

К расчёту течений односкоростной вязкой теплопроводной смеси узловым методом характеристик

В. С. СУРОВ, И. В. БЕРЕЗАНСКИЙ
Южно-Уральский государственный университет
(*Национальный исследовательский университет*), Челябинск, Россия
e-mail: svsv@csu.ru, mynameivanych@gmail.com

Суров В.С., Березанский И.В. К расчёту течений односкоростной вязкой теплопроводной смеси узловым методом характеристик // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 4. С. 107–116.

Предложен и описан узловый метод характеристик, предназначенный для интегрирования уравнений односкоростной гиперболической модели многокомпонентной среды, в которой учтены вязкие и теплопроводящие свойства смеси.

Ключевые слова: односкоростная многокомпонентная вязкая теплопроводная смесь, гиперболические системы уравнений в частных производных, узловый метод характеристик, численное моделирование.

Surov V.S., Berezansky I.V. The calculation of the flow of single-speed viscous and heat mixture by using the nodular method of characteristics // Computational Technologies. 2014. Vol. 19, No. 4. P. 107–116.

In this work we use single-speed model of viscous and heat heterogeneous media. For describing heat transfer we used Maxwell–Cattaneo law instead of Fourier law. The viscous stresses are described by means of a similar relaxation law. The account of viscosity and thermal conductivity is introduced for the equilibrium state of the whole mixture. Through using the relaxation laws for the source model is still hyperbolic, it allows us to use numerical methods for hyperbolic systems. We use nodular method of characteristics. This method proves to be effective during integration the equations for the single-speed model without considering the heat transfer and the viscosity. In this paper we describe a modification of the classical method of characteristics. We look for the parameters for a new time frame by means an iterative procedure. The calculated results are compared with results of single-speed model when the heat transfer and the viscosity are not considered.

Keywords: single-speed viscous and heat mixture, hyperbolic systems of partial differential equations, nodular method of characteristics, numerical modeling.

Введение

Односкоростные модели многокомпонентных сред используются при моделировании волновых процессов во вспененных жидкостях [1], в полимерах [2], пузырьковых жидкостях [3], для локализации контактных поверхностей в многожидкостной гидроди-

намике [4, 5], при разработке моделей кавитации [6] и в расчётах детонационных явлений [7]. В научной литературе помимо использованной в настоящей работе модели односкоростной смеси [8] представлены и другие гиперболические модели, описывающие течения бинарных смесей [9–13], которые, в отличие от [8], не распространяются на случай с произвольным числом фракций в смеси.

Включение в уравнения смеси сил вязкого трения и теплопроводности увеличивает сферу приложения модели и даёт возможность проводить расчёты течений, например, углеводородных смесей, биологических жидкостей и т. д.

В работе [14] при рассмотрении распространения тепла вместо закона Фурье применялся закон Максвелла — Катганео, учитывающий релаксацию теплового потока и обеспечивающий конечность скоростей перемещения тепловых волн, что в свою очередь связано с принадлежностью системы уравнений к гиперболическому типу.

Вязкие напряжения, как и тепловые эффекты, вводятся в уравнения модели многокомпонентной среды из [8] на уровне смеси в целом. В газовой динамике широко используется упрощённая формула для расчёта вязких напряжений [15], которая для одномерных течений имеет вид

$$\sigma = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

где σ — вязкое напряжение, μ — коэффициент вязкости, u — скорость смеси, x — пространственная переменная. Однако применение этого соотношения приводит к потере гиперболичности исходной системы уравнений. Чтобы остаться в рамках данной системы вместо выражения (1) предлагается использовать соотношение

$$\tau_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + \sigma = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2)$$

где t — время, τ_σ — время релаксации вязких напряжений смеси. Уравнение (2) есть упрощённый вариант реологического выражения для жидкости Максвелла [16]. С этой точки зрения смесь в целом может рассматриваться как вязкоупругая среда, для которой время релаксации находится из соотношения $\tau_\sigma = \mu/E$, где E — модуль упругости смеси.

Узловой метод характеристик рассмотрим на примере бинарной смеси, состоящей из идеального газа с показателем адиабаты γ и несжимаемой фракции с плотностью ρ_s . Для общего случая смеси с произвольным числом компонентов методика расчёта остаётся той же. Представляемый вариант метода характеристик ранее использовался в расчётах течений, описываемых односкоростной моделью гетерогенной среды как в адиабатическом приближении [17], так и с учётом теплопроводности смеси [18]. Для бинарной смеси с объёмной долей идеального газа α система дифференциальных уравнений модели [8], в которой дополнительно учтены вязкие и теплопроводящие свойства смеси, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p - \sigma)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c_a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial W}{\partial x} &= 0, & \tau_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + \sigma &= \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} - (1 - \alpha) \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial W}{\partial t} + u \frac{\partial W}{\partial x} + k_p \frac{\partial p}{\partial x} + k_\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} + k_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{W}{\tau_W} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$c_a = \sqrt{\frac{\gamma(p - \sigma)}{\alpha\rho}}, \quad H = \frac{\gamma - 1}{\alpha}, \quad k_\rho = \frac{\chi}{\tau_W} \frac{\partial T}{\partial \rho}, \quad k_p = \frac{\chi}{\tau_W} \frac{\partial T}{\partial p}, \quad k_\alpha = \frac{\chi}{\tau_W} \frac{\partial T}{\partial \alpha},$$

p — давление, T и W — осреднённые температура и плотность теплового потока, $\rho = \alpha\rho_g + (1 - \alpha)\rho_s$ — плотность смеси, χ — коэффициент теплопроводности смеси, τ_W — время тепловой релаксации смеси, нижние индексы g и s означают газ и несжимаемая фракция.

Вывод последнего уравнения системы (3) имеется в [19].

При рассмотрении пузырьковой жидкости без потери точности можно считать, что температура несжимаемой фракции постоянна: $T_s = \text{const}$, поскольку её доля в смеси значительна. Это предположение снимается при учёте сжимаемости жидкости. Выражение для средней температуры

$$T = \alpha T_g + (1 - \alpha)T_s = \frac{\alpha^2 p}{[\rho - \rho_s(1 - \alpha)]R} + (1 - \alpha)T_0, \quad (4)$$

где T_0 — начальная температура среды, R — газовая постоянная. С использованием (4) коэффициенты k_ρ , k_p и k_α принимают вид

$$k_\rho = -\frac{\alpha^2 \chi p}{\tau_W [\rho - \rho_s(1 - \alpha)]^2 R}, \quad k_p = \frac{\chi \alpha^2}{\tau_W [\rho - \rho_s(1 - \alpha)]R},$$

$$k_\alpha = \frac{\chi}{\tau_W} \left(\frac{\alpha p (2\rho + \alpha\rho_s)}{[\rho - \rho_s(1 - \alpha)]^2 R} - T_0 \right). \quad (5)$$

Вязкость и коэффициент теплопроводности смеси рассчитывались из выражений

$$\mu = \frac{1}{\rho} [\alpha\rho_g\mu_g + (1 - \alpha)\rho_s\mu_s], \quad \chi = \frac{1}{\rho} [\alpha\rho_g\chi_g + (1 - \alpha)\rho_s\chi_s].$$

Аналогично вычисляются коэффициенты релаксации смеси.

Характеристическое соотношение системы (3) определяется из уравнения

$$\begin{vmatrix} \xi - u & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi - u & -1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & -\rho c_a^2 & \xi - u & 0 & 0 & -H \\ 0 & \mu/\tau_\sigma & 0 & \xi - u & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & 0 & 0 & \xi - u & 0 \\ -k_\rho & 0 & -k_p & 0 & -k_\alpha & \xi - u \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

или (раскрывая определитель) —

$$(\xi - u)^2 \left\{ (\xi - u)^4 - (c_a^2 + Hk_p + \omega^2)(u - \xi)^2 + H \left[\omega^2 k_p - k_p + \frac{(1 - \alpha)}{\rho} k_\alpha \right] \right\} = 0, \quad (7)$$

корни которого u , u , $u \pm c_1$, $u \pm c_2$, где

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ c_a^2 + \omega^2 + Hk_p + \sqrt{(c_a^2 + \omega^2)^2 + H \left[Hk_p + 2(c_a^2 + \omega^2) \right] k_p + 4(k_p - \omega^2 k_p - \frac{1 - \alpha}{\rho} k_\alpha)} \right\}},$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ c_a^2 + \omega^2 + Hk_p - \sqrt{(c_a^2 + \omega^2)^2 + H \left[Hk_p + 2(c_a^2 + \omega^2) \right] k_p + 4(k_p - \omega^2 k_p - \frac{1-\alpha}{\rho} k_\alpha)} \right\}}.$$

$$\text{Здесь } \xi = \frac{dx}{dt}, \quad \omega^2 = \frac{\mu}{\tau_\sigma \rho}.$$

Характеристические соотношения вдоль направлений $dx/dt = u \pm c_1$, $dx/dt = u \pm c_2$ системы (3) могут быть получены из уравнения (6), в котором вместо последнего столбца в определителе должен быть использован вектор-столбец

$$\begin{pmatrix} -u \frac{d\rho}{dt} - \rho \frac{du}{dt} \\ -u \frac{du}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{dt} \\ -u \frac{dp}{dt} - \rho c_a^2 \frac{du}{dt} - H \frac{dW}{dt} \\ -\xi \frac{\sigma}{\tau_\sigma} - u \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\mu}{\tau_\sigma} \frac{du}{dt} \\ -u \frac{d\alpha}{dt} + (1-\alpha) \frac{du}{dt} \\ -\xi \frac{W}{\tau_W} - u \frac{dW}{dt} - k_p \frac{dp}{dt} - k_\rho \frac{d\rho}{dt} - k_\alpha \frac{d\alpha}{dt} \end{pmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель, имеем соотношение

$$A_\rho d\rho + A_u du + A_p dp + A_\sigma d\sigma + A_\alpha d\alpha + A_W dW + A_t dt = 0, \quad (8)$$

где

$$A_\rho = -\tau_W \tau_\sigma \rho \xi (u - \xi)^2 [(u - \xi)^2 - (c_a^2 + \omega^2)] k_\rho,$$

$$A_u = \tau_W \tau_\sigma \rho^2 \xi (u - \xi)^3 \left[k_\rho + c_a^2 k_p - \frac{(1-\alpha)}{\rho} k_\alpha \right],$$

$$A_p = -\tau_W \tau_\sigma \rho \xi (u - \xi)^2 \left(k_\rho + [(u - \xi)^2 - \omega^2] k_p - \frac{(1-\alpha)}{\rho} k_\alpha \right),$$

$$A_\sigma = \tau_\sigma \tau_W \rho \xi (u - \xi)^2 \left[k_\rho + c_a^2 k_p - \frac{(1-\alpha)}{\rho} k_\alpha \right],$$

$$A_\alpha = -\tau_W \tau_\sigma \rho \xi (u - \xi)^2 [(u - \xi)^2 - (c_a^2 + \omega^2)] k_\alpha,$$

$$A_W = \tau_W \tau_\sigma \rho (u - \xi)^2 \left\{ u(u - \xi) [(u - \xi)^2 - (c_a^2 + \omega^2)] - \right. \\ \left. - H \left[k_\rho + ((u - \xi)^2 - \omega^2) k_p - \frac{(1-\alpha)}{\rho} k_\alpha \right] \right\},$$

$$A_t = \rho \xi (u - \xi)^2 \left\{ \tau_\sigma (u - \xi) W [(u - \xi)^2 - (c_a^2 + \omega^2)] + \tau_W \sigma \left[k_\rho + c_a^2 k_p - \frac{(1-\alpha)}{\rho} k_\alpha \right] \right\}.$$

Вдоль траекторной характеристики $dx/dt = u$ справедливы равенства

$$(1-\alpha) d\rho + \rho d\alpha = 0, \quad \mu d\rho + \tau_\sigma \rho d\sigma + \rho \sigma dt = 0, \quad (9)$$

которые следуют из первого, четвёртого и пятого уравнений системы (3).

1. Узловой метод характеристик для гетерогенной среды

Для описания узлового метода характеристик достаточно рассмотреть способ определения значений искомых величин в k -м узле (x_k, t_{n+1}) по известным данным в узлах на n -м временном слое. Решение поставленной задачи получим с использованием следующей итерационной процедуры. На “нулевой” итерации ($\nu = 0$) полагаем, что значения искомых переменных в точке (x_k, t_{n+1}) совпадают с данными в точке (x_k, t_n) , поэтому характеристические направления $dx/dt = u$, $dx/dt = u \pm c_1$ и $dx/dt = u \pm c_2$ аппроксимируются выражениями:

$$x_k - x_C^\nu = u^\nu \Delta t, \quad x_k - x_{L_1}^\nu = (u^\nu + c_1^\nu) \Delta t, \quad x_k - x_{L_2}^\nu = (u^\nu + c_2^\nu) \Delta t,$$

$$x_k - x_{R_1}^\nu = (u^\nu - c_1^\nu) \Delta t, \quad x_k - x_{R_2}^\nu = (u^\nu - c_2^\nu) \Delta t,$$

где $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, ν — номер итерации. Из последних равенств определяем положения точек пересечения характеристик с прямой $t = t_n$ (рис. 1):

$$x_{L_1}^\nu = x_k - (u^\nu + c_1^\nu) \Delta t, \quad x_{L_2}^\nu = x_k - (u^\nu + c_2^\nu) \Delta t,$$

$$x_C^\nu = x_k - u^\nu \Delta t, \quad x_{R_1}^\nu = x_k - (u^\nu - c_1^\nu) \Delta t, \quad x_{R_2}^\nu = x_k - (u^\nu - c_2^\nu) \Delta t. \quad (10)$$

Параметры $(\rho, u, p, \sigma, \alpha, W)^{(0)}$ в найденных точках $(x_{L_1}, x_{L_2}, x_C, x_{R_1}, x_{R_2})^{(0)}$ находятся интерполяцией по их известным значениям в узлах x_{k-1} , x_k и x_{k+1} . Соотношения (8)–(9) перепишем в конечноразностном виде как

$$A_{\rho L_1}^\nu \rho^{\nu+1} + A_{u L_1}^\nu u^{\nu+1} + A_{p L_1}^\nu p^{\nu+1} + A_{\sigma L_1}^\nu \sigma^{\nu+1} + A_{\alpha L_1}^\nu \alpha^{\nu+1} + A_{W L_1}^\nu W^{\nu+1} = X_{L_1}^\nu,$$

$$A_{\rho L_2}^\nu \rho^{\nu+1} + A_{u L_2}^\nu u^{\nu+1} + A_{p L_2}^\nu p^{\nu+1} + A_{\sigma L_2}^\nu \sigma^{\nu+1} + A_{\alpha L_2}^\nu \alpha^{\nu+1} + A_{W L_2}^\nu W^{\nu+1} = X_{L_2}^\nu,$$

$$A_{\rho C}^\nu \rho^{\nu+1} + A_{u C}^\nu u^{\nu+1} + A_{p C}^\nu p^{\nu+1} + A_{\sigma C}^\nu \sigma^{\nu+1} + A_{\alpha C}^\nu \alpha^{\nu+1} + A_{W C}^\nu W^{\nu+1} = X_C^\nu,$$

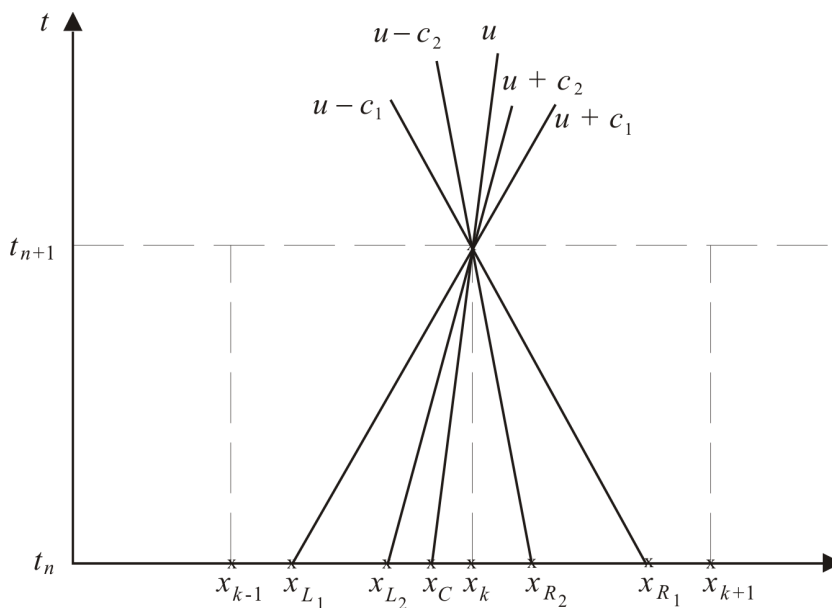


Рис. 1. Расчётная схема УМХ для регулярных узлов

$$\begin{aligned}
B_{\rho C}^\nu \rho^{\nu+1} + B_{uC}^\nu u^{\nu+1} + B_{pC}^\nu p^{\nu+1} + B_{\sigma C}^\nu \sigma^{\nu+1} + B_{\alpha C}^\nu \alpha^{\nu+1} + B_{WC}^\nu W^{\nu+1} &= Y_C^\nu, \\
A_{\rho R_1}^\nu \rho^{\nu+1} + A_{uR_1}^\nu u^{\nu+1} + A_{pR_1}^\nu p^{\nu+1} + A_{\sigma R_1}^\nu \sigma^{\nu+1} + A_{\alpha R_1}^\nu \alpha^{\nu+1} + A_{WR_1}^\nu W^{\nu+1} &= X_{R_1}^\nu, \\
A_{\rho R_2}^\nu \rho^{\nu+1} + A_{uR_2}^\nu u^{\nu+1} + A_{pR_2}^\nu p^{\nu+1} + A_{\sigma R_2}^\nu \sigma^{\nu+1} + A_{\alpha R_2}^\nu \alpha^{\nu+1} + A_{WR_2}^\nu W^{\nu+1} &= X_{R_2}^\nu, \quad (11)
\end{aligned}$$

где коэффициенты, например, для характеристического направления $dx/dt = u + c_1$ имеют вид

$$\begin{aligned}
A_{\rho L_1}^\nu &= -\tau_W \tau_\sigma \rho c_1^2 (u + c_1) [c_1^2 - (c_a^2 + \omega^2)] k_\rho|_{L_1}^\nu, \\
A_{uL_1}^\nu &= -\tau_W \tau_\sigma \rho^2 c_1^3 (u + c_1) \left[k_\rho + c_a^2 k_p - \frac{(1-\alpha)}{\rho} k_\alpha \right] \Big|_{L_1}^\nu, \\
A_{pL_1}^\nu &= -\tau_W \tau_\sigma \rho c_1^2 (u + c_1) \left(k_\rho + (c_1^2 - \omega^2) k_p - \frac{(1-\alpha)}{\rho} k_\alpha \right) \Big|_{L_1}^\nu, \\
A_{\sigma L_1}^\nu &= \tau_\sigma \tau_W \rho c_1^2 (u + c_1) \left[k_\rho + c_a^2 k_p - \frac{(1-\alpha)}{\rho} k_\alpha \right] \Big|_{L_1}^\nu, \\
A_{\alpha L_1}^\nu &= -\tau_W \tau_\sigma \rho c_1^2 (u + c_1) [c_1^2 - (c_a^2 + \omega^2)] k_\alpha|_{L_1}^\nu, \\
A_{WL_1}^\nu &= -\tau_W \tau_\sigma \rho c_1^2 \left\{ u c_1 [c_1^2 - (c_a^2 + \omega^2)] - H \left[k_\rho + (c_1^2 - \omega^2) k_p - \frac{(1-\alpha)}{\rho} k_\alpha \right] \right\} \Big|_{L_1}^\nu, \\
(A_t)_{L_1}^\nu &= \rho c_1^2 (u + c_1) \left\{ \tau_\sigma c_1 W (c_a^2 + \omega^2 - c_1^2) + \tau_W \sigma \left[k_\rho + c_a^2 k_p - \frac{(1-\alpha)}{\rho} k_\alpha \right] \right\} \Big|_{L_1}^\nu.
\end{aligned}$$

Аналогичные формулы выписываются и для других характеристических направлений.

Решая систему (11) (при $\nu = 0$) относительно переменных $(\rho, u, p, \sigma, \alpha, W)^{(1)}$, найдем уточнённые значения искомым функций в точке (x_k, t_{n+1}) . Затем по этим данным из выражений (10) вычисляются новые координаты $(x_{L_1}, x_{L_2}, x_C, x_{R_1}, x_{R_2})^{(1)}$, которые в свою очередь используются для определения $(\rho, u, p, \sigma, \alpha, W)^{(2)}$ из (11), где необходимо принять $\nu = 1$. Описанный итерационный процесс продолжается вплоть до сходимости.

Расчёты по адиабатическому варианту модели смеси проводились с использованием численного метода Куранта — Изакона — Риса (Courant—Isacson—Rees) [20]:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{U}_i^{k+1} - \mathbf{U}_i^k}{\Delta t} + (\Omega^{-1} \Lambda^- \Omega)_{i+1/2}^k \frac{\mathbf{U}_{i+1}^k - \mathbf{U}_i^k}{\Delta x} + (\Omega^{-1} \Lambda^+ \Omega)_{i-1/2}^k \frac{\mathbf{U}_i^k - \mathbf{U}_{i-1}^k}{\Delta x} &= 0, \\
\mathbf{U}_{m+1/2}^n &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_m^n - \mathbf{U}_{m+1}^n) + \frac{1}{2} \{ \Omega^{-1} [\text{sign}(\Lambda)] \Omega \}_m^n (\mathbf{U}_m^n - \mathbf{U}_{m+1}^n), \quad m = i, i-1.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 1/\rho & 0 \\ 0 & \rho c_a^2 & u & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad \Lambda^\pm = \frac{1}{2} (\Lambda \pm |\Lambda|),$$

Λ — диагональная матрица собственных значений матрицы \mathbf{A} , Ω — матрица, строками которой являются левые собственные векторы матрицы \mathbf{A} .

2. Результаты численного моделирования

С использованием описанных выше методов рассчитаны две задачи о распаде произвольного разрыва в пузырьковой жидкости. В первом случае параметры смеси до распада были следующими: слева от диафрагмы ($x < 0$) — $p_{0L} = 0.15$ МПа, $u_{0L} = 0$, $\alpha_{0L} = 0.12$, $\rho_{g0L} = 1.19$ кг/м³; справа от диафрагмы ($x > 0$) — $p_{0R} = 0.1$ МПа, $u_{0R} = 0$, $\alpha_{0R} = 0.12$, $\rho_{g0R} = 1.19$ кг/м³. Плотность жидкой фракции $\rho_s = 1000$ кг/м³,

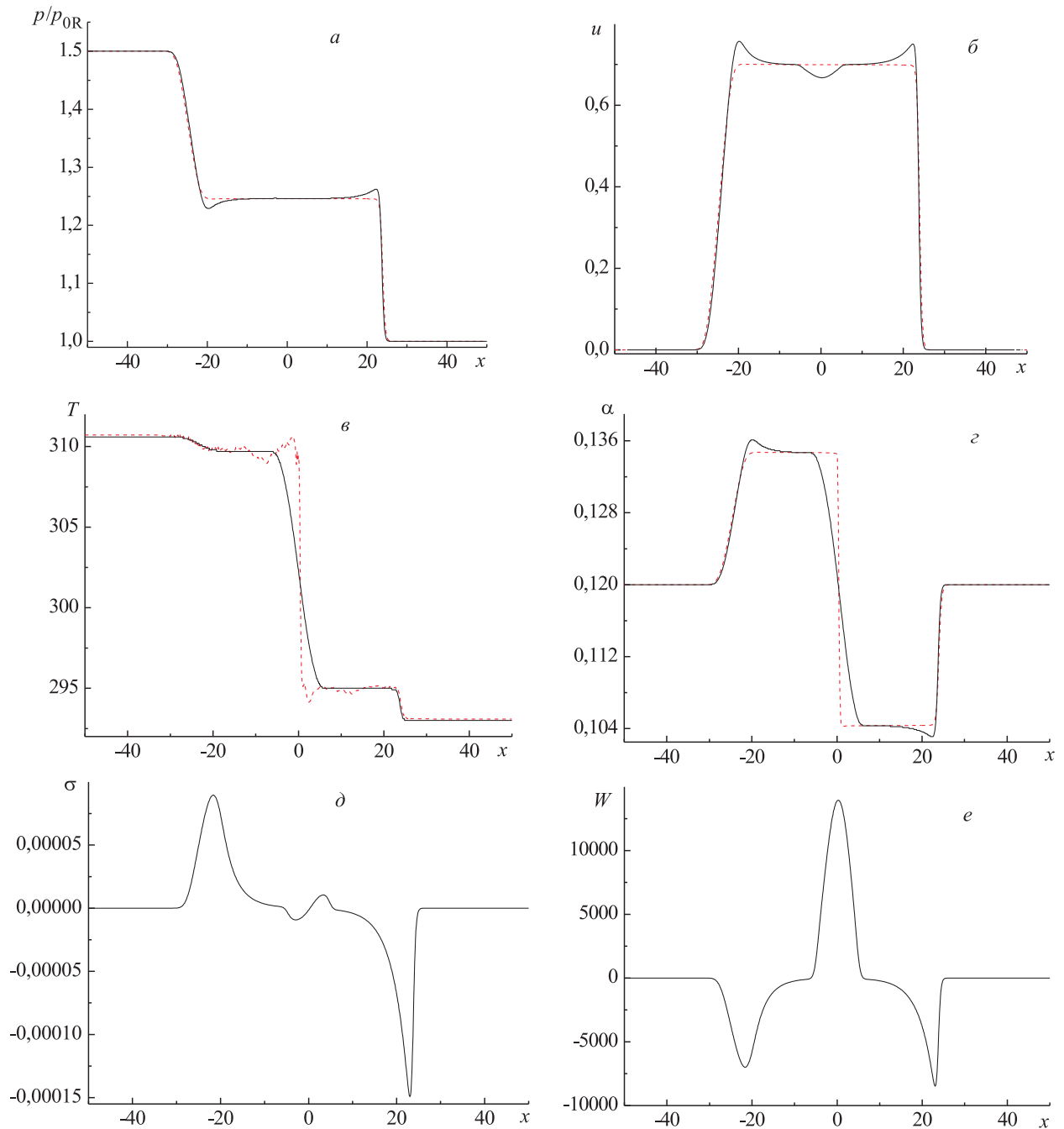


Рис. 2. Зависимости $p/p_{0R}(x)$, $u(x)$, $T(x)$, $\alpha(x)$, $\sigma(x)$, $W(x)$ для пузырьковой жидкости к моменту времени $t = 0.6$ с, полученные при учёте неравновесных процессов (сплошные линии) и в адиабатическом приближении (штриховые линии)

вязкость $\mu_s = 10^{-3}$ кг/(м·с), коэффициент теплопроводности $\chi_s = 60.2 \cdot 10^{-2}$ кг·м/(с³·К), времена релаксации $\tau_{\sigma s} = \tau_{W s} = 10^{-1}$ с. Показатель адиабаты газа $\gamma = 1.4$, его вязкость $\mu_g = 1.81 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), коэффициент теплопроводности $\chi_g = 2.58 \cdot 10^{-2}$ кг·м/(с³·К), времена релаксации $\tau_{\sigma g} = \tau_{W g} = 10^{-1}$ с. В момент времени $t = 0$ диафрагма мгновенно удаляется, при этом реализуется режим течения с ударной волной, движущейся вправо, и волной разрежения, перемещающейся со скоростью $c_1 = 35.5$ м/с влево. Скорость

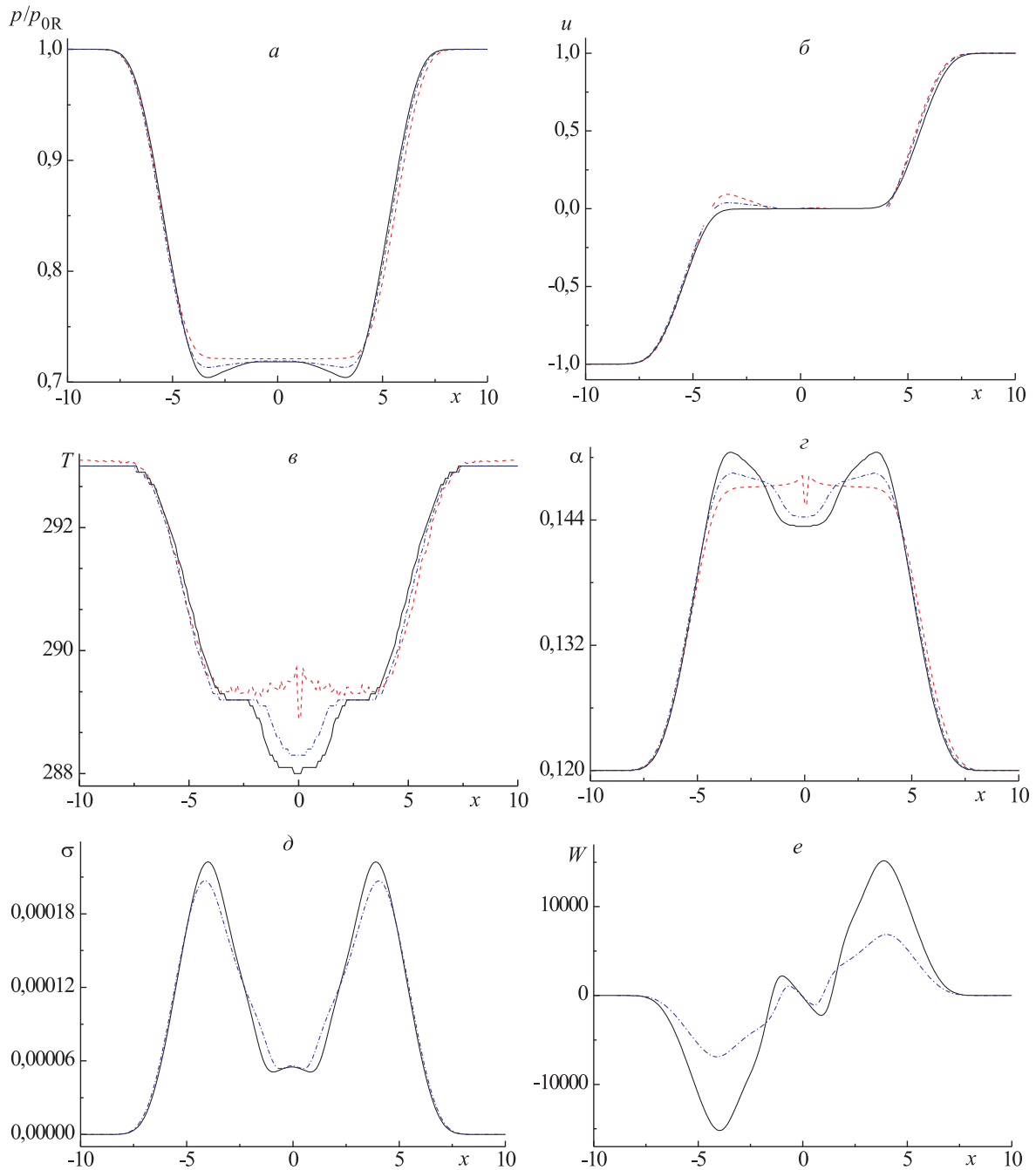


Рис. 3. Зависимости $p/p_{OR}(x)$, $u(x)$, $T(x)$, $\alpha(x)$, $\sigma(x)$, $W(x)$ к моменту времени $t = 0.19$ с, полученные при учёте неравновесных процессов (сплошные и штрихпунктирные линии — соответственно для $\chi_s = 60.2 \cdot 10^{-2}$ и $30.1 \cdot 10^{-2}$ кг·м/(с³·К)) и в адиабатическом приближении (штриховые линии)

тепловых волн у контактной границы $c_2 = 8.1$ м/с. Нижние индексы означают: 0 — в невозмущённой среде, L и R — для параметров смеси соответственно слева и справа от контактного разрыва.

На рис. 2 представлены результаты расчётов, полученные методом узлового метода характеристик к моменту времени $t = 0.5$ с на сетке из 200 узловых точек, которые сопоставлены с решением рассматриваемой задачи Римана в адиабатическом приближении, рассчитанным на той же сетке, но с использованием конечно-разностной схемы Куранта — Изаксона — Риса. Как видно из рис. 2, d , влияние сил вязкого трения на общую картину течения незначительно. Большее значение оказывают тепловые эффекты.

Во второй задаче — о симметричном разлёте двух одинаковых масс пузырьковой жидкости, значения переменных были следующими: $u_{0L} = -1$ м/с, $u_{0R} = 1$ м/с, $p_{0L} = p_{0R} = 0.1$ МПа, $\alpha_{0L} = \alpha_{0R} = 0.12$. Параметры составляющих смесь фракций оставались те же, что и в предыдущей задаче. В этом случае формируются две волны разрежения. На рис. 3 для момента времени $t = 0.19$ с приведены результаты расчётов, выполненные с помощью узлового метода характеристик на сетке из 200 узловых точек. Штрихпунктирной кривой отмечены зависимости, полученные для варианта с уменьшенным в два раза коэффициентом теплопроводности жидкости при неизменных значениях других параметров компонентов смеси. Здесь же представлены результаты расчётов, полученные в рамках адиабатического приближения на той же сетке, но с использованием схемы Куранта — Изаксона — Риса.

Как видно из данных рис. 2 и 3, количественные характеристики течения смеси при распаде разрыва существенно зависят от интенсивности теплообменных процессов.

Таким образом, в работе предложен узловой метод характеристик, относящийся к бессеточному типу, предназначенный для интегрирования одномерных уравнений односкоростной многокомпонентной вязкой теплопроводной смеси со “сквозным” расчётом ударных скачков. Показано, что в рассмотренных задачах теплообменные процессы играют существенно большую роль, чем силы вязкого трения.

Список литературы

- [1] СУРОВ В.С. Об отражении воздушной ударной волны от слоя пены // Теплофизика высоких температур. 2000. Т. 38, № 1. С. 101–110.
- [2] СУРОВ В.С. Расчёт взаимодействия воздушной ударной волны с пористым материалом // Вестник Челябинского гос. ун-та. 1997. № 1. С. 124–134.
- [3] СУРОВ В.С. Анализ волновых явлений в газо-жидкостных средах // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36, № 4. С. 624–630.
- [4] СУРОВ В.С. О локализации контактных поверхностей в многожидкостной гидродинамике // Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83, № 3. С. 518–527.
- [5] СУРОВ В.С. Узловой метод характеристик в многожидкостной гидродинамике // Там же. 2013. Т. 86, № 5. С. 1080–1086.
- [6] GONCALVES E. Numerical study of expansion tube problems: Toward the simulation of cavitation // Comput. & Fluids. 2013. Vol. 72. P. 1–19.
- [7] SCHOCH S., NIKIFORAKIS N., LEE B.J., SAUREL R. Multi-phase simulation of ammonium nitrate emulsion detonations // Combustion and Flame. 2013. Vol. 160. P. 1883–1899.

- [8] СУРОВ В.С. Течение Буземана для односкоростной модели гетерогенной среды // Инженерно-физический журнал. 2007. Т. 80, № 4. С. 45–51.
- [9] WACKERS J., KOREN B. A fully conservative model for compressible two-fluid flow // J. Numer. Meth. Fluids. 2005. Vol. 47. P. 1337–1343.
- [10] MURRONE A., GUILLARD H. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems // J. Comput. Phys. 2005. T. 202. P. 664–698.
- [11] DELEDICQUE V., PAPALEXANDRIS M.V. A conservative approximation to compressible two-phase flow models in the stiff mechanical relaxation limit // Ibid. 2008. Vol. 227. P. 9241–9270.
- [12] SAUREL R., PETITPAS F. AND BERRY R.A. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures // Ibid. 2009. Vol. 228. P. 1678–1712.
- [13] KREEFT J.J., KOREN B. A new formulation of Kapila’s five-equation model for compressible two-fluid flow, and its numerical treatment // Ibid. 2010. Vol. 229. P. 6220–6242.
- [14] CATTANEO C. Sur une forme de l’equation de la chaleur elinant le paradoxe d’une propagation instantanee // CR. Acad. Sci. 1958. Vol. 247. P. 431–432.
- [15] САМАРСКИЙ А.А., ПОПОВ Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
- [16] ЛОДЖ А.С. Эластичные жидкости. М.: Наука, 1969.
- [17] СУРОВ В.С. Об одном варианте метода характеристик для расчёта течений односкоростной многокомпонентной смеси // Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83, № 2. С. 345–350.
- [18] СУРОВ В.С., СТЕПАНЕНКО Е.Н. Сеточный метод характеристик для расчёта течений односкоростной многокомпонентной теплопроводной среды // Вестник Челябинского гос. ун-та. 2010. № 24 (205). С. 15–22.
- [19] СУРОВ В.С. Односкоростная модель многокомпонентной теплопроводной среды // Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83, № 1. С. 132–141.
- [20] КУЛИКОВСКИЙ А.Г., ПОГОРЕЛОВ Н.В., СЕМЁНОВ А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Изд. 2-е, дополн. и исправл. М.: Физматлит, 2012. 656 с.

*Поступила в редакцию 12 сентября 2013 г.,
с доработки — 24 февраля 2014 г.*