Достоверность результатов применения метода Монте-Карло в задачах интервального анализа

К. К. Семенов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия

Контактный e-mail: semenov.k.k@iit.icc.spbstu.ru

Дана статистическая оценка достоверности результатов, получаемых при решении задачи оценивания интервала возможных значений функции многих переменных с помощью метода Монте-Карло. Представлены соотношения, связывающие характеристики достоверности с числом выполненных статистических испытаний.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, интервальный анализ, количество статистических испытаний.

Введение

Одной из главных задач интервального анализа является оценка предельных значений функции, достигаемых при заданных интервалах возможных значений ее аргументов. Для решения этой задачи используют в том числе методы статистического моделирования. При этом полученные в качестве результата границы всегда будут у́же точных пределов изменения функции. Как отмечается в литературе, это свидетельствует о том, что методы статистического моделирования не могут предоставить результат гарантированной достоверности, поскольку интервал, содержащий действительно все возможные значения исследуемой функции, может оказаться существенно шире оценок границ, полученных в результате статистического моделирования.

В настоящей работе дана статистическая оценка достоверности результатов, получаемых при решении задачи оценивания интервала возможных значений функции многих переменных с помощью метода Монте-Карло. Представлены соотношения, связывающие характеристики достоверности с числом выполненных статистических испытаний.

1. Формулировка задачи

В различных областях прикладной науки часто возникает задача интервального анализа: для функции многих переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ необходимо определить, какие возможные значения могут быть у величины y, если известно, что x_1 принимает значения из интервала $\boldsymbol{x_1}$, x_2 — из интервала $\boldsymbol{x_2}$ и т. д. Такая задача характерна для практики обработки неточных данных, технических расчетов, для эконометрики, при планировании и проектировании. Математически она сводится к определению значений

$$\inf_{\substack{x_i \in \boldsymbol{x_i},\\ i=1,2,...,n}} f(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad \sup_{\substack{x_i \in \boldsymbol{x_i},\\ i=1,2,...,n}} f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{1}$$

В практике математического моделирования существует вполне универсальный подход, позволяющий приближенно оценить данные границы вне зависимости от сложности функции f. Он сводится к перебору возможных кортежей $(x_1, x_2, ..., x_n)$ значений входных аргументов функции и проверке на минимальность и максимальность соответствующих им значений y. По накопленным значениям функции f оцениваются ее минимальные и максимальные значения при заданных ограничениях на аргументы. В случае, если перебор рандомизирован, подход принято обобщенно называть методом Монте-Карло вне зависимости от конкретных вариаций и деталей построения перебора.

При решении задач интервального анализа способ генерации значений x_i внутри интервалов $\boldsymbol{x_i}$, позволяющий получить приемлемые результаты моделирования при минимально возможном количестве статистических испытаний, вообще говоря, определяется исследуемой функцией f. В частности, если f является монотонной относительно всех своих аргументов, то целесообразно использовать дискретное равномерное распределение, заданное над границами интервалов $\boldsymbol{x_i}$. В общем же случае, когда нет сведений о поведении функции f, оснований предпочесть одни значения другим нет. При этом неизвестно, какому именно сочетанию значений аргументов соответствуют границы (1). В таких условиях при решении задач интервального анализа в отсутствие априорной информации о характере распределения значений аргументов наиболее рациональным будет использовать непрерывное равномерное распределение при генерации значений x_i внутри интервалов $\boldsymbol{x_i}$. Выбор закона распределения, отличного от равномерного, скорее всего приведет к уменьшению достоверности конечных результатов, поскольку в среднем шансы на возникновение “удачных” комбинаций значений аргументов снизятся.

В работах [1, 2] поставлен вопрос соотношения результатов, получаемых с помощью метода Монте-Карло с точными границами (1). Обычно предполагается, что использование метода Монте-Карло позволяет в случае значительного количества перебираемых комбинаций получить достаточно достоверные результаты, которые можно сравнивать с интервальными методами анализа [3, 4] тех же задач. Как правило, такое качественное утверждение редко сопровождается количественными оценками как объема необходимых расчетов, так и вероятностных характеристик достоверности полученных результатов. Это обстоятельство лишает возможности сделать выводы, обоснованные для нужд практики.

2. Оценка достоверности результатов, получаемых с помощью метода Монте-Карло

Положим, что для каждого из аргументов x_i, $i = 1, 2, ...n$, была получена случайным образом выборка значений x_{ij}, $j = 1, 2, ..., N$, из интервала $\boldsymbol{x_i}$. Пусть для каждого из полученных N сочетаний $(x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj})$ вычислено значение y_j исследуемой функции f: $y_j = f(x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj})$. Тогда естественной оценкой интервала (1) возможных значений функции f является интервал

$$\boldsymbol{y} = \left[\min_j y_j,\ \max_j y_j\right]. \tag{2}$$

Поскольку все значения аргументов x выбраны случайным образом, вычисленные значения y также являются случайными. Встает вопрос об определении вероятностной меры, сопоставленной этому интервалу. В работе [1] рассмотрен ряд примеров, демонстрирующих, что при достаточно сложном характере функции f и достаточном большом значении N данная вероятность может быть очень близкой к единице. При этом отмечены сложности, возникающие при конкретном количественном расчете этой вероятности, и отмечена высокая трудоемкость расчетов при оценке достоверности результатов интервального анализа, полученных методом Монте-Карло.

Пусть y — случайная величина, для которой получена выборка ее значений y_j ($j = 1, 2, ...N$) в результате многократных вычислений функции f методом Монте-Карло. Оценим на основе значений y_j вероятностную меру P, сопоставленную интервалу (2). Полученный результат будет количественно свидетельствовать о достоверности границ этого интервала как оценок пределов (1). Отметим, что, несмотря на то, что все значения y_j попадают внутрь интервала (2), значение P, ему сопоставляемое, отнюдь не равно единице. Действительно, выполним расчеты методом Монте-Карло два раза независимо друг от друга. Положим, не снижая общности, что один из полученных интервалов оказался внутри другого. Следовательно, вероятностные меры этой пары интервалов не равны друг другу и уж точно не равны единице.

В литературе имеются примеры оценки достоверности интервала (2), выполненные для частных случаев (см., например, [1]). В настоящей работе достоверность оценена для общего случая с позиций математической статистики. Искомое соотношение может быть получено более чем одним способом. В работе представлены два обоснования, первое из которых использует классическое понятие вероятности (по Колмогорову), а второе в существенной мере опирается на понятие фидуциальной вероятности (по Фишеру) [5], применение которой в статистике имеет определенные ограничения. Поскольку оба подхода приводят к одному и тому же результату, это повышает его практическую значимость.

Обоснование 1. Будем обозначать через $\boldsymbol{y_P}$ такие интервалы, для которых выполнено условие

$$\Pr\{y \in \boldsymbol{y_P}\} = P,$$

где $P \in (0, 1)$ — заданное нами значение вероятности; $\Pr\{S\}$ — вероятность события S.

Для одной и той же непрерывной случайной величины y для заданного значения вероятности P существует бесконечное число интервалов $\boldsymbol{y_P}$ с отличающимися границами.

Оценим, чему равна вероятность того, что интервал $\boldsymbol{y}$, определенный по формуле (2) по значениям из выборки y_j, будет удовлетворять соотношению $\Pr\{y \in \boldsymbol{y}\} \geq P$. Проверяемое утверждение равносильно тому, что интервал $\boldsymbol{y}$ будет содержать в среднем не менее $P \cdot 100\,\%$ доли возможных значений функции f при случайных значениях ее аргументов x_i из интервалов $\boldsymbol{x_i}$. Оценка снизу для искомой вероятности будет являться достижением поставленной в работе цели.

Для того чтобы интервал $\boldsymbol{y}$ содержал не менее $P \cdot 100\,\%$ доли всех возможных значений случайной величины y, необходимо, чтобы между крайними значениями выборки y_j оказался хотя бы один интервал $\boldsymbol{y_P}$. То есть должен найтись такой интервал $\boldsymbol{y_P}$, в котором не менее двух точек из выборки y_j будут лежать по обе его стороны. Поскольку выборка y_j наполнена случайным образом и $\Pr\{y_j \in \boldsymbol{y_P}\} = P$, вероятность искомого события будет равна $1 - P^N - NP^{N-1}(1 - P)$. Действительно, положим, что задан некоторый интервал, такой, что вероятность попадания значения величины y в его пределы равна P. Применим метод Монте-Карло и в результате независимых испытаний получим N случайных значений величины y. Шансы, что все они попадут внутрь этого интервала, равны P^N. Вероятность того, что ровно одно значение окажется вне его границ, равна в соответствии с формулой Бернулли величине $NP^{N-1}(1-P)$. Вероятность того, что два или более значений y_j окажутся за пределами этого интервала, можно получить, если вычесть из единицы вычисленные шансы. Таким образом, вероятность того, что интервал $\boldsymbol{y}$ содержит не менее $P \cdot 100\,\%$ доли всех возможных значений случайной величины y, равна $1-P^N-NP^{N-1}(1-P)$.

Потребуем, чтобы полученная вероятность была больше назначенного нами значения Q. Запишем соотношение

$$1-P^N-NP^{N-1}(1-P) \geq Q$$

или, что то же самое,

$$P^N+NP^{N-1}(1-P) \leq 1-Q. \tag{3}$$

Полученное неравенство задает достаточные условия для выполнения требования

$$\Pr\{\Pr\{y \in \boldsymbol{y}\} = P\} \geq Q.$$

Поскольку при его выводе никак не использовалась информация о распределении значений y, оно является непараметрическим и справедливо для всех возможных распределений.

Обоснование 2. Как известно, вероятностная мера для непрерывных случайных величин вводится на полуоткрытых интервалах. Поэтому для оценки искомой вероятности рассмотрим интервал $\boldsymbol{y'}$, полученный из интервала $\boldsymbol{y}$ формулы (2) исключением одной из его границ. Тогда $(N-1)$ значения из выборки y_j попадут внутрь интервала $\boldsymbol{y'}$ просто в силу его определения. Таким образом, получаем, что по итогам статистического моделирования $N-1$ раз было выполнено событие $y \in \boldsymbol{y'}$. О какой оценке вероятности P события мы имеем право говорить, если известно, что в N независимых повторах оно произошло ровно $N-1$ раз? Кажущийся тривиальным ответ $\dfrac{N-1}{N}$ не позволяет оценить достоверность полученной оценки вероятности. Поэтому полным ответом на заданный вопрос может служить доверительный интервал для вероятности, построить который можно с помощью уравнений Клоппера—Пирсона [6] для биномиального распределения. Построим указанный интервал в виде $[\underline{P}, \overline{P}]$. Для достижения цели настоящей статьи требуется определить только нижнюю границу возможных значений вероятности. Верхняя граница $\overline{P}$ нам безразлична и может быть положена равной единице. Тогда в соответствии с уравнениями Клоппера—Пирсона интересующее нас значение $\underline{P}$ должно удовлетворять следующему уравнению:

$$\sum_{k=s}^{N} C_N^k \underline{P}^k (1-\underline{P})^{N-k} = \alpha,$$

где s — число повторов, в которых произошло исследуемое событие $y \in \boldsymbol{y}$; N — общее число испытаний; C_N^k — биномиальный коэффициент (число сочетаний из N по k); α — фидуциальная вероятность ситуации, когда точное значение P окажется меньше $\underline{P}$, т. е. $\alpha = 1-Q$, где Q — доверительная вероятность.

Поскольку в нашем случае $s = N - 1$, получаем следующее равенство:

$$\underline{P}^N + N\underline{P}^{N-1}(1 - \underline{P}) = \alpha.$$

Наконец, потребуем, чтобы с вероятностью не меньше Q было выполнено $P \geq \underline{P}$. Тогда $1 - \alpha \geq Q$ и, значит,

$$\underline{P}^N + N\underline{P}^{N-1}(1 - \underline{P}) \leq 1 - Q.$$

Данное соотношение в точности повторяет неравенство (3).

Полученный результат является частным случаем известных в математической статистике непараметрических толерантных пределов [7], нашедших важное практическое применение в метрологии.

3. Результаты расчетов

Неравенство (3) позволяет рассчитать, какое минимальное количество статистических испытаний необходимо для оценки границ интервала возможных значений в рамках метода Монте-Карло применительно к интервальному анализу. Для этого необходимо разрешить (3) относительно N при заданных значениях P и Q. Поскольку левая сторона неравенства представляет собой монотонно убывающую от 1 до 0 функцию от N, существует всего одно значение $N = N_{\min}$, при котором неравенство (3) обращается в равенство. Следующее за ним целое и есть то минимальное количество повторов в статистическом исследовании функции f методом Монте-Карло, которое позволяет добиться нужного уровня достоверности оценки $\boldsymbol{y}$ границ ее возможных значений.

Аналитически разрешить неравенство (3) относительно N нельзя, поэтому приходится прибегать к численным методам решения. Например, может быть предложена следующая процедура в среде разработки Matlab, позволяющая для заданных значений P и Q рассчитать методом Ньютона значение $N_{\min}$ с достаточной точностью (для этого используется инструментарий символьных вычислений Symbolic Math Toolbox).

```
function n = GetNmin(P, Q, dig)
    % — P и Q — значения вероятностей в неравенстве (3).
    % — dig — число удерживаемых при расчетах знаков.
    % — n — минимально необходимое число повторов в методе Монте-Карло.
    digits(dig); syms n prev; % символьные переменные.
    lnP = log(P); invP = 1-P; invQ = 1-Q; % расчет констант.
    prev = 1/invP; % первое приближение.
    while 1
        g = P ^ (prev-1); f = P * g;                % расчет без лишних вычислений.
        g = g * invP;     f = f + prev * g - invQ;  % f — функция, чей корень ищется.
        df = log(P) * (f + invQ) + g; % значение производной функции f.
        n = prev - f/df;
        if (abs(n-prev) < 0.1) break; end % требуется только целая часть числа.
        prev = n;
    end
```

Пример использования процедуры для заданных пользователем значений P и Q:
dig = 25;
P = vpa('1-(1e-10)', dig);
Q = vpa('1-(1e-20)', dig);
Nmin = GetNmin(P, Q, dig);

Результаты выполненных расчетов сведены в таблицу. Поскольку в задаче интервального анализа вероятности P и Q должны быть весьма близки к единице, в первой колонке таблицы рассмотрен упрощенный случай, когда $Q = P$. Во всех оставшихся столбцах таблицы величина вероятности Q задана, а значение вероятности P изменяется от строки к строке.

В работе [1] вслед за [8] отмечается, что значение вероятности $P = 1 - 10^{-8}$ можно считать вполне соответствующим достоверному событию. Таким образом, получаем, что достаточным для применения в задачах интервального анализа является объем выборки размером в $10^8 - 10^9$. С другой, стороны в практике экспериментальной физики принято считать существование физического эффекта доказанным, если его статистическая значимость удовлетворяет так называемому критерию 5σ. Это означает, что вероятность того, что наблюденное явление не представляло собой случайное стечение обстоятельств, превышает $99.9998567\,\% \sim 1 - 10^{-6}$. Таким образом, значение вероятности порядка $1 - 10^{-6}$ также можно считать своего рода имеющим "доказательную силу" и "гарантирующим" результат. Для такого значения вероятности достаточным будет размер выборки порядка 10^7. Также стоит отметить, что приведенные оценки необходимого количества значений являются одинаковыми для всех аргументов исследуемой функции: значение $N_{\min}$ не зависит ни от количества аргументов n, ни от вида функции f.

Представленное соотношение (3) позволяет, с одной стороны, спланировать количество статистических испытаний, необходимых при использовании метода Монте-Карло, а с другой — оценить значимость и достоверность полученной оценки при выполненном заданном количестве повторов. Последняя возможность хорошо согласуется с идеей последовательно приближающих гарантирующих алгоритмов [9]: поскольку уточнить границы интервала $\boldsymbol{y}$ с каждым новым полученным значением y_j не составляет труда, есть возможность для любого промежуточного результата оценить характеристики его достоверности.

Значения $N_{\min}$

P	$N_{\min} : Q = P$	$N_{\min} : Q = 0.99$	$N_{\min} : Q = 0.999$
$1 - 10^{-1}$	38	64	89
$1 - 10^{-2}$	662	662	920
$1 - 10^{-3}$	9230	6636	9230
$1 - 10^{-4}$	117559	66381	92331
$1 - 10^{-5}$	$1423657 \sim 1.4 \cdot 10^6$	$663832 \sim 6.6 \cdot 10^5$	$923337 \sim 9.2 \cdot 10^5$
$1 - 10^{-6}$	$16688413 \sim 1.7 \cdot 10^7$	$6638349 \sim 6.6 \cdot 10^6$	$9233410 \sim 9.2 \cdot 10^6$
$1 - 10^{-7}$	$191197992 \sim 1.9 \cdot 10^8$	$66383517 \sim 6.6 \cdot 10^7$	$92334131 \sim 9.2 \cdot 10^7$
$1 - 10^{-8}$	$2153578515 \sim 2.2 \cdot 10^9$	$663835203 \sim 6.6 \cdot 10^8$	$923341344 \sim 9.2 \cdot 10^8$
$1 - 10^{-9}$	$23939727854 \sim 2.4 \cdot 10^{10}$	$6638352066 \sim 6.6 \cdot 10^9$	$9233413472 \sim 9.2 \cdot 10^9$

4. Формулы для приближенных расчетов

Для быстрых инженерных расчетов могут быть предложены следующие приближенные формулы. Поскольку в задаче интервального анализа вероятности P и Q должны быть близки к единице, для упрощения дальнейших рассуждений выберем $Q = P$. Найдем такое значение $N_{\min} > 0$, при котором будет выполнено равенство

$$P_{\min}^{N} + N_{\min} P^{N_{\min}-1} (1 - P) = 1 - P.$$

Тогда для любого $N > N_{\min}$ справедливо утверждение: с вероятностью, не меньшей, чем заданное значение P, интервал $\boldsymbol{y}$ содержит в среднем не менее $P \cdot 100\,\%$ возможных значений функции f, т. е. $\Pr\{\Pr\{y \in \boldsymbol{y}\} \geq P\} \geq P$. Выведем приближенную формулу для $N_{\min}$ как функции от значения P. Для этого выполним следующие преобразования. Поскольку $0 < P < 1$, то

$$N_{\min} + \frac{P}{1-P} = \left(\frac{1}{P}\right)^{N_{\min}-1},$$

$$(N_{\min} - 1) \ln \frac{1}{P} = \ln\left(N_{\min} + \frac{P}{1-P}\right),$$

$$N_{\min} = -\frac{\ln\left(\dfrac{N_{\min}}{P} + \dfrac{1}{1-P}\right)}{\ln P}.$$

Полученное выражение задает сжимающее отображение $N_{\min} = \phi\,(N_{\min})$, с чьей помощью можно рассчитать значение $N_{\min}$ при заданном значении P. Несложные расчеты показывают, что если в качестве первого приближения выбрать значение $N_{\min}^{(0)} = \dfrac{1}{1-P}$, то итерационный процесс $N_{\min}^{(k+1)} = \phi\left(N_{\min}^{(k)}\right)$, $k = 0, 1, ...$, сойдется к точному значению $N_{\min}$ при всех P, достаточно близких к единице.

В частности, получаем, что

$$N_{\min}^{(1)} = -\frac{\ln \dfrac{1+P}{P(1-P)}}{\ln P} \approx -\frac{\ln \dfrac{2}{1-P}}{\ln P},$$

$$N_{\min}^{(2)} = -\frac{\ln\left(\dfrac{1}{1-P} - \dfrac{1}{P \ln P} \ln \dfrac{1+P}{P(1-P)}\right)}{\ln P} \approx -\frac{1}{\ln P} \ln\left(\frac{1}{1-P} - \frac{\ln \dfrac{2}{1-P}}{\ln P}\right),$$

$$N_{\min}^{(3)} \approx -\frac{1}{\ln P} \ln\left[\frac{1}{1-P} - \frac{1}{\ln P} \ln\left(\frac{1}{1-P} - \frac{\ln \dfrac{2}{1-P}}{\ln P}\right)\right]. \qquad (4)$$

Расчеты показывают, что использование $N_{\min}^{(1)}$ в качестве оценки значения $N_{\min}$ дает не больше 20 % погрешности при $P \geq 0.99$, использование $N_{\min}^{(2)}$ — не более 3.0 %, наконец, использование $N_{\min}^{(3)}$ — не более 0.4 %. Таким образом, данные соотношения вполне могут быть использованы в инженерных расчетах. Наибольшие значения погрешности достигаются при $P = 0.99$ и с приближением P к единице снижаются. На рисунке слева представлены зависимости величины погрешности $\gamma_N = 100\,\% \dfrac{N_{\min}^{(j)} - N_{\min}}{N_{\min}}$ от величины $\lg(1-P)$. Видно, что погрешность отрицательна.

В случае, если исходным является значение количества повторов N, то необходимо оценить значение вероятностей P и Q. Положим, как и раньше, для упрощения, что $P = Q$. Тогда справедливо

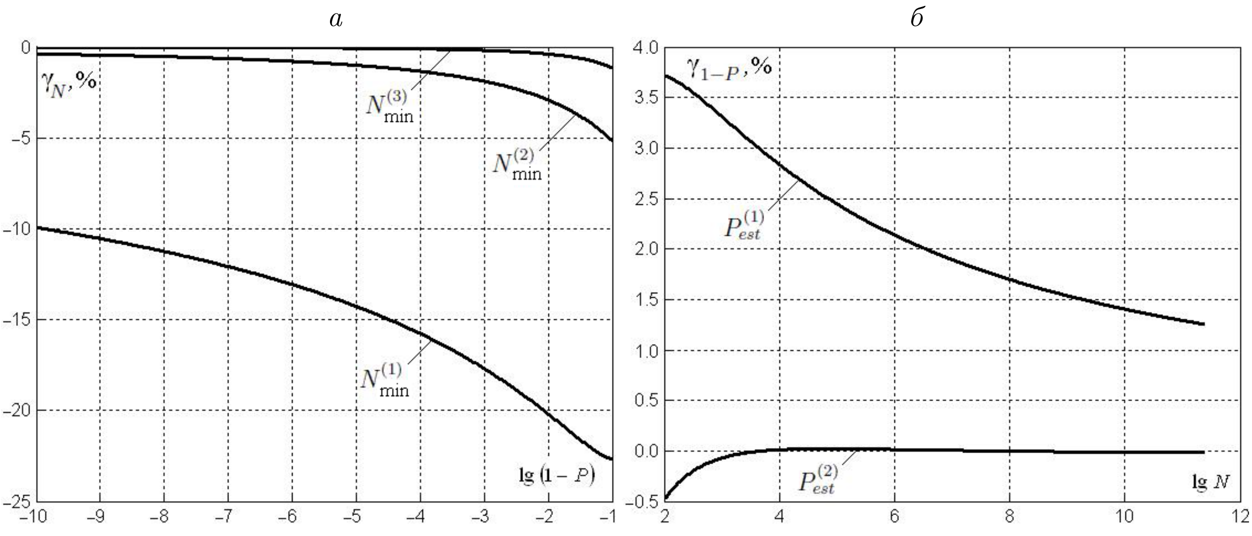
$$P^N + NP^{N-1}(1-P) = 1-P,$$
$$\ln \frac{P^N}{1-P} = \ln\left(1 - NP^{N-1}\right).$$

Так как для любого $0 \leq P < 1$ выполнено $\lim\limits_{N\to\infty} NP^{N-1} = 0$, то $\ln\left(1 - NP^{N-1}\right) \approx -NP^{N-1}$. Следовательно,

$$P \approx \left(\ln \frac{(1-P)^{\frac{1}{N}}}{P}\right)^{\frac{1}{N-1}} = \left[\frac{1}{N}\ln(1-P) - \ln P\right]^{\frac{1}{N-1}}.$$

Поскольку, как было показано выше, выполняется приближенное соотношение $N \approx -\dfrac{\ln \dfrac{2}{1-P}}{\ln P}$, получаем, что $-\ln P \approx \dfrac{1}{N}\ln\dfrac{2}{1-P}$, а следовательно, вероятность P может быть оценена как

$$P_{est}^{(1)} \approx \left(\frac{\ln 2}{N}\right)^{\frac{1}{N-1}}.$$



Зависимость относительных погрешностей оценок значений $N_{\min}$ от P (*а*) и P_{est} от N (*б*) соответственно

Поскольку значение вероятности P очень близко к единице, для оценки точности полученного приближения $P_{est}^{(1)}$ удобно использовать относительную погрешность разности $1-P$, т. е. величину

$$\gamma_{1-P} = 100\,\% \frac{\left(1-P_{est}^{(1)}\right)-(1-P)}{1-P} = 100\,\% \frac{P-P_{est}^{(1)}}{1-P}.$$

Действительно, отношение γ_P разности $P-P_{est}^{(1)}$ к P, которое, казалось бы, следует рассмотреть, очень близко к $P-P_{est}^{(1)}$, так как $P \approx 1$. Полученная оценка погрешности тогда будет крайне маловыразительной, поскольку заведомо будет очень малой величиной.

Зависимость величины погрешности $\gamma_{1-P} = 100\,\% \dfrac{P_{est}^{(1)}-P}{1-P}$ от $\lg N$ представлена на рисунке справа. Видно, что погрешность имеет положительный знак. Значение величины γ_{1-P} при $N > 10^2$ не превышает $4\,\%$ и уменьшается с ростом N. Видим, что зависимость γ_{1-P} от $\lg N$ при $N > 10^3$ описывается достаточно гладкой кривой. Для повышения точности оценки вероятности P можно аппроксимировать данную зависимость и внести коррекцию в выражение для $P_{est}^{(1)}$. Для приближения могут быть использованы функции от $\lg N$ различных типов: хорошая аппроксимация достигается с помощью полинома второй степени, степенной и других функций. Тип функции выбран из требования обеспечить наименьшее число подбираемых коэффициентов. Такой результат получен с помощью гиперболы $\gamma_{1-P} \approx \dfrac{17.07}{\lg N + 2.035}$. Данную зависимость можно использовать для повышения достоверности оценки вероятности P:

$$P_{est}^{(2)} \approx 1 - \frac{\lg N + 2.035}{\lg N + 2.206}\left(1-P_{est}^{(1)}\right) = 1 - \frac{\lg N + 2.035}{\lg N + 2.206}\left(1-\left(\frac{\ln 2}{N}\right)^{\frac{1}{N-1}}\right). \qquad (5)$$

Относительная погрешность γ_{1-P} при использовании оценки $P_{est}^{(2)}$ в случае $N \geq 10^2$ не превышает значения в $0.5\,\%$, а при $N \geq 10^3$ — значения в $0.07\,\%$ (см. рисунок). Все расчеты данного раздела были выполнены с удержанием не менее 50 достоверных десятичных разрядов в промежуточных и конечных результатах вычислений.

5. Основные результаты

Основной результат работы заключается в получении вероятностной оценки доли P всех возможных значений функции f, попавших в интервал (2), оцененный по разбросу результатов N итераций метода Монте-Карло для заданных интервалов допускаемых значений аргументов f: с вероятностью не меньше Q эта доля превысит значение P, если число итераций больше, чем определяется неравенством (3), представленным в данной работе. Если задать требуемое значение $P \approx 1$ и положить $Q = P$, то необходимое минимальное количество итераций метода Монте-Карло можно оценить по формуле (4). Если же, наоборот, было выполнено некоторое количество итераций и требуется оценить достигнутую долю P, то при $Q = P$ можно использовать формулу (5) настоящей работы.

Выводы

При решении задач интервального анализа требуется оценивать границы интервалов возможных значений функций при заданных ограничениях на их аргументы. При использовании для этой цели метода Монте-Карло есть возможность оценить достоверность полученных границ. Представленные в работе неравенство (3) и формулы для приближенных вычислений позволяют оценить как необходимый объем статистических испытаний в методе Монте-Карло, так и вероятностную характеристику достоверности для уже полученной оценки возможных пределов изменения анализируемой функции. Таким образом, представленная статья в определенной мере проясняет вопрос “интервальный анализ или методы Монте-Карло?” [1], указывая на границы применимости метода Монте-Карло.

Благодарности. Автор крайне признателен профессору Геннадию Николаевичу Солопченко и профессору Сергею Петровичу Шарому за обсуждение работы и полезные комментарии, позволившие улучшить статью. Автор также благодарит анонимного рецензента за ценные замечания.

Список литературы / References

[1] **Шарый С.П.** Интервальный анализ или методы Монте-Карло? // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 1. С. 103–115.
Shary, S.P. Interval analysis or Monte-Carlo methods? // Comput. Technologies. 2007. Vol. 12, No 1. P. 103–115. (In Russ.)

[2] **Вощинин А.П.** Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // Заводская лаборатория. 2002. Т. 68, № 1. С. 118–126.
Voshchinin, A.P. Interval data processing: development and perspectives // Zavodskaya Laboratoriya. 2002. Vol. 68, No. 1. P. 118–126. (In Russ.)

[3] **Moore, R.E.** Methods and applications of interval analysis // ISAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia, 1979.

[4] **Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.** Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 222 с.
Kalmykov, S.A., Shokin, Yu.I., Yuldashev, Z.H. Interval analysis methods. Novosibirsk: Nauka, 1986. 222 p. (In Russ.)

[5] **Климов Г.П.** О фидуциальном подходе в статистике // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191, № 4. С. 763–765.
Klimov, G.P. On fiducial approach in statistics // Doklady Akademii Nauk SSSR. 1970. Vol. 191, No. 4. P. 763–765. (In Russ.)

[6] **Clopper, C., Pearson, E.S.** The use of confidence of fiducial limits illustrated in the case of binomial // Biometrika. 1934. Vol. 26, No. 4. P. 404–413.

[7] **Солопченко Г.Н.** Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 212 с.
Solopchenko, G.N. Probability theory and mathematical statistics. St. Petersburg: Izdatel'stvo Politekhn. Univ., 2010. 212 p. (In Russ.)

[8] **Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.** Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. М.: Наука, 1990. 270 с.

Blechman, I.I., Myshkis, A.D., Panovko, Ya.G. Mechanics and applied mathematics. Logic and specifics of mathematical applications. Moscow: Nauka, 1990. 270 p. (In Russ.)

[9] **Шокин Ю.И.** Об интервальных задачах, интервальных алгоритмах и их трудоемкости // Вычисл. технологии. 1996. Т. 1, № 1. С. 98–115.
Shokin, Yu.I. On interval problems, interval algorithms and resource consumption of their solution // Comput. Technologies. 1996. Vol. 1, No. 1. P. 98–115. (In Russ.)

Поступила в редакцию 7 сентября 2015 г.,
с доработки — 26 октября 2015 г.

The reliability of Monte-Carlo approach for applications in the interval analysis problems

Semenov, Konstantin K.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 195251, Russia

Corresponding author: Semenov, Konstantin K., e-mail: semenov.k.k@iit.icc.spbstu.ru

Purpose. One of the major problems in interval analysis is to estimate the function of limit values, which is achievable within the specified range of possible values of its arguments. To solve this problem, we use different methods that include statistical modelling. In the latter case, final boundaries will be always narrower than the range of values of the exact function. As it is mentioned in literature, this indicated that the methods of statistical modelling do not provide results with the guaranteed reliability, since the interval that contains actually all possible values of the studied function may be essentially wider than the boundaries obtained from the statistical modelling. The goal of this paper is to derive the statistical estimate for the reliability of the results of Monte-Carlo approach for interval analysis.

Methodology. To study the reliability, we use the tools of the probability theory. The estimate for the function range can be considered as reliable if the probability of statement “the interval obtained using the Monte Carlo method, contains more than a specified proportion of all possible values of a function” is very close to one. All necessary proofs are given showing that the derived relations are correct for all possible functions involved in the interval analysis and for all distributions used in Monte-Carlo approach.

Findings. The derived relations connect reliability characteristics with quantity of statistical tests. Easy to use approximations of these relations are presented. It is shown how to estimate the sufficient quantity of statistical tests that will provide the necessary reliability for Monte-Carlo estimates for possible range of studied function and how to calculate the guaranteed confidence for the quantity of the given tests.

Originality/value. All results presented in the paper are original. The presented relations allow to get quantitative estimate for quality of the results of interval analysis obtained with Monte-Carlo method and to reasonably choose the quantity of statistical tests, which are required to execute.

Keywords: Monte-Carlo method, interval analysis, statistical tests quantity.

Received 7 September 2015
Received in revised form 26 October 2015