Вычислительные технологии **Том 4, № 4, 1999**

ПОСТРОЕНИЕ ВЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫМ ИНТЕРВАЛЬНО ЗАДАННЫМ ОБЪЕКТОМ

Р. С. Ивлев, С. П. Соколова
Институт проблем информатики и управления МН-АН РК
Алматы, Казахстан
e-mail: lns@ipic.academ.alma-ata.su

This paper deals with the modal controller synthesis for a linear intervally specified multi-variable time-invariant control object with full state information. At present, a lot of papers are devoted to this problem, but most of them use the idea of reducing multi-variable system to its equivalent with scalar input. Such a problem statement is trivial. The method we present for the modal controller synthesis relies on the use of Sylvester matrix equation. An algebraic approach is used for finding the inner interval estimates of a generalized solution set of Sylvester interval matrix equation.

Ниже мы будем придерживаться следующих обозначений:

$a, b, \ldots, A, B, \ldots$ — векторы и матрицы с действительными значениями;

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$ — интервалы и векторы с интервальными элементами;

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$ — матрицы с интервальными элементами;

$\underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}$ — нижняя и верхняя границы интервала $\mathbf{a}$ соответственно.

Пусть математическая модель линейного многомерного интервально заданного объекта управления в пространстве состояний имеет вид

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \quad x(t_0) = x_0, \ t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояний; $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ — интервальная матрица размерности $n \times n$, $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$, $\mathbf{a}_{ij} = [\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij}]$, $1 \le i, j \le n$; $\mathbb{IR}$ — множество всех вещественных интервалов, $\mathbb{IR} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{\mathbf{x}} \le x \le \overline{\mathbf{x}},\ \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}\}$; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управляющих воздействий; $\mathbf{B} \in \mathbb{IR}^{n\times m}$ — интервальная матрица размерности $n \times m$, $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij})$, $\mathbf{b}_{ij} = [\underline{\mathbf{b}}_{ij}, \overline{\mathbf{b}}_{ij}]$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

Запись математической модели в виде (1) требует специального разъяснения. В дальнейшем будем понимать интервально заданную модель объекта управления (1) как семейство математических моделей стационарных объектов вида $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, матрицы которых принадлежат заданным интервальным, т. е. $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$, что в математической нотации можно записать как

$$\{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists B \in \mathbf{B})(\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t))\}. \tag{2}$$

Таким образом, термин “свойства интервально заданного объекта управления” подразумевает свойства всех объектов управления $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ для $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$. Пусть объект управления (1) является полностью управляемым.

Желаемая динамика замкнутой системы управления (такие показатели как время регулирования, колебательность, запас устойчивости) [4] задается соотношением

$$\dot{x}(t) = \mathbf{F}x(t), \tag{3}$$

где $\mathbf{F} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ — интервальная матрица размерности $n \times n$, $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_{ij})$, $\mathbf{f}_{ij} = [\underline{\mathbf{f}}_{ij}, \overline{\mathbf{f}}_{ij}]$, $1 \le i, j \le n$, обладающая тем свойством, что все собственные значения ее точечных матриц локализованы в некоторой наперед заданной области плоскости комплексного переменного.

Для обеспечения желаемой динамики в замкнутой системе управления нами используется алгоритм

$$u(t) = \mathbf{K}x(t), \tag{4}$$

где $\mathbf{K} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ — интервальная матрица размерности $m \times n$, $\mathbf{K} = (\mathbf{k}_{ij})$, $\mathbf{k}_{ij} = [\underline{\mathbf{k}}_{ij}, \overline{\mathbf{k}}_{ij}]$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Запись алгоритма управления в виде (4) следует понимать как параметрическое семейство алгоритмов вида

$$\{u(t) \mid u(t) = Kx(t), K \in \mathbf{K}\}. \tag{5}$$

Решение задачи параметрического синтеза осуществляется в следующей постановке. Для заданного объекта управления (1) требуется определить интервальную матрицу $\mathbf{K}$ настраиваемых параметров алгоритма (4) таким образом, чтобы точечные матрицы $K \in \mathbf{K}$ удовлетворяли условию: для любых точечных матриц $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$, присутствующих в (1), существует некоторая матрица $F \in \mathbf{F}$ такая, что

$$\det(\lambda I - A - BK) = \det(\lambda I - F), \tag{6}$$

где I — единичная матрица соответствующей размерности.

Построение семейства алгоритмов (5) является целесообразным несмотря на то, что физическим воплощением алгоритма будет как раз один из представителей семейства (5). Дело в том, что точечные матрицы $K \in \mathbf{K}$ являются как бы равноправными в смысле поставленной задачи (6), однако на этапе технической реализации алгоритма управления некоторые матрицы $K \in \mathbf{K}$ могут оказаться предпочтительнее других исходя из условий физической реализации алгоритма.

Формальное определение множества точечных матриц алгоритма (4), удовлетворяющих (6), имеет следующий вид:

$$M = \{K \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall B \in \mathbf{B})(\exists F \in \mathbf{F})(\det(\lambda I - A - BK) = \det(\lambda I - F))\}. \tag{7}$$

Тогда рассматриваемая задача получения интервальной матрицы $\mathbf{K}$ алгоритма управления (4) является, по существу, задачей внутреннего интервального оценивания множества (7).

Пусть $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — постоянная точечная матрица, образующая полностью наблюдаемую пару с интервальной матрицей $\mathbf{F}$ в том смысле, что пара точечных матриц (F, H) является полностью наблюдаемой для любой матрицы $F \in \mathbf{F}$. Как известно [1], аналогичная задача определения матрицы K для точечного объекта управления сводится к разрешимости матричного уравнения Сильвестера относительно неособенной матрицы $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$TF - AT = BH, \quad \det T \ne 0, \tag{8}$$

при этом матрица K определяется из соотношения

$$K = HT^{-1}. \tag{9}$$

В случае наличия интервальной неопределенности возникает задача определения множества матриц T таких, что для любых значений матриц A и B можно указать такую матрицу $F \in \mathbf{F}$, что будет справедливым уравнение Сильвестера (8), формально записываемое как

$$T\mathbf{F} - \mathbf{A}T = \mathbf{B}H, \tag{10}$$

а указанное множество матриц T примет вид

$$\Sigma_{\forall\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}) = \{T \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall B \in \mathbf{B})(\exists F \in \mathbf{F})(TF - AT = BH)\}. \tag{11}$$

С учетом введенного нами множества (11) множество точечных матриц (7) имеет следующую оценку:

$$M \supseteq \{K = HT^{-1} \mid T \in \Sigma_{\forall\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F})\}. \tag{12}$$

В рассматриваемом случае все элементы интервальных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ принадлежат $\forall$-типу неопределенности [6], а элементы интервальной матрицы $\mathbf{F}$ принадлежат $\exists$-типу неопределенности [6], поэтому в данном случае $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\forall}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\forall}$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\exists}$, $\mathbf{A}^{\exists} = \mathbf{F}^{\forall} = 0_{n\times n}$, $\mathbf{B}^{\exists} = 0_{n\times m}$, где $\mathbf{A}^{\forall}, \mathbf{B}^{\forall}, \mathbf{F}^{\forall}, \mathbf{A}^{\exists}, \mathbf{B}^{\exists}, \mathbf{F}^{\exists}$ — интервальные матрицы, элементами которых являются интервалы, принадлежащие $\forall$- и $\exists$-типу неопределенности интервальных матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ и $\mathbf{F}$ соответственно, поэтому интервальные матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ и $\mathbf{F}$ не образуют дизъюнктного разложения, аналогичного [6]. Множество (11) согласно принятой классификации множеств решений интервальных систем уравнений [6] является обобщенным множеством решений интервального матричного уравнения Сильвестера (10).

Ниже приведено описание обобщенного множества решений интервального матричного уравнения Сильвестера (10) на основании методики, предложенной в [6]. Справедливой является следующая теорема.

Теорема 1. *Диагональная матрица $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ принадлежит множеству решений (11) интервального матричного уравнения Сильвестера (10) тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{A}T + \mathbf{B}H \subseteq T\mathbf{F}. \tag{13}$$

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующее замечание.

Замечание: Требование диагональности матрицы $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ не является случайным, поскольку для произвольной матрицы T из матричного соотношения $TF \in T\mathbf{F}$ еще не следует принадлежность $F \in \mathbf{F}$, однако для случая диагональной матрицы T указанные матричные соотношения являются эквивалентными.

Доказательство. Введем в рассмотрение множество

$$\Sigma^{\mathrm{diag}}_{\forall\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}) =$$

$$= \{T = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall B \in \mathbf{B})(\exists F \in \mathbf{F})(TF - AT = BH)\}. \tag{14}$$

Очевидно, здесь имеет место соотношение

$$\Sigma^{\mathrm{diag}}_{\forall\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}) \subseteq \Sigma_{\forall\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}).$$

Выполняя равносильные преобразования с выделяющим предикатом множества (14), получим следующую цепочку равенств:

$$\Sigma^{\text{diag}}_{\forall\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}) =$$
$$= \{T = \text{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall B \in \mathbf{B})(\exists F \in \mathbf{F})(TF - AT = BH)\} =$$
$$= \{T = \text{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall B \in \mathbf{B})(\exists F \in \mathbf{F})(AT + BH = TF)\} =$$
$$= \{T = \text{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall B \in \mathbf{B})(AT + BH \in T\mathbf{F})\} =$$
$$= \{T = \text{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid (\mathbf{A}T + \mathbf{B}H \subseteq T\mathbf{F})\}.$$

Теорема доказана.

Как известно, точное математическое описание обобщенного множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений растет экспоненциально с ростом размерности системы, в связи с чем такое описание становится практически неприемлемым при относительно небольших размерностях интервального матричного уравнения Сильвестера (10). Поэтому на этапе физической реализации алгоритма (4) целесообразным оказывается использование некоторых просто устроенных подмножеств рассматриваемого множества, поскольку элементы любого подмножества множества (14) удовлетворяют выделяющему предикату в (14). В частности, удобной на практике является внутренняя интервальная оценка множества (14).

Для решения задачи внутреннего интервального оценивания обобщенного множества решений (14) воспользуемся алгебраическим подходом [5, 6, 11], успешно применяемым в решении задач как внутреннего, так и внешнего интервального оценивания различных множеств решений интервальных систем уравнений. Получение внутренней интервальной оценки множества (11) посредством применения алгебраического подхода подразумевает замену задачи описания данного множества на задачу нахождения алгебраического решения некоторой специальной системы уравнений в расширенной интервальной арифметике Каухера $\mathbb{IR}$ [6, 11]. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если правильная интервальная матрица* $\mathbf{T}$ *содержит правильную диагональную интервальную матрицу* $\mathbf{T}^{\text{diag}} = \text{diag}\,(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n)$, $\mathbf{T}^{\text{diag}} \subseteq \mathbf{T}$, *т. е.* $0 \in \mathbf{t}_{ij}$ *для* $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ *и представляет собой алгебраическое решение интервального матричного уравнения*

$$\mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot \text{opp}\,\mathbf{F} = \text{opp}\,\mathbf{B}H, \tag{15}$$

то $\mathbf{T}^{\text{diag}} \subseteq \Sigma^{\text{diag}}_{\forall\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F})$, *где* $\text{opp}\,\mathbf{x} = \text{opp}\,[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] = [-\underline{\mathbf{x}}, -\overline{\mathbf{x}}]$ *— операция взятия противоположного интервального числа.*

Доказательство. Пусть правильная интервальная матрица $\mathbf{T}$ является алгебраическим решением уравнения (15) и $\mathbf{T}^{\text{diag}} \subseteq \mathbf{T}$. Тогда для $T_1 \in \mathbf{T}^{\text{diag}}$ в силу монотонности интервальных арифметических операций по включению можно записать

$$\mathbf{A}T_1 + T_1\cdot \text{opp}\,\mathbf{F} \subseteq \mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot \text{opp}\,\mathbf{F} = \text{opp}\,\mathbf{B}H.$$

Из последнего соотношения имеем

$$\mathbf{A}T_1 + \mathbf{B}H \subseteq T_1\mathbf{F};$$

значит $T_1 \subseteq \Sigma^{\text{diag}}_{\forall\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F})$ по теореме 1.

Таким образом, теорема 2 позволяет получить внутреннюю интервальную оценку обобщенного множества решений (11) интервального матричного уравнения Сильвестера (10), т. е. некоторую интервальную матрицу $\mathbf{T}^{\text{diag}} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$. Предложенное в работе описание подмножества диагональных матриц обобщенного множества решений интервального матричного уравнения Сильвестера, а также внутреннее интервальное оценивание данного подмножества посредством применения алгебраического подхода не являются единственно возможными. В качестве альтернативного пути для решения вышеуказанных задач описания подмножества диагональных матриц обобщенного подмножества решений и внутреннего интервального оценивания данного подмножества может быть с успехом применен результат, предложенный в работе [7], который сформулирован для более общего случая интервальных нелинейных систем уравнений.

Очевидно, что справедливым является соотношение

$$\{K = HT^{-1} \mid T \in \mathbf{T}^{\mathrm{diag}}\} \subseteq \{K = HT^{-1} \mid T \in \Sigma^{\mathrm{diag}}_{\forall\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F})\} \subseteq M. \tag{16}$$

Множество, стоящее в левой части (16), обозначим через

$$\Sigma_{\exists}(\mathbf{T}, H) = \{K = HT^{-1} \mid T \in \mathbf{T}^{\mathrm{diag}}\}. \tag{17}$$

Данное множество представляет собой множество решений $K = HT^{-1}$ для всевозможных матриц $T \in \mathbf{T}^{\mathrm{diag}}$, т. е. является объединенным множеством решений следующей интервальной системы линейных алгебраических уравнений:

$$K\mathbf{T}^{\mathrm{diag}} = H. \tag{18}$$

Задача отыскания объединенного множества решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений, а также задача получения оценок данного множества являются в настоящее время хорошо изученными [9–11]. Более того, последняя может быть сведена к алгебраической.

Таким образом, задача определения интервальной матрицы регулятора (4), удовлетворяющего (6), или, что то же самое, задача внутреннего интервального оценивания множества (7) свелась к чисто алгебраической, заключающейся в последовательном внутреннем интервальном оценивании множеств (11) и (17).

Неполнота как алгебраической, так и порядковой структуры интервального пространства является причиной, в силу которой все разработанные к настоящему времени алгоритмы нахождения алгебраических решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений являются существенно численными. Для нахождения алгебраического решения интервального уравнения (15) мы адаптируем вариант метода простой итерации (одношагового стационарного итерационного процесса), впервые рассмотренный в [8] и основанный на так называемом *дистрибутивном расщеплении* интервальных матриц уравнения. Это вызвано тем, что уравнение (15) имеет два вхождения неизвестных и, кроме того, специфика задания интервальной матрицы $\mathbf{F}$ приводит к произвольному распределению правильных и неправильных интервалов при элементах матрицы T.

Учитывая двукратное вхождение неизвестной T в интервальное уравнение (15), в целях упрощения схемы итерационного процесса можно подвергнуть дистрибутивному расщеплению только одну из интервальных матриц $\mathbf{A}$ или $\operatorname{opp}\mathbf{F}$. В данной работе приводится описание схемы для случая дистрибутивного расщепления интервальной матрицы $\operatorname{opp}\mathbf{F}$, когда она представляется в виде

$$\operatorname{opp}\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + F_2, \tag{19}$$

где $\mathbf{F}_1 \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ — некоторая интервальная матрица, $\mathbb{IR}$ — множество интервалов $\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$, не обязательно связанных соотношением $\underline{\mathbf{x}} \le \overline{\mathbf{x}}$, $F_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — точечная матрица, получаемая путем поэлементного применения к интервальной матрице opp $\mathbf{F}$ унарной операции $\lfloor \cdot \rfloor$, действующей следующим образом:

$$\lfloor \mathbf{x} \rfloor = \lfloor [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] \rfloor = \begin{cases} \max\{\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\}, & \text{если } \mathbf{x} < 0, \\ 0, & \text{если } \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{x}} < 0, \\ \min\{\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\}, & \text{если } \mathbf{x} > 0. \end{cases} \tag{20}$$

Принимая во внимание (19), интервальное уравнение (15) можно переписать в виде

$$\mathbf{T}F_2 = \text{opp}\, \mathbf{B}H \ominus \mathbf{AT} \ominus \mathbf{TF}_1, \tag{21}$$

где $\ominus$ — операция внутренней разности, действующая как $\mathbf{x} \ominus \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] \ominus [\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}] = [\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}]$.

Для реализации итеративного процесса воспользуемся *стандартным погружением* [6, 8] интервального пространства в евклидово $\sigma : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, действующим следующим образом:

$$\sigma : (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n,) \mapsto (-\underline{\mathbf{x}}_1, -\underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, -\underline{\mathbf{x}}_n, \overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n). \tag{22}$$

Интервальное уравнение (21) представляет собой интервальную систему линейных алгебраических уравнений; преобразуем его к эквивалентному виду, используя формализм кронекеровского произведения матриц [2], применение которого в данном случае является корректным:

$$W_2\mathbf{p} = \mathbf{b} \ominus \mathbf{W}_A\mathbf{p} \ominus \mathbf{W}_1\mathbf{p}, \tag{23}$$

где $W_2 \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$; $W_2 = I \otimes F_2^\top$; I — единичная матрица размерности $n \times n$; $\otimes$ — символ кронекеровского произведения матриц; $\mathbf{p} \in \mathbb{IR}^{n^2}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathbf{p} = \text{col}\,(\mathbf{T}_1^\top, \mathbf{T}_2^\top, \ldots, \mathbf{T}_n^\top)$, $\mathbf{T}_i$ — i-я строка матрицы $\mathbf{T}$, т. е. $\mathbf{T} = (\mathbf{T}_1^\top, \mathbf{T}_2^\top, \ldots, \mathbf{T}_n^\top)^\top$; $\mathbf{b} = \text{col}\,((\text{opp}\ \mathbf{B}H)_1^\top, (\text{opp}\ \mathbf{B}H)_2^\top, \ldots, (\text{opp}\ \mathbf{B}H)_n^\top,)$, $(\text{opp}\ \mathbf{B}H)_i$ — i-я строка матрицы opp $\mathbf{B}H$, т. е. opp $\mathbf{B}H = ((\text{opp}\ \mathbf{B}H)_1^\top, (\text{opp}\ \mathbf{B}H)_2^\top, \ldots, (\text{opp}\ \mathbf{B}H)_n^\top)^\top$; $\mathbf{W}_A \in \mathbb{IR}^{n^2\times n^2}$, $\mathbf{W}_A = \mathbf{A} \otimes I$; $\mathbf{W}_1 \in \mathbb{IR}^{n^2\times n^2}$, $\mathbf{W}_1 = I \otimes \mathbf{F}_1^\top$.

В случае, если матрица $W_2 = (w_{2_{ij}})$, $1 \le i, j \le n^2$ является вполне невырожденной [6, 8], интервальное уравнение (23) с использованием погружения (22) примет вид

$$W_2^\sim \sigma(\mathbf{p}) = \sigma(\mathbf{b} \ominus \mathbf{W}_A\mathbf{p} \ominus \mathbf{W}_1\mathbf{p}), \tag{24}$$

где $W_2^\sim$ — так называемая *сопутствующая матрица* [5], определяемая как

$$W_2^\sim := \begin{pmatrix} W_2^+ & W_2^- \\ W_2^- & W_2^+ \end{pmatrix}$$

для положительной $W_2^+ = (w_{2_{ij}}^+)$ и отрицательной $W_2^- = (w_{2_{ij}}^-)$ частей матрицы W_2 таких, что

$$w_{2_{ij}}^+ = \max\{w_{2_{ij}}, 0\}, \quad w_{2_{ij}}^- = \max\{-w_{2_{ij}}, 0\}, \quad 1 \le i, j \le n^2.$$

Если известно k-е приближение $\mathbf{p}^{(k)}$ уравнения (24), то $(k+1)$-е приближение $\mathbf{p}^{(k+1)}$, согласно (24), вычисляется по формуле

$$\sigma(\mathbf{p}^{(k+1)}) = (W_2^\sim)^{-1} \cdot \sigma(\mathbf{b} \ominus \mathbf{W}_A\mathbf{p}^{(k)}) \ominus \mathbf{W}_1\mathbf{p}^{(k)}, \tag{25}$$

или, обозначая $p^{(k)} = \sigma(\mathbf{p}^{(k)})$, получим

$$p^{(k+1)} = (W_2^{\sim})^{-1} \cdot \sigma(\mathbf{b} \ominus \mathbf{W}_A \sigma^{-1}(p^{(k)}) \ominus \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(p^{(k)})). \tag{26}$$

Введем в рассмотрение следующие сопутствующие матрицы:

$$|\mathbf{W}_A|^{\sim} = \begin{pmatrix} |\mathbf{W}_A| & 0 \\ 0 & |\mathbf{W}_A| \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{W}_1|^{\sim} = \begin{pmatrix} |\mathbf{W}_1| & 0 \\ 0 & |\mathbf{W}_1| \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Если спектральный радиус матрицы $|(W_2^{\sim})^{-1}| \cdot (|\mathbf{W}_A|^{\sim} + |\mathbf{W}_1|^{\sim})$ размерности $2n^2 \times 2n^2$ меньше единицы, то итеративный процесс (26) сходится к алгебраическому интервальному решению уравнения (23) из любого начального приближения $\mathbf{p}_0$.*

Доказательство. Пространство $\mathbb{R}^{2n^2}$, в котором итерирует (26), является псевдометрическим с псевдорасстоянием $\rho \colon \mathbb{R}^{2n^2} \to \mathbb{R}^{2n^2}$, определяющим векторное “отклонение” векторов $x, y \in \mathbb{R}^{2n^2}$ как вектор расстояний вида

$$\rho(x,y) = \begin{pmatrix} \max\{|x_1 - y_1|, |x_{n^2+1} - y_{n^2+1}|\} \\ \vdots \\ \max\{|x_{n^2} - y_{n^2}|, |x_{2n^2} - y_{2n^2}|\} \\ \max\{|x_1 - y_1|, |x_{n^2+1} - y_{n^2+1}|\} \\ \vdots \\ \max\{|x_{n^2} - y_{n^2}|, |x_{2n^2} - y_{2n^2}|\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\sigma^{-1}(x) \ominus \sigma^{-1}(y)| \\ |\sigma^{-1}(x) \ominus \sigma^{-1}(y)| \end{pmatrix}.$$

Покажем, что относительно рассматриваемой метрики оператор перехода итерационного процесса (26)

$$D(x) = (W_2^{\sim})^{-1} \cdot \sigma\left(\mathbf{b} \ominus \mathbf{W}_A \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(x)\right)$$

удовлетворяет условиям теоремы Шредера об обобщенных сжатиях [3].

Обозначим через Γ оператор, обратный к оператору, задаваемому матрицей W_2^{σ}; тогда, применяя подход, аналогичный [8], имеем для $i = 1, \ldots, 2n^2$

$$|D_i(x) - D_i(y)| = |D(x) - D(y)|_i =$$

$$= |\Gamma \cdot \sigma(\mathbf{b} \ominus \mathbf{W}_A \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(x)) - \Gamma \cdot \sigma(\mathbf{b} \ominus \mathbf{W}_A \sigma^{-1}(y) \ominus \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(y))|_i =$$

$$= |\Gamma \cdot \left(\sigma(\mathbf{b} \ominus \mathbf{W}_A \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(x)) - \sigma(\mathbf{b} \ominus \mathbf{W}_A \sigma^{-1}(y) \ominus \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(y))\right)|_i =$$

$$= \left|\Gamma \cdot \left(\sigma(\mathbf{b}) - \sigma(\mathbf{W}_A \sigma^{-1}(x)) - \sigma(\mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(x)) - \sigma(\mathbf{b}) + \sigma(\mathbf{W}_A \sigma^{-1}(y)) + \sigma(\mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(y))\right)\right|_i =$$

$$= \left|\Gamma \cdot \left(\sigma(\mathbf{W}_A \sigma^{-1}(x)) - \sigma(\mathbf{W}_A \sigma^{-1}(y)) + \sigma(\mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(x)) - \sigma(\mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(y))\right)\right|_i =$$

$$= \left|\Gamma \cdot \sigma(\mathbf{W}_A \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_A \sigma^{-1}(y) + \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(y))\right|_i =$$

$$= |\Gamma| \cdot \left|\sigma(\mathbf{W}_A \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_A \sigma^{-1}(y) + \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(y))\right|_i =$$

$$= \left(|\Gamma| \cdot \begin{pmatrix} \left|\underline{\mathbf{W}_A \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_A \sigma^{-1}(y) + \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(y)}\right| \\ \\ \left|\overline{\mathbf{W}_A \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_A \sigma^{-1}(y) + \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(y)}\right| \end{pmatrix} \right)_i \le$$

$$\leq \left(|\Gamma| \cdot \begin{pmatrix} \left| \underline{\mathbf{W}_A \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_A \sigma^{-1}(y)} \right| \\ \left| \overline{\mathbf{W}_A \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_A \sigma^{-1}(y)} \right| \end{pmatrix} + |\Gamma| \cdot \begin{pmatrix} \left| \underline{\mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(y)} \right| \\ \left| \overline{\mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{W}_1 \sigma^{-1}(y)} \right| \end{pmatrix} \right)_i \leq$$

$$\leq \left(|\Gamma| \cdot \begin{pmatrix} |\mathbf{W}_A||\sigma^{-1}(x) \ominus \sigma^{-1}(y)| \\ |\mathbf{W}_A||\sigma^{-1}(x) \ominus \sigma^{-1}(y)| \end{pmatrix} + |\Gamma| \cdot \begin{pmatrix} |\mathbf{W}_1||\sigma^{-1}(x) \ominus \sigma^{-1}(y)| \\ |\mathbf{W}_1||\sigma^{-1}(x) \ominus \sigma^{-1}(y)| \end{pmatrix} \right)_i =$$

$$= (|\Gamma| \cdot (|\mathbf{W}_A|^{\sim} + |\mathbf{W}_1|^{\sim})\, \rho(x,y))_i = (|\Gamma| \cdot (|\mathbf{W}_A|^{\sim} + |\mathbf{W}_1|^{\sim}))_i \cdot \rho(x,y), \quad i = 1, \ldots, 2n^2,$$

где $(|\Gamma| \cdot (|\mathbf{W}_A|^{\sim} + |\mathbf{W}_1|^{\sim}))_i$ — i-я строка матрицы $|\Gamma| \cdot (|\mathbf{W}_A|^{\sim} + |\mathbf{W}_1|^{\sim})$. На основании полученных соотношений можно записать

$$\max\{|D_i(x) - D_i(y)|, |D_{i+n^2}(x) - D_{i+n^2}(y)|\} \leq$$

$$\leq \max\left\{ (|\Gamma|(|\mathbf{W}_A|^{\sim} + |\mathbf{W}_1|^{\sim})\rho(x,y))_i\, , (|\Gamma|(|\mathbf{W}_A|^{\sim} + |\mathbf{W}_1|^{\sim})\rho(x,y))_{i+n^2} \right\} =$$

$$= \max\left\{ (|\Gamma|(|\mathbf{W}_A|^{\sim} + |\mathbf{W}_1|^{\sim}))_i\, \rho(x,y), (|\Gamma|(|\mathbf{W}_A|^{\sim} + |\mathbf{W}_1|^{\sim}))_{i+n^2}\, \rho(x,y) \right\}$$

для всех $i = 1, \ldots, n^2$; тогда

$$\rho(D(x), D(y)) \leq |\Gamma|(|\mathbf{W}_A|^{\sim} + |\mathbf{W}_1|^{\sim})\rho(x,y) = |(W_2^{\sim})|^{-1}\, (|\mathbf{W}_A|^{\sim} + |\mathbf{W}_1|^{\sim})\rho(x,y).$$

Теорема доказана.

Поскольку в рассматриваемом итерационном процессе (26) используется дистрибутивное расщепление интервальной матрицы орр $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + F_2$, то в целях улучшения сходимости (26) необходимо стремиться к увеличению спектрального радиуса матрицы F_2.

Пример. Рассмотрим объект управления (1) для случая $n = m = 2$ с интервальными матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1, 1.2] & [-4, -3.4] \\ [-1, -0.7] & [2, 2] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} [4, 4.4] & [1, 1.2] \\ [1, 1] & [3, 3.4] \end{pmatrix}.$$

Пара матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ является полностью управляемой, поскольку

$$\operatorname{rank}(B; AB) = 2, \quad \forall A \in \mathbf{A},\ \forall B \in \mathbf{B}.$$

Интервальная матрица $\mathbf{A}$ является неустойчивой, внутренняя оценка множества (2) для начальных условий $x_0 = (-1; 2)^{\top}$ при $u(t) = 0$ изображена на рис. 1. Определим интервальную матрицу $\mathbf{K}$ параметров алгоритма (4) такую, чтобы замкнутая система обладала свойством асимптотической устойчивости. Выберем интервальную матрицу $\mathbf{F}$ (носитель желаемой динамики замкнутой системы) асимптотически устойчивой (желаемая динамика):

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} [-27, -18] & [-15, 3] \\ [1, 15] & [-19, -15] \end{pmatrix}.$$

Для матрицы

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

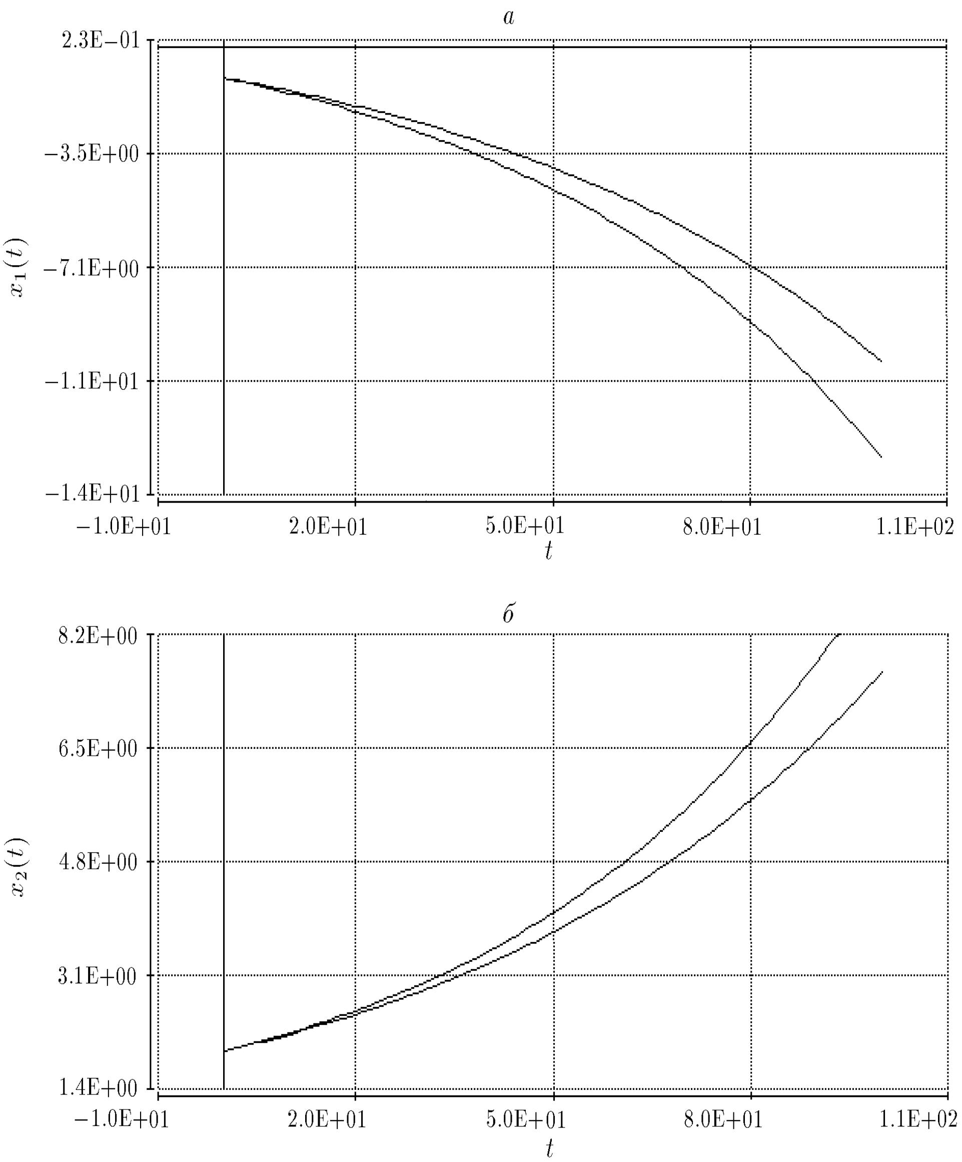

Рис. 1. Моделирование движения объекта управления при $u(t) = 0$, $x_0 = (-1, 2)^\top$: *а*, *б* — соответственно первая и вторая компоненты вектора.

итерационный процесс (26) сходится к значению

$$p^* = (0.128,\ 0.120,\ 0.010,\ 0.176,\ -0.127,\ 0.000,\ 0.085,\ -0.168)^\top$$

за 23 итерации из начального приближения p_0, удовлетворяющего следующей “средней” точечной системе:

$$W_2^\sim p_0 = \sigma(\mathbf{b}) - (\mathrm{mid}\,\mathbf{W}_A)^\sim p_0 - (\mathrm{mid}\,\mathbf{W}_1)^\sim p_0,$$

где $\mathrm{mid}\,\mathbf{x} = \mathrm{mid}\,[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] = (\underline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{x}})/2$ — взятие середины интервала (интервальной матрицы), а матрицы

$$(\mathrm{mid}\,\mathbf{W}_A)^\sim = \begin{pmatrix} (\mathrm{mid}\,\mathbf{W}_A)^+ & (\mathrm{mid}\,\mathbf{W}_A)^- \\ (\mathrm{mid}\,\mathbf{W}_A)^- & (\mathrm{mid}\,\mathbf{W}_A)^+ \end{pmatrix},$$

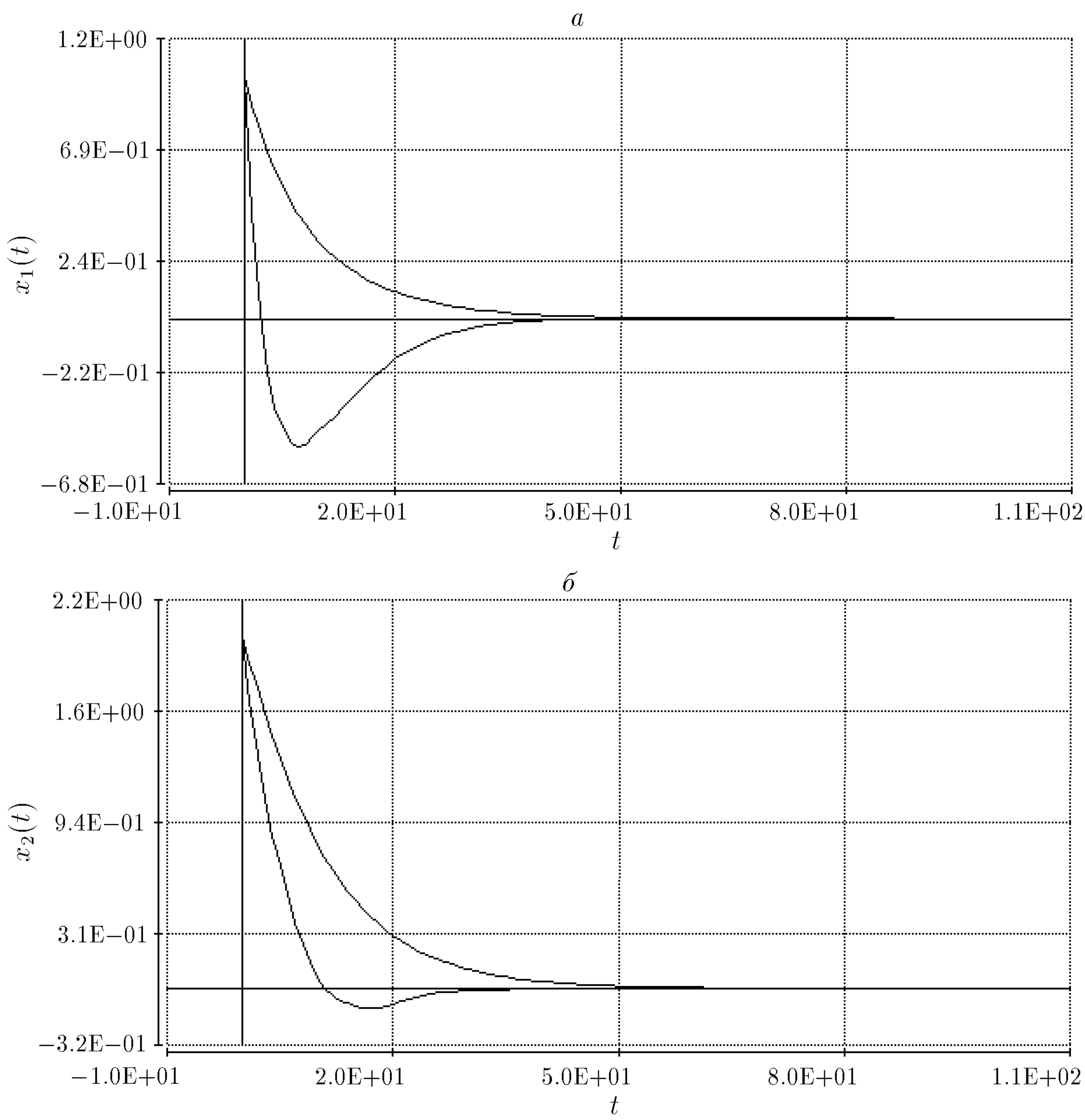

Рис. 2. Моделирование движения замкнутой системы для $x_0 = (1; 2)^\top$:
а, *б* — соответственно первая и вторая компоненты вектора.

$$(\mathrm{mid}\, \mathbf{W}_1)^{\sim} = \begin{pmatrix} (\mathrm{mid}\, \mathbf{W}_1)^{+} & (\mathrm{mid}\, \mathbf{W}_1)^{-} \\ (\mathrm{mid}\, \mathbf{W}_1)^{-} & (\mathrm{mid}\, \mathbf{W}_1)^{+} \end{pmatrix}$$

являются сопутствующими [5] для соответствующих средних матриц.

Алгебраическое решение интервального уравнения (15) — матрица

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} [-0.128, -0.127] & [-0.120, 0.000] \\ [-0.010, 0.085] & [-0.176, -0.168] \end{pmatrix},$$

является правильной интервальной и содержит правильную интервальную диагональную матрицу

$$\mathbf{T}^{\mathrm{diag}} = \begin{pmatrix} [-0.128, -0.127] & 0 \\ 0 & [-0.176, -0.168] \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Внутренняя интервальная оценка объединенного множества решений интервального уравнения (18) с матрицей (27), являющаяся решением поставленной задачи, может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1/[-0.128, -0.127] & 0 \\ 0 & 1/[-0.176, -0.168] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [-7.863, -7.802] & 0 \\ [5.667, 5.965] & [-5.965, -5.667] \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Переходные процессы, представленные на рис. 2, для замкнутой системы, образованной объектом управления (1) и алгоритмом управления (4) с числовой матрицей параметров (28), являются асимптотически устойчивыми.

Список литературы

[1] Акунов Т. А., Алишеров С., Оморов Р. О., Ушаков А. В. *Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами.* Препринт. Илим, Бишкек, 1991.

[2] Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* Наука, М., 1988.

[3] Коллатц Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика.* Мир, М., 1969.

[4] Кузовков Н. Т. *Модальное управление и наблюдающие устройства.* Наука, М., 1976.

[5] Шарый С. П. Алгебраический подход во “внешней задаче” для интервальных линейных систем. *Вычисл. технологии*, **3**, №2, 1998, 67–114.

[6] Шарый С. П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью. *Изв. РАН. Теория и системы управления*, №3, 1997, 51–61.

[7] Шарый С. П. Новый подход к анализу статических систем с интервальной неопределенностью в данных. *Вычисл. технологии*, **2**, №1, 1997, 84–102.

[8] Шарый С. П. Численное нахождение алгебраического решения интервальных линейных систем. В *“Дискретная математика”*. КГТУ, Красноярск, 1995.

[9] Kearfott R. B. *Rigorous global search: continuous problem.* Kluwer, Dortrecht, 1996.

[10] Neumaier A. *Interval Methods for Systems of Equations.* Cambridge University Press, 1990.

[11] Shary S. P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problem, or One more application of Kaucher arithmetic. *Reliable Comp.*, **2**, No. 1, 1996, 3–33.

Поступила в редакцию 25 декабря 1998 г.