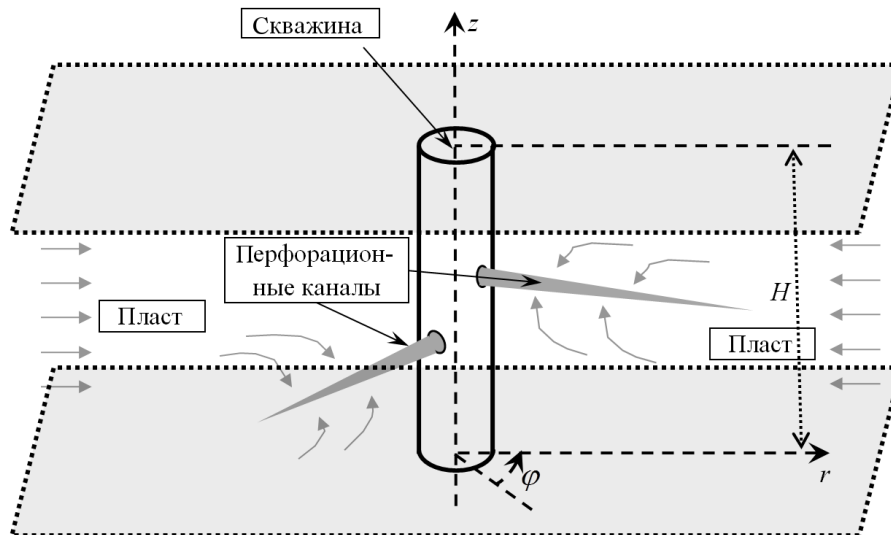


Рис. 1. Схематическое изображение скважины и прискважинной зоны с системой перфорационных каналов

на единицу длины  $j$ -го перфорационного канала в единицу времени, кг/(м·с);  $\delta_{tj}$  — характеристическая функция, сосредоточенная на оси  $j$ -го перфорационного канала,  $1/\text{м}^2$ ;  $N_t$  — количество перфорационных каналов в рассматриваемой области.

Если пренебречь изменением плотности и вязкости флюида с изменением давления и предположить, что среда недеформируема ( $\rho = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ), то рассматриваемая задача сводится к стационарной. Подставив выражение закона Дарси

$$\mathbf{v}_f = -\frac{K_f}{\mu} \nabla(p_f + \gamma z),$$

где  $K_f$  — тензор проницаемости пористой среды,  $p_f$  — поровое давление,  $\mu$  — вязкость жидкости,  $\gamma$  — удельный вес флюида, в закон сохранения массы, получим уравнение

$$\text{div} \left( \frac{K_f}{\mu} \nabla(p_f + \gamma z) \right) - \sum_{j=1}^{N_t} q_{tj} \delta_{tj} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) решается в цилиндрической области  $\Omega = \{r_b \leq r \leq r_e, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq H\}$ , где ось  $r$  направлена перпендикулярно оси скважины, совпадающей с координатной линией  $z$ ,  $\varphi$  — угловая координата в плоскости, перпендикулярной оси скважины,  $r_b$  — радиус скважины,  $r_e$  — радиус влияния скважины,  $H$  — суммарная толщина пласта. На границе расчётной области заданы следующие граничные условия:

$$\left. \frac{\partial p_f}{\partial r} \right|_{r=r_b} = 0, \quad p_f|_{r=r_e} = p_e(z).$$

На подошве и кровле пласта, при  $z = 0$  и  $z = H$  соответственно, заданы условия непротекания

$$v_z \equiv -\frac{K_f}{\mu} \frac{\partial}{\partial z}(p_f + \gamma z) \Big|_{z=0} = 0, \quad v_z|_{z=H} = 0.$$

Вдоль угловой координаты  $\varphi$  выполнены условия периодичности:  $p|_{\varphi=0} = p|_{\varphi=2\pi}$ . Предполагается, что давление вдали от скважины, при  $r = r_e$ , распределено по гидростатическому закону:  $p_e(z) = \rho g(H - z)$ .

Проблема параметризации притока при замене реальной скважины точечным источником при сеточной дискретизации задачи изучается давно [10]. В настоящей работе использован подход, подробно описанный в [6], согласно которому

$$q_t = C_t(p_f - p_t), \quad C_t = \frac{2\pi}{\mu} \frac{\sqrt{k_v k_h}}{\ln(r_0/r_t)}.$$

Здесь  $p_t$  — давление в  $j$ -м канале,  $r_0 = 0.28((k_h/k_v)^{1/2}\Delta z^2 + (k_v/k_h)^{1/2}\Delta\xi^2)^{1/2}/((k_v/k_h)^{1/4} + (k_v/k_h)^{1/4})$ ;  $r_t$  — радиус канала;  $k_v$  — вертикальная,  $k_h$  — горизонтальная проницаемость пласта;  $\Delta\xi = r\Delta\varphi$  — шаг сетки по угловой координате;  $\Delta z$  — шаг сетки по вертикальной координате  $z$ .

## 1.2. Модель течения в перфорационных каналах и скважине

Для расчёта характеристик течения в перфорационных каналах и скважине используется одномерное приближение трубной гидравлики [11, 12], а именно, для определения скорости и давления в каждом перфорационном канале и скважине предлагается решать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial(v_t \omega_t \rho)}{\partial l} = Q, \\ \omega_t \frac{\partial p_t}{\partial l} + \frac{\partial(\alpha \rho \omega_t v_t^2)}{\partial l} = -f_t, \end{cases} \quad Q = \begin{cases} \rho q_{tj}, & \text{для каналов,} \\ \sum_{j=1}^{N_t} \rho q_{hj} \delta_{htj}, & \text{для скважины.} \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $v_t$  — осреднённая по сечению скорость течения в трубе;  $\omega_t(l)$  — площадь поперечного сечения трубы;  $l$  — линейная координата вдоль оси трубы;  $p_t$  — осреднённое по сечению давление в трубе;  $f_t$  — удельная сила трения о боковую поверхность на единицу длины трубы;  $\alpha$  — коэффициент учёта турбулентно-конвективного переноса (при ламинарном течении в гладких трубах  $\alpha = 1$ );  $\delta_{htj}$  — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке соединения  $j$ -го перфорационного канала и скважины (безразмерна);  $N_t$  — число каналов, впадающих в скважину.

Величина  $q_{hj}$  определяется из условия сохранения массы в местах контакта скважины с каналами. На конце канала, в точке соединения со скважиной, принимается равенство давлений  $p_t|_{l=0} = p_h|_{z=z_t}$ . На другом конце канала, находящемся в пласте, задаётся приток жидкости через носик канала из пористой среды при условии равенства давлений между каналом и пластом в этой точке  $p_t|_{l=L_t} = p_f(R_t, \Phi_t, Z_t)$ , где  $(R_t, \Phi_t, Z_t)$  — координаты носика канала.

В скважине на концах интервала  $[z_1, z_2]$ , содержащего интервал  $[0, H]$ , принимается либо расход, либо давление. Условия на разных концах могут быть различны.

Удельная сила трения  $f_t$  в общем случае зависит от числа Рейнольдса  $Re = v_t d_t \rho / \mu$ ,  $d_t$  — диаметр трубы, и относительной шероховатости стенок трубы  $\sigma/d_t$  и записывается в виде

$$f_t = \lambda(Re, \sigma/d_t) \frac{\rho v_t |v_t|}{2d_t} \omega_t,$$

где  $\lambda$  — коэффициент гидравлического трения, зависящий от режима течения в трубе.

### 1.3. Режимы течений

Предполагается, что в пористой среде имеет место ламинарный режим фильтрации в соответствии с законом Дарси. В каналах и скважине в зависимости от чисел Рейнольдса может быть как ламинарный, так и турбулентный режим течения. Различие между ламинарным и турбулентным режимами задаётся зависимостями  $\alpha(\text{Re})$  и  $\lambda(\text{Re}, \sigma/d_t)$  [12]. Для ламинарного течения, в случае не загрязнённого частицами канала, удельная сила трения вдоль канала вычисляется по формуле, соответствующей течению Пуазейля в канале круглого сечения [13]

$$f_t = 8\pi\mu v_t, \quad \lambda = 64/\text{Re}.$$

Если канал существенно забит частицами, то, проводя аналогию с трением в пористой среде, можно ввести проницаемость канала  $k_t$ . Тогда удельная сила трения выражается в виде

$$f_t = \frac{\omega_t \mu}{k_t} v_t, \quad k_t = \frac{2d_t^2}{\lambda(\text{Re})\text{Re}}, \quad (3)$$

где значение  $k_t = d_t^2/32$  соответствует течению Пуазейля.

Для ламинарно-турбулентного и турбулентного режимов течения в канале, которые возникают при  $\text{Re} \geq \text{Re}^*$  ( $600 \leq \text{Re}^* \leq 1500$ ), при вычислении коэффициента гидравлического трения используется формула Альтшуля, хорошо описывающая экспериментальные данные [12]:

$$\lambda = 0.11 (\sigma/d_t + 68/\text{Re})^{0.25}. \quad (4)$$

Эквивалентная шероховатость  $\sigma$ , например, для бетонных и цементных каналов варьируется в пределах от 0.3 до 9 мм [12].

## 2. Численные алгоритмы для течений в перфорационных каналах

Без учёта течения в перфорационных каналах и скважине численный алгоритм достаточно подробно описан в [6]. В указанной работе приводятся результаты моделирования фильтрационного течения в пласте с применением модели постоянного давления в перфорационных каналах. Здесь использовался интегро-интерполяционный метод получения разностных уравнений на блочно-центрированной сетке с противопотоковыми аппроксимациями. Давление определялось в центрах блоков, скорости — на границах блоков. В настоящей работе применяется более сложная модель и сравниваются некоторые совместные алгоритмы расчёта течения в пласте, перфорационных каналах и скважине. Основное внимание уделяется методам расчёта течений в каналах.

Перепишем систему (2) для одного перфорационного канала через осреднённый по сечению импульс в канале  $m_t(l) = v_t \omega_t \rho$ , учитывая явное выражение для притока из пласта

$$\begin{cases} \frac{\partial m_t}{\partial l} = \rho C_t (p_f - p_t), \\ \omega_t \frac{\partial p_t}{\partial l} + \frac{\partial(\alpha m_t v_t)}{\partial l} = -m_t \Psi(\text{Re}). \end{cases} \quad (5)$$

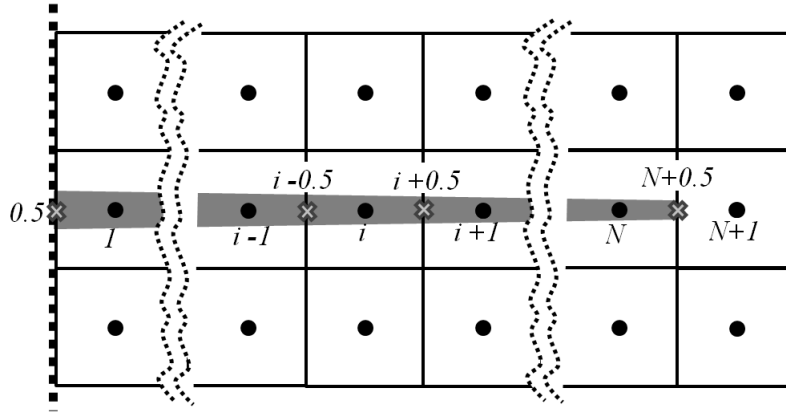


Рис. 2. Шаблон с расположением целых и полуцелых узлов. Слева пунктиром показана граница скважины, серым цветом отмечен перфорационный канал

Здесь  $\Psi(\text{Re})$  — функция, определяемая по  $f_t$ , характеризует трение о стенки канала:

$$\Psi(\text{Re}) = \frac{|v_t|}{2d_t} \lambda(\text{Re}, \sigma/d_t) \text{ в случае турбулентного течения в чистом канале,}$$

$$\Psi(\text{Re}) = \frac{\mu}{\rho} \frac{32}{d_t^2} \text{ в случае ламинарного течения Пуазейля в чистом канале,}$$

$$\Psi(\text{Re}) = \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{k_t} \text{ в случае фильтрационного течения в пористом (загрязнённом) канале,}$$

$k_t$  — проницаемость канала.

Сравнивались три метода аппроксимации искомым переменных системы (5) на сеточном шаблоне, показанном на рис. 2:

I — давление и импульс вычисляются в целых узлах;

II — давление и импульс вычисляются в полуцелых узлах;

III — давление вычисляется в целых, импульс — в полуцелых узлах.

### 2.1. Схема I. Давление и импульс вычисляются в целых узлах

Интегрирование системы (5) производится по отрезкам  $\Omega_{i+0.5} = [l_i, l_{i+1}]$ ,  $h_i = l_{i+0.5} - l_{i-0.5}$ . Неизвестные  $m_{0.5}, m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_N, m_{N+0.5}$ ,  $p_{0.5}, p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_N, p_{N+0.5}$  образуют вектор размерности  $2N + 4$ . После интегрирования по  $\Omega_{i+0.5}$ , аппроксимации производных, интерполяции и линеаризации получаем двухслойную итерационную схему вида

$$\begin{cases} m_{i+1} - m_i + 0.5(C_i \rho_i p_i h_{i+1} + C_{i+1} \rho_{i+1} p_{i+1} h_i) - 0.5(C_i \rho_i p_{f,i} h_{i+1} + C_{i+1} \rho_{i+1} p_{f,i+1} h_i) = 0, \\ \omega_{i+0.5}(p_{i+1} - p_i) + 0.5(m_i \Psi_i^{n-1} h_{i+1} + m_{i+1} \Psi_{i+1}^{n-1} h_i) + \alpha(m_{i+1} v_{i+1}^{n-1} - m_i v_i^{n-1}) = 0, \end{cases}$$

где  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $\Psi_i^{n-1}$  и  $v_i^{n-1}$  — значения, взятые с предыдущей итерации. Интегрирование и аппроксимация в крайних блоках  $[l_{0.5}, l_1]$  и  $[l_N, l_{N+0.5}]$  производятся отдельным образом:

$$\begin{cases} m_1 - m_{0.5} + 0.5C_1 \rho_1 p_1 h_1 - 0.5C_1 \rho_1 p_{f,1} h_1 = 0, \\ \omega_{0.5}(p_1 - p_{0.5}) + 0.5m_1 \Psi_1^{n-1} h_1 + \alpha(m_1 v_1^{n-1} - m_{0.5} v_{0.5}^{n-1}) = 0, \\ m_{N+0.5} - m_N + 0.5C_N \rho_N p_N h_N - 0.5C_N \rho_N p_{f,N} h_N = 0, \\ \omega_N(p_{N+0.5} - p_N) + 0.5m_N \Psi_N^{n-1} h_N + \alpha(m_{N+0.5} v_{N+0.5}^{n-1} - m_N v_N^{n-1}) = 0. \end{cases}$$

Два граничных условия

$$p_{0.5} = p_h \text{ и } m_{N+0.5} = \frac{\rho\omega_{N+0.5}k_{f,N+0.5}}{0.5\mu h_{N+0.5}}(p_{f,N+1} - p_{f,N}) \quad (6)$$

замыкают систему.

Обозначив неизвестные с индексами 0.5 и  $N + 0.5$  как неизвестные с индексами 0 и  $N + 1$  соответственно, перепишем систему в матричном виде

$$\bar{A}_i^{n-1} \begin{pmatrix} m_i \\ p_i \end{pmatrix} + \bar{B}_i^{n-1} \begin{pmatrix} m_{i+1} \\ p_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_i \\ Q_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Вместе с граничными условиями (6), система (7) решается методом векторной прогонки [14]. Суть метода заключается в следующем. Представим решение в виде

$$\begin{pmatrix} m_i \\ p_i \end{pmatrix} = \bar{R}_i^{n-1} \begin{pmatrix} m_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_i^{n-1} \\ T_i^{n-1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Тогда, подставив (8) для индексов  $i$  и  $i+1$  в (7),  $\bar{R}_i$  и  $\begin{pmatrix} S_i \\ T_i \end{pmatrix}$  можно вычислить по рекуррентным формулам (индекс  $n - 1$  далее опущен)

$$\bar{R}_{i+1} = -\bar{B}_i^{-1}\bar{A}_i\bar{R}_i, \quad \begin{pmatrix} S_{i+1} \\ T_{i+1} \end{pmatrix} = \bar{B}_i^{-1} \left[ \begin{pmatrix} P_i \\ Q_i \end{pmatrix} - \bar{A}_i \begin{pmatrix} S_i \\ T_i \end{pmatrix} \right].$$

В итоге получается уравнение

$$\begin{pmatrix} m_{N+1} \\ p_{N+1} \end{pmatrix} = \bar{R}_{N+1} \left[ \begin{pmatrix} m_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{N+1} \\ T_{N+1} \end{pmatrix} \right],$$

которое вместе с граничными условиями (6) легко решается. Затем по формулам (8) находятся все неизвестные.

В работе [14] доказана корректность метода при условии  $\|\bar{B}_i^{-1}\bar{A}_i\| < 1$ . Установлено, что метод векторной прогонки в данной задаче даёт решение не при любых значениях параметров.

Далее под коэффициентом продуктивности системы перфорационных каналов  $\text{Pr}$  понимается отношение расчётного притока  $Q_T$  в перфорированную скважину к теоретическому притоку в не обсаженную скважину  $Q_0$ , получаемое по формуле Дююи [1]:

$$\text{Pr} = \frac{Q_T}{Q_0}, \quad Q_T = \sum_{i=1}^n \int_{r_w}^{R_t} Q_i(r) dr, \quad Q_0 = \frac{2\pi H k_r}{\mu} \frac{|p_e - p_h|}{\ln(r_e/r_b)},$$

где  $n$  — число перфорационных каналов,  $Q_i = Q$  для  $i$ -го канала. Как правило,  $\text{Pr}$  — один из основных технологических показателей, используемых при анализе перфорационных систем.

В качестве контрольного теста рассматривалась задача с постоянными коэффициентами  $\Psi(\text{Re}) = \mu/(\rho k_t)$  и  $\alpha = 0$ . Для имитации загрязнения канала (который может быть забит частицами — гравийная набивка, песок, пропант, остатки зарядного устройства [15]) варьируем  $k_t$ . Результаты тестирования алгоритма представлены на рис. 3.

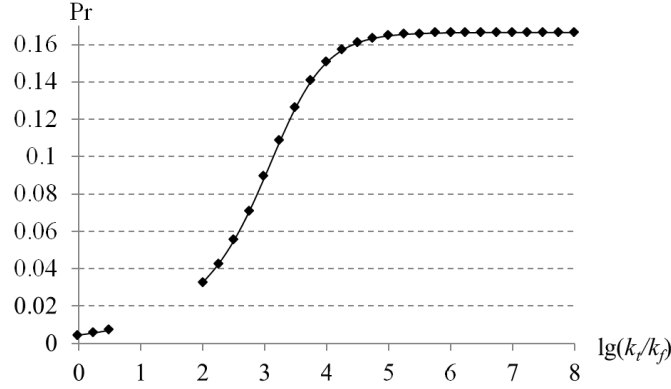


Рис. 3. Зависимость коэффициента продуктивности системы перфорационных каналов от отношения проницаемостей канала и пласта

В диапазоне  $0.5 < \lg(k_t/k_f) < 2$  алгоритм расчёта течения в канале расходится. Как показал численный анализ, именно в этом диапазоне нормы некоторых матриц  $\bar{B}_i^{-1}\bar{A}_i$  больше 1. Более того, в диапазоне  $\lg(k_t/k_f) \leq 0.5$  в канале вблизи скважины обнаруживается физически не описываемое поведение компонент скорости и давления. Возможно, это связано с рассогласованием полей скорости в пласте и в канале, так как в рассматриваемом варианте они рассчитываются в разных узлах сетки. Таким образом, можно сделать вывод, что данный алгоритм применим лишь в диапазоне  $2 \leq \lg(k_t/k_f)$ .

## 2.2. Схема II. Давление и импульс вычисляются в полуцелых узлах

Интегрирование системы (5) производится по отрезкам  $\Omega_i = [l_{i-0.5}, l_{i+0.5}]$ ,  $h_i = l_{i+0.5} - l_{i-0.5}$ . Неизвестные  $m_{0.5}, m_{1.5}, \dots, m_{i+0.5}, \dots, m_{N+0.5}$ ,  $p_{0.5}, p_{1.5}, \dots, p_{i+0.5}, \dots, p_{N+0.5}$  дают вектор размерности  $2N + 2$ .

После интегрирования по  $\Omega_i$  и аппроксимаций получаем двухслойную схему вида

$$\begin{cases} m_{i+0.5} - m_{i-0.5} + 0.5C_i\rho_i h_i(p_{i+0.5} + p_{i-0.5}) - C_i\rho_i h_i p_{f,i} = 0, \\ \omega_i(p_{i+0.5} - p_{i-0.5}) + 0.5h_i(m_{i+0.5}\Psi_{i+0.5}^{n-1} + m_{i-0.5}\Psi_{i-0.5}^{n-1}) + \\ + \alpha(m_{i+0.5}v_{i+0.5}^{n-1} - m_{i-0.5}v_{i-0.5}^{n-1}) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где  $i = 1, \dots, N - 1$ ,  $\Psi_{i+0.5}^{n-1}$  и  $v_{i-0.5}^{n-1}$  — значения, взятые с предыдущего шага. Граничные условия (6) замыкают систему. Далее из первого тождества системы (9) находим  $m_{i+0.5}$ :

$$\begin{aligned} m_{i+0.5} &= m_{i-0.5} - 0.5C_i\rho_i h_i(p_{i+0.5} + p_{i-0.5}) + C_i\rho_i h_i p_{f,i} = \dots \\ &= m_{N+0.5} - 0.5 \sum_{j=i}^N C_j\rho_j h_j(p_{j+0.5} + p_{j-0.5}) + \sum_{j=i}^N C_j\rho_j h_j p_{f,j}. \end{aligned}$$

Это выражение подставляем во второе тождество системы (9) и с учётом граничных уравнений (6) получаем систему уравнений для нахождения  $p_{0.5}, p_{1.5}, \dots, p_{i+0.5}, \dots, p_{N+0.5}$  вида



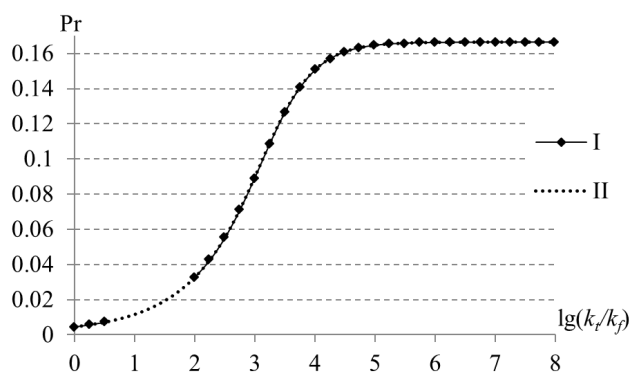


Рис. 4. Зависимость коэффициента продуктивности от отношения проницаемостей канала и пласта для двух схем расчёта течения в канале

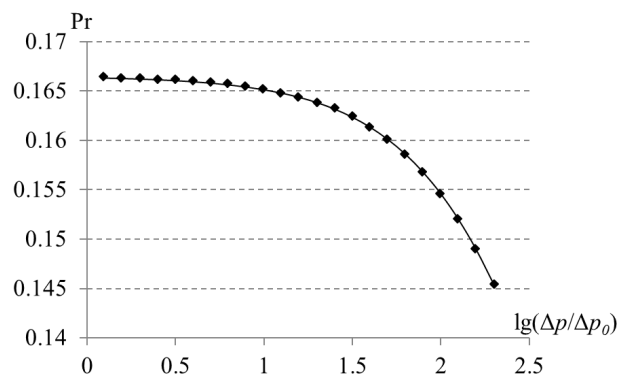


Рис. 5. Зависимость коэффициента продуктивности от перепада давления

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \ddots \\ \times & \times & \times & \times & \times & \ddots & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \ddots & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \ddots & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \ddots & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{0.5} \\ p_{1.5} \\ p_{2.5} \\ \vdots \\ p_{N-1.5} \\ p_{N-0.5} \\ p_{N+0.5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{0.5} \\ d_{1.5} \\ d_{2.5} \\ \vdots \\ d_{N-1.5} \\ d_{N-0.5} \\ d_{N+0.5} \end{pmatrix}$$

Здесь знаками  $\times$  отмечены ненулевые элементы матрицы,  $d_i$  — правая часть системы. Матрица данной системы под главной диагональю имеет одну ненулевую диагональ, поэтому её можно решить методом Гаусса, исключая последовательно элементы нулевой диагонали.

Как показано на рис. 4, на той же тестовой задаче в диапазоне  $0.5 < \lg(k_t/k_f) < 2$ , где предыдущая схема I не сходилась, схема II сходится. Однако в диапазоне  $\lg(k_t/k_f) \leq 1$  в канале вблизи скважины опять обнаружено нетипичное поведение компонент скорости и давления: скорость меняет знак, давление немонотонно (см. ниже рис. 8). В целом можно считать, что алгоритм применим в диапазоне  $1 \leq \lg(k_t/k_f)$ .

Чтобы проверить работоспособность схемы II при наличии конвективного переноса, проводились численные эксперименты с  $\Psi(\text{Re}) = 32\mu/(\rho d_t^2)$  и  $\alpha = 1$ . При увеличении перепада давления в системе скважина — пласт значимость конвективного переноса возрастает, так как увеличивается скорость в канале. На рис. 5 показана зависимость коэффициента продуктивности от перепада давления  $\Delta p/\Delta p_0$ ,  $\Delta p_0 = 0.1$  МПа. При  $\lg(\Delta p/\Delta p_0) > 2.3$  алгоритм расчёта течения в канале расходится. Применение варианта схемы с аппроксимацией конвективных членов против потока не привело к улучшению результатов.

### 2.3. Схема III. Давление вычисляется в целых, импульс — в полуцелых узлах

В этом алгоритме вычисления давления и скорости в пласте и в канале согласованы. Такой подход к аппроксимации искомым переменных на разнесённых сетках распространён в задачах классической гидродинамики, в которых уравнение для давления можно получить дифференцированием уравнения изменения импульса. Этот приём и будет использован.

Преобразуем второе уравнение системы (5) (индекс  $t$  далее опущен) к виду

$$\frac{\partial(\alpha m v)}{\partial l} = \frac{\partial(\alpha m^2 \rho^{-1} \omega^{-1})}{\partial l} = \alpha \left[ \frac{2m}{\rho \omega} \frac{\partial m}{\partial l} - \left( \frac{m}{\rho \omega} \right)^2 \frac{\partial(\rho^{-1} \omega^{-1})}{\partial l} \right].$$

Подставим  $\frac{\partial m}{\partial l}$  из первого уравнения системы (5)

$$\alpha \left[ \frac{2m}{\rho \omega} \frac{\partial m}{\partial l} - \left( \frac{m}{\rho \omega} \right)^2 \frac{\partial(\rho^{-1} \omega^{-1})}{\partial l} \right] = \alpha \left[ \frac{2m}{\omega} C(p_f - p) - \left( \frac{m}{\rho \omega} \right)^2 \frac{\partial(\rho^{-1} \omega^{-1})}{\partial l} \right].$$

Возьмем частную производную от второго уравнения системы (5) и получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial l} = \rho C(p_f - p), \\ \frac{\partial}{\partial l} \left( \omega \frac{\partial p}{\partial l} \right) + \alpha \frac{\partial}{\partial l} \left[ \frac{2m}{\omega} C(p_f - p) - \left( \frac{m}{\rho \omega} \right)^2 \frac{\partial(\rho^{-1} \omega^{-1})}{\partial l} \right] = - \frac{\partial(m \Psi(\text{Re}))}{\partial l}. \end{cases} \quad (10)$$

Интегрирование (10) производится по отрезкам  $\Omega_i = [l_{i-0.5}, l_{i+0.5}]$ ,  $h_i = l_{i+0.5} - l_{i-0.5}$ . Неизвестные  $m_{0.5}, m_{1.5}, \dots, m_{i+0.5}, \dots, m_{N+0.5}$ ,  $p_{0.5}, p_1, \dots, p_i, \dots, p_N, p_{N+0.5}$  образуют вектор размерности  $2N + 3$ .

Применяя интегро-интерполяционный метод к системе (10), построим двухслойную итерационную разностную схему для нахождения полей скорости и давления в канале (индексом  $n - 1$  обозначено значение с предыдущей итерации)

$$\begin{cases} m_{i+0.5} - m_{i-0.5} + \rho_i C_i h_i (p_i - p_{f,i}) = 0, \\ 2 \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{h_i + h_{i+1}} \omega_{i+0.5} - \frac{p_i - p_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} \omega_{i-0.5} \right) + \\ + 2\alpha \left[ \left( \frac{m^{n-1} C}{\omega} (p_f - p) \right)_{i+0.5} - \left( \frac{m^{n-1} C}{\omega} (p_f - p) \right)_{i-0.5} \right] - \\ - 2\alpha \left[ \left( \frac{m^{n-1}}{\rho \omega} \right)_{i+0.5}^2 \frac{(\rho \omega)_{i+1}^{-1} - (\rho \omega)_i^{-1}}{h_i + h_{i+1}} - \left( \frac{m^{n-1}}{\rho \omega} \right)_{i-0.5}^2 \frac{(\rho \omega)_i^{-1} - (\rho \omega)_{i-1}^{-1}}{h_i + h_{i-1}} \right] + \\ + [(m \Psi)_{i+0.5}^{n-1} - (m \Psi)_{i-0.5}^{n-1}] = 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (11)$$

с тремя граничными условиями  $p_{0.5} = p_h$ ,  $m_{N+0.5} = \rho \omega_{N+0.5} C_{tip} (p_{f,N+1} - p_{N+0.5})$ ,  $p_{N+0.5} = p_N$  (либо возможна интерполяция значения  $p_{N+0.5}$  по  $p_{N-1}$ ,  $p_N$  и  $p_{f,N+1}$ ). Здесь  $C_{tip} = k_{f,N+0.5} / (0.5 h_{N+1} \mu)$  — коэффициент притока в кончик канала;  $k_f$  — проницаемость пласта;  $h_{N+1}$  — шаг блока сетки, следующий за перфорационным каналом в радиальном направлении в общей задаче;  $p_{i+0.5} = p_i \lambda_i + p_{i+1} (1 - \lambda_i)$ ;  $\lambda_i = \omega_i h_{i+1} / (\omega_i h_{i+1} + \omega_{i+1} h_i)$ .

Из-за присутствия нелинейных конвективных членов типа  $tr$  и, в общем случае, нелинейной функции  $\Psi(m)$  применяется двухслойная итерационная схема поиска решения. Второе уравнение системы (11) решается методом трёхточечной прогонки, при этом значения импульсов и функции трения  $\Psi$  берутся с предыдущего шага. Далее из первого уравнения вычисляются значения импульса. Итерации применяются до получения приемлемой точности ( $|m^n - m^{n-1}|_C / |m^n|_C < 10^{-8}$ , где  $|\cdot|_C$  — непрерывная сеточная норма). В качестве нулевого приближения, при  $n = 0$ , используется постоянное давление в канале, равное  $p_h$ . Давление в пористой среде  $p_f$  во время расчёта течения в канале не меняется.

### 3. Схема объединения моделей

Схемы расчёта течения в канале встраиваются в общий алгоритм нахождения поля течения в пористой среде и в каналах. На каждом итерационном шаге совместного алгоритма сначала по известному распределению давления в каналах и скважине находится давление в пористой среде, а затем по схемам I, II, III уже с новыми значениями давления в пористой среде  $p_f$  вычисляются значения скорости и давления в каналах. Так продолжается до сходимости полей давления в среде и каналах с заданной точностью.

При ламинарном течении и отсутствии нелинейных конвективных членов итерационная схема расчёта течения в каналах не требуется, так как процесс сходится за одну итерацию. Поэтому течение в каналах и скважине для ламинарного случая без учёта конвективного переноса может быть встроено в общий итерационный процесс расчёта фильтрационного течения в пласте, что позволяет существенно экономить вычислительные ресурсы.

### 4. Сравнение численных алгоритмов

На рис. 6, *a* приведена зависимость коэффициента продуктивности для схем II и III в зависимости от отношения проницаемостей. При  $\lg(k_t/k_f) \geq 2$  расхождение составляет менее 1 %.

Из рис. 6, *б*, где представлена зависимость коэффициента продуктивности от перепада давления, следует что схемы II и III также показывают близкие результаты и диапазон их сходимости почти совпадает ( $\lg(\Delta p/\Delta p_0) \leq 2.2$ ).

Как показывает рис. 7, при расчёте течений в канале обе схемы используют примерно одинаковое число итераций, хотя схема II более экономична при больших перепадах давления.

Вместе с тем в отличие от схемы II схема III при  $\lg(k_t/k_f) \leq 1$  даёт более физически логичные результаты — давление (и скорость) в канале вблизи скважины ведут себя монотонно (рис. 8).

На рис. 9 сравниваются эффективности алгоритмов II и III в рамках общей задачи. В данном тесте течение в скважине не учитывалось. Проницаемость канала  $k_t$  соответствует течению Пуазейля в круглой трубе. В легенде к рисунку указано, через какое количество внешних итераций рассчитывается течение в канале. Приведены время работы процессора и общее число внешних итераций, необходимых для достижения заданной точности. Из рисунка видно, что в данной ситуации схема III оказывается более экономичной. Вероятно, это связано с лучшим согласованием сеточных полей в канале

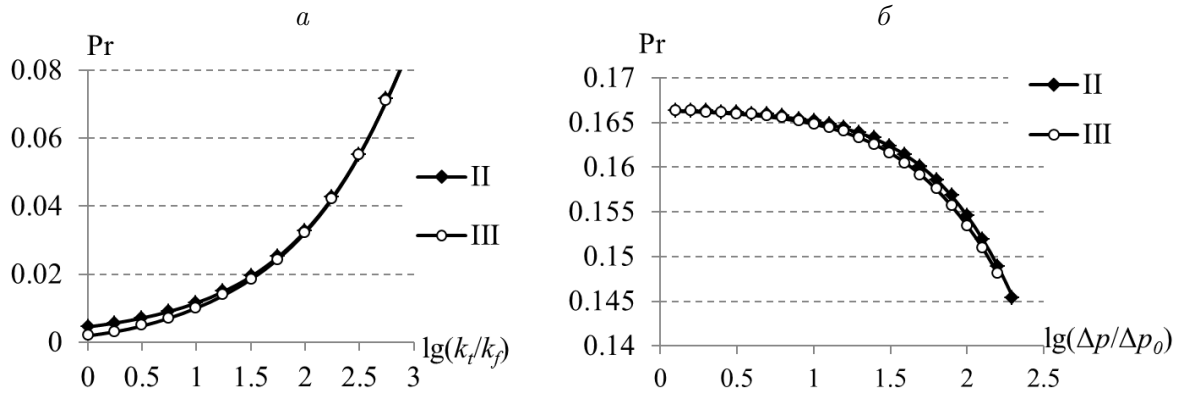


Рис. 6. Зависимость коэффициента продуктивности от отношения проницаемостей канала и пласта (а) и от перепада давления (б) для схем расчёта II и III

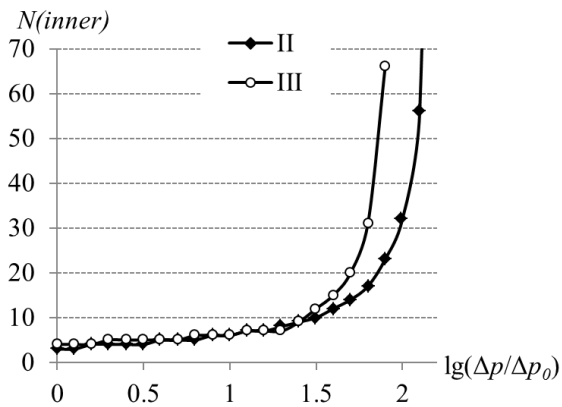


Рис. 7. Количество внутренних итераций  $N(\text{inner})$  в зависимости от перепада давления при расчёте по схемам II и III при известном поле давления в пласте

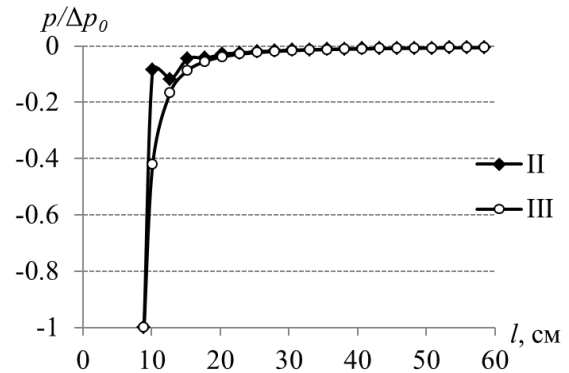


Рис. 8. Давление в узлах сетки канала для схем расчёта II и III при  $\lg(k_t/k_f) = 0.5$

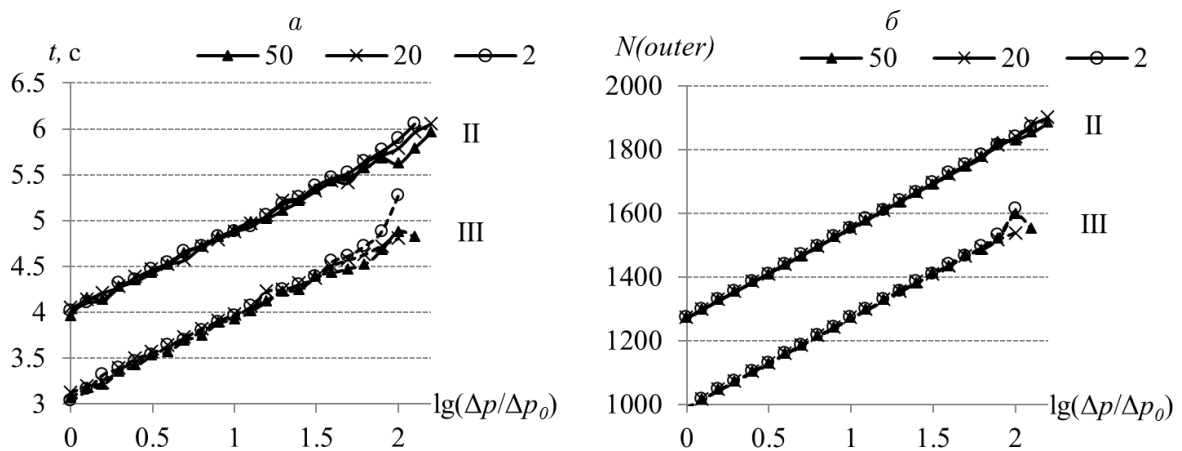


Рис. 9. Время расчёта (а) и количество внутренних итераций  $N(\text{outer})$  (б) в зависимости от перепада давления в системе пласт — скважина с учётом конвективного переноса

и пористой среде, что приводит, в частности, к физически более адекватному описанию течения в канале.

Основываясь на проведённом анализе, для дальнейших исследований авторы предпочли метод III.

В [4] аналогичная задача решалась в точной трёхмерной постановке с наличием расчётных блоков в каналах. Использовался программный пакет ANSYS FLUENT. Расчёты по предложенному в настоящей работе алгоритму для самых сложных вариантов (большие вязкости, большие перепады давления, малые проницаемости) дали отклонение не более 5%, что приемлемо для рассматриваемого класса задач. В то же время выигрыш во временных ресурсах составил до 200 раз.

Сравнение с экспериментальными и натурными данными крайне затруднено из-за большого числа плохо контролируемых факторов и возможно лишь на качественном уровне. Частично это было проведено в [4].

## 5. Приложение алгоритма

### 5.1. Анализ влияния режимов течения в каналах

Для исследования влияния режимов течения в канале на коэффициент продуктивности рассмотрим модельную задачу с одним каналом, расположенным достаточно далеко от кровли и подошвы пласта. Это позволит исключить влияние интерференции канала и размеров данной области.

Параметры базового варианта: радиус скважины  $r_w = 8.9$  см, радиус влияния скважины  $r_e = 254$  см, рассматривается один перфорационный канал длиной  $L_t = 50.8$  см, диаметром  $d_t = 1.3$  см, расстояние до подошвы и кровли пласта одинаковое и равно 121.9 см, рабочий перепад давления  $\Delta p = p_e - p_h = 0.1$  МПа, проницаемость пласта  $k_f = 100$  мД, вязкость пластового флюида  $\mu = 1$  сП, плотность пластового флюида  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, зоны внедрения бурового раствора и уплотнения вокруг каналов отсутствуют.

Чтобы конвективный перенос повлиял на коэффициент продуктивности, необходимо увеличить числа Рейнольдса в канале. Например, в частности, при увеличении перепада

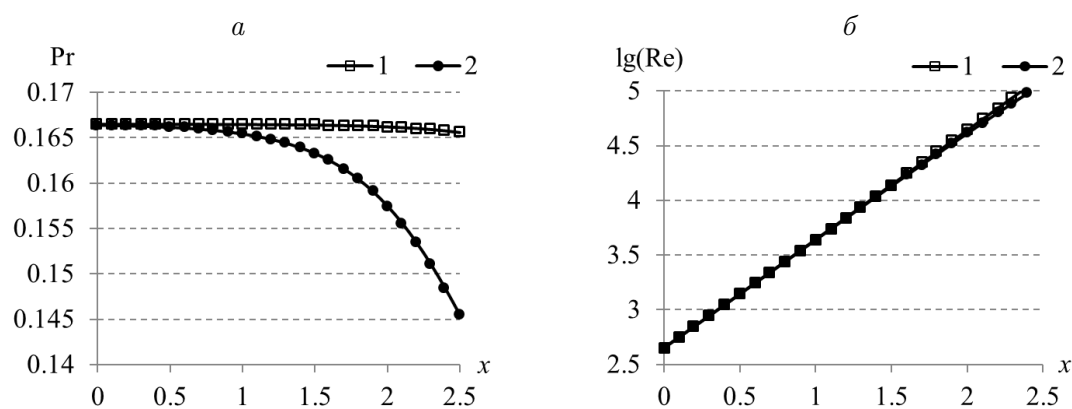


Рис. 10. Зависимость коэффициента продуктивности (а) и логарифма числа Рейнольдса в середине перфорационного канала (б) от логарифма перепада давления  $x = \lg(\Delta p/\Delta p_0)$ : 1 — без учёта конвективного переноса,  $\alpha = 0$ ; 2 — с учётом конвективного переноса,  $\alpha = 1$

давления  $\Delta p$  в канале возникает турбулентный режим. На рис. 10 приведены рассчитанные зависимости коэффициента продуктивности и числа Рейнольдса от логарифма перепада давления,  $k_t$  вычисляется по формулам (3)–(4) ( $\sigma = 5$  мм,  $x = \lg(\Delta p/\Delta p_0)$ ). Видно, что при увеличении давления на два порядка коэффициент продуктивности канала уменьшается примерно на 12%. С увеличением перепада давления растёт среднее число Рейнольдса в канале. При этом падает проницаемость, т. е. пропускная способность канала, что приводит к снижению продуктивности. Также видно, что влияние конвективного переноса становится заметным лишь при  $Re \geq 5 \cdot 10^3$ .

## 5.2. Влияние течения в скважине

Анализ влияния течения в скважине на продуктивность работы системы перфорационных каналов проведём для случая ламинарного течения в скважине и каналах без учёта конвективного переноса, так как представленные выше численные эксперименты показали, что эти эффекты менее существенны по сравнению со степенью загрязнения канала, характеризующейся величиной проницаемости.

В качестве модельной рассмотрим задачу в слоистом пласте, состоящем из девяти слоёв различной толщины и проницаемости. Используются данные о пласте из работ [8, 16]. Суммарная мощность пласта равна 30.8 м. В каждом из девяти слоёв находится спиральная перфорационная система с фазовым углом 60 град и плотностью 18 выстрелов на метр вдоль оси скважины. Фазовый угол — это угол между проекциями осей соседних каналов на плоскость, перпендикулярную оси скважины. Длина и радиус каналов равны соответственно 65.7 и 1.1 см. В скважине на подошве пласта задано условие непротекания  $v_h|_{z=0} = 0$ , а на кровле некоторое давление:  $p_h|_{z=H} = p_b$ .

На рис. 11 показана зависимость продуктивности от коэффициента проницаемости канала при различных значениях проницаемости в скважине. Проницаемость скважины  $k_h$  варьировалась от 100 до  $10^9$  Д, последнее значение соответствует течению Пуазейля с проницаемостью  $k_h = d_h^2/32$ . Падение значения  $k_h$  до 100 Д соответствует тому, что в скважине может образоваться малопроницаемая пробка, при этом коэффициент продуктивности системы существенно (до 10 раз) снижается, примерно во столько же раз уменьшается и дебит скважины.

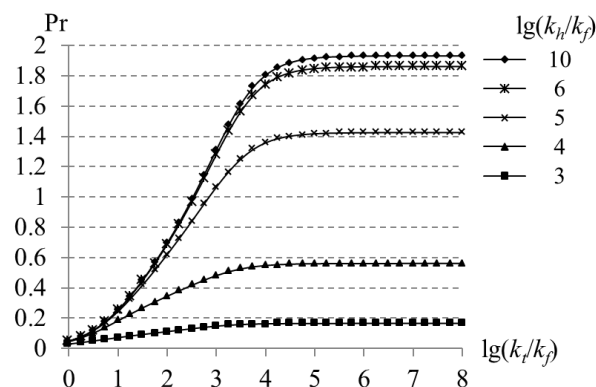


Рис. 11. Зависимость коэффициента продуктивности системы перфорационных каналов от проницаемости канала  $k_t$  и скважины  $k_h$

Таким образом на основе анализа схем сопряжения трёхмерной и одномерной моделей предложен эффективный алгоритм расчёта совместных течений в пласте, перфорационных каналах и скважине, приемлемый для решения промышленных задач по анализу методов нефтедобычи с использованием перфорационных систем. Приведены режимы эксплуатации, при которых конвективный перенос слабо влияет на результаты моделирования. Показано, что чистота каналов и скважины оказывают более сильное влияние на нефтедобычу, чем режим отбора.

## Список литературы

- [1] Булатов А.И., Макаренко П.П., Будников В.Ф., Басарыгин Ю.М. Теория и практика заканчивания скважин. В 5 томах / Под ред. А.И. Булатова. М.: Недра, 1998. Т. 5. 375 с.
- [2] KARAKAS M., TARIQ S.M. Semianalytical productivity models for perforated completions // SPE Product. Eng. 1991. Vol. 6, No. 1. P. 73–82.
- [3] ANSAN J., PROETT M.A., SOLIMAN M.Y. A new 3D finite-element wellbore inflow model for optimizing performance of perforated completions // Intern. Symp. and Exhibition on Formation Damage Control. Lafayette, 2002. P. 1–11.
- [4] SUN D., LI B., GLADKIKH M., SATTI R., EVANS R. Comparison of skin factors for perforated completions calculated with computational fluid dynamics software and a semi-analytical model // SPE Europ. Formation Damage Conf. Noordwijk, 2011. P. 1–15.
- [5] СОХОШКО С.К. Развитие теории фильтрации к пологим и горизонтальным газовым и нефтяным скважинам и её применение для решения прикладных задач: Дисс. ... д-ра техн. наук. Тюмень, ТюмГНГУ, 2008. 212 с.
- [6] Рудяк В.Я., Бочаров О.Б., Кушнир Д.Ю. Эффективный алгоритм расчёта притока флюида в скважину через систему перфорационных каналов // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 2. С. 72–83.
- [7] АНТОНЦЕВ С.Н., ЕПИХОВ Г.П., КАШЕВАРОВ А.А. Системное математическое моделирование процессов водообмена. Новосибирск: Наука, 1986. 216 с.
- [8] КУШНИР Д.Ю., БОЧАРОВ О.Б. Анализ схем перфорации слоистого пласта на основе математического моделирования // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. 2013. № 7. С. 16–21.
- [9] Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 350 с.
- [10] АНДРЕЕВ В.Б., КРЯКВИНА С.А. О функции источника сеточного оператора Лапласа // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 364–373.
- [11] ПОПОВ Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. М.: Машиностроение, 1977. 425 с.
- [12] КУРГАНОВ А.М., ФЁДОРОВ Н.Ф. Справочник по гидравлическим расчётам систем водоснабжения и канализации. Л.: Стройиздат, 1973. 408 с.
- [13] ЛОЙЦЯНСКИЙ Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Л.: Гос. изд. техн-теор. лит., 1950. 678 с.
- [14] САМАРСКИЙ А.А., НИКОЛАЕВ Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

- [15] МАСКЕТ М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 628 с.
- [16] SINOR A., POWERS J., RIPP C. ET AL. Unique field research facility designed to accelerate new technology development and enhance tool reliability // AADE 01-NC-HO-36 presented at the AADE 2001 National Drilling Conference. Houston, TX, 2001. P. 27–29.

*Поступила в редакцию 29 апреля 2014 г.,  
с доработки — 3 июня 2014 г.*