

Исследование математической модели микроэлектромеханического резонатора типа платформа

С. И. ФАДЕЕВ^{1,3}, Э. Г. КОСЦОВ², Д. О. ПИМАНОВ^{3,*}

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия

³Новосибирский государственный университет, Россия

*Контактный e-mail: pimanov-daniil@yandex.ru

Приводятся результаты численного исследования математической модели микроэлектромеханического высокочастотного резонатора типа платформа класса МЭМС (микроэлектромеханические системы). Математическая модель прибора представлена нелинейной начально-краевой задачей, описывающей колебания подвижного электрода в виде недеформируемой платформы, присоединенной к пружинам с цилиндрической формой изгиба. Численно определены условия возникновения колебаний, оказавшиеся близкими к случаю, когда масса платформы много больше массы пружины. Получены в аналитическом виде формулы, достаточно хорошо описывающие основные особенности работы микроэлектромеханического резонатора. Аналогичные исследования выполнены для микрорезонаторов типа платформа с пружинами в виде консольной балки или натянутой пленки. Приведен пример расчета параметров микрорезонатора, определяющих заданный режим работы, который показывает, что найденные в рамках математической модели значения параметров характерны для МЭМС.

Ключевые слова: электростатическое притяжение, цилиндрический изгиб упругой балки, метод прямых, автоколебания и собственные колебания, функция Грина, частота собственных колебаний, метод Фурье.

Введение

Микроэлектромеханические системы (МЭМС) относятся к современному, быстро развивающемуся направлению в электронной промышленности. К настоящему времени создана технология принципиально новых микроэлектронных устройств, имеющих широкий спектр практического применения [1, 2].

Микрорезонатор типа платформа, математическая модель которого рассматривается в данной работе, является одним из представителей МЭМС. Конструкция микрорезонатора с условным названием “платформа” предложена в [3, 4]. К характерным элементам конструкции относятся подвижный и неподвижный электроды малой массы, разделенные микрозазором. Неподвижный электрод покрыт слоем диэлектрика. В качестве подвижного электрода используется недеформируемая платформа, прикрепленная к пружине, функции которой выполняет упругая микробалка. Плоскость платформы параллельна плоской поверхности неподвижного электрода, покрытого слоем

диэлектрика. В результате взаимодействия упругой силы пружины, силы инерции и силы электростатического притяжения, обусловленной разностью потенциалов между электродами, возникают высокочастотные колебания платформы, которые происходят в условиях вакуума.

Очевидно, что изготовление такого рода микроэлектромеханических приборов требует решения целого ряда технологических и физических проблем. Например, для возбуждения высокочастотных колебаний определенной массы подвижного электрода необходимы достаточно большие электростатические силы, что достигается уменьшением величины зазора. Но, с другой стороны, это увеличивает вероятность пробоя. Чтобы этого не произошло, в предложенной конструкции диэлектрик, покрывающий неподвижный электрод, имеет высокую диэлектрическую проницаемость (сегнетоэлектрик), что обеспечивает возможность достижения исключительно высокой плотности энергии поля в микрозазоре (до 10^8 Дж/м³), а следовательно, больших сил, действующих на подвижный электрод. Перечисление возникающих проблем можно продолжить.

На рис. 1, а представлены реальные образцы микрорезонаторов типа платформа (вид сверху) с различной геометрией пружин, указаны их характерные линейные размеры. Одна из конструкций микрорезонаторов приведена на рис. 1, б, где 1 — подвижный электрод — платформа; 2 — пружина — упругая балка; 3 — площадки, на которых закреплены концы балки. В дальнейшем схема этой конструкции будет использоваться при математическом моделировании работы прибора.

Работа микрорезонатора происходит в два этапа. При запуске длительности T_{imp} (первый этап) возникают автоколебания подвижного электрода под воздействием электростатического притяжения при постоянной разности потенциалов V . По завершении запуска ($t > T_{imp}$, второй этап) колебания подвижного электрода продолжаются при $V = 0$ по инерции в виде собственных колебаний.

Схема микрорезонатора, соответствующая конструкции, приведенной на рис. 1, б, представлена на рис. 2. Здесь 1 — неподвижный электрод; 2 — слой диэлектрика толщины h с диэлектрической проницаемостью ϵ ; 3 — подвижный электрод (платформа) длины $2L_0$; 4 — воздушный слой между платформой и поверхностью диэлектрика в произвольный момент времени t ; 5 — пружина в виде упругой балки длины $2l = 2(L - L_0)$, где $2L$ — расстояние между местами закрепления балки; d — расстояние от места креп-

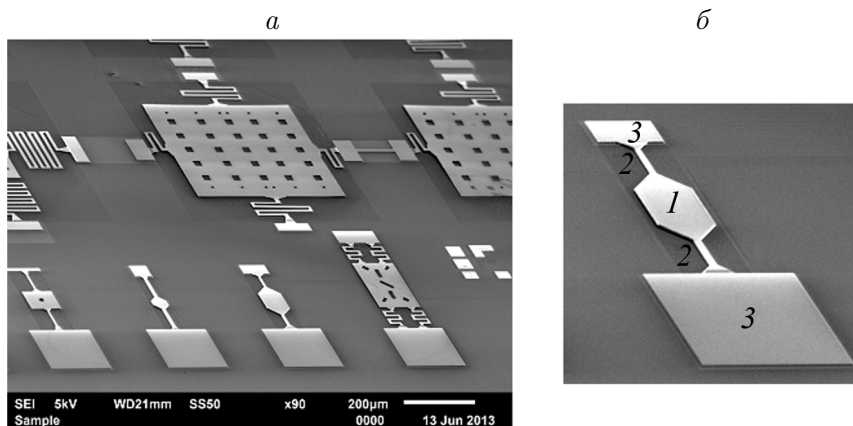


Рис. 1. Конструкции микрорезонаторов типа платформа с различной геометрией пружин. Изготовлены на НЗПП, г. Новосибирск

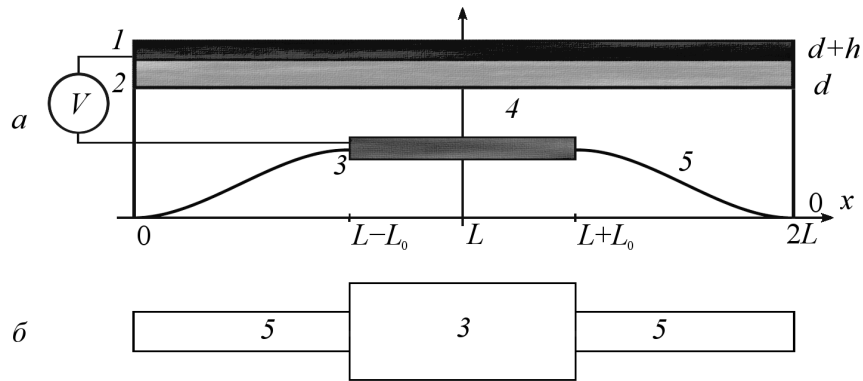


Рис. 2. Схема конструкции микрорезонатора типа платформа с пружиной в виде упругой балки: *a* — в сечении, *б* — вид сверху

ления пружины до поверхности диэлектрика; V — разность потенциалов между электродами.

Проведенные исследования явлений в микрозазоре показали, что благодаря высокому значению диэлектрической проницаемости сегнетоэлектрика рассматриваемая конструкция дает возможность обеспечить колебания подвижного электрода в гигагерцовой области частот.

1. Математическая модель микрорезонатора

Математическая модель микрорезонатора описывает движение недеформируемой платформы в виде материальной точки с массой M_c под воздействием электростатического притяжения F_e при $0 < t \leq T_{imp}$, упругой силы пружины F_c , препятствующей притяжению, и силы инерции. При $t > T_{imp}$ электростатическое притяжение отсутствует. Силы, приложенные к платформе как материальной точке, расположенной в центре пружины длиной $2l$ (рис. 2), воздействуют на пружину как сосредоточенная нагрузка.

Определим электростатическое притяжение платформы. В соответствии со схемой конструкции микрорезонатора (рис. 2) система, состоящая из платформы и неподвижного электрода, покрытого слоем диэлектрика, в каждый момент времени представляет собой плоский конденсатор с обкладками площади S каждая. Поскольку величина зазора между электродами много меньше других линейных размеров резонатора, силу электростатического притяжения электродов, возникающую при запуске микрорезонатора, можно оценить, используя теорию плоского конденсатора.

Пусть функция $u(t, x)$, $t > 0$, $0 \leq x \leq 2l$, описывает цилиндрическую форму прогиба упругой балки, концы которой жестко закреплены. Обозначим через $u_c(t) = u(t, l)$ положение платформы в текущий момент времени. При этом толщина воздушного слоя между поверхностью платформы и поверхностью диэлектрика в каждый момент времени будет равна $d - u_c(t)$. Следовательно, сила электростатического притяжения F_e , действующая на платформу при запуске, имеет вид

$$F_e = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2 \left(d + \frac{h}{\varepsilon} - u_c(t) \right)^2}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ — электрическая постоянная.

Заметим, что аналогичное выражение для силы электростатического притяжения имеет место в случае криволинейной узкой полосы, образованной поверхностью подвижного электрода с медленно меняющейся кривизной и плоской поверхностью диэлектрика, покрывающего неподвижный электрод [5].

Для определения упругой силы пружины рассмотрим начально-краевую задачу в частных производных, описывающую форму упругой балки-пружины с закрепленными концами на расстоянии $2l$ под воздействием сосредоточенной силы F_c , приложенной к балке при $x = l$. Формулировка начально-краевой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} t > 0, \quad 0 \leq x \leq 2l, \quad M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = F_c \delta(x - l), \\ u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad u(t, 2l) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 2l) = 0, \\ u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь M — удельная масса балки; D — цилиндрическая жесткость балки ширины l_0 . Правая часть дифференциального уравнения задается в виде δ -функции для представления сосредоточенной силы F_c . Отметим, что обобщенное решение $u(t, x)$ начально-краевой задачи (2), непрерывное по x вместе с первой и второй производными, имеет разрыв третьей производной при $x = l$:

$$F_c = D \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, l + 0) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, l - 0) \right]. \quad (3)$$

Очевидно, величина упругой силы, равная $(-F_c)$, определяется по смещению упругого элемента в точке приложения сосредоточенной силы.

Определенные в (1) и (3) сила электростатического притяжения платформы F_e и упругая сила пружины $(-F_c)$ вместе с силой инерции платформы составляют уравнение баланса сил в виде задачи Коши для дифференциального уравнения относительно функции $u_c(t)$, описывающей движение платформы как материальной точки массы M_c :

$$t > 0, \quad M_c \frac{d^2 u_c}{dt^2} + F_c = F_e, \quad u_c(0) = \frac{du_c}{dt}(0) = 0. \quad (4)$$

Задача Коши (4) рассматривается совместно с начально-краевой задачей (2), где $u(t, l) = u_c(t)$.

Преобразуем формулировку начально-краевой задачи (2) к виду, при котором решение понимается в обычном смысле. С учетом представления сосредоточенной силы (3) и симметрии $u(t, x)$ относительно $x = l$ получим

$$\begin{aligned} t > 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \\ u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = 0, \quad 2D \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, l) = -F_c, \\ u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0. \end{aligned}$$

В итоге совместная система уравнений, представляющая математическую модель микрорезонатора, имеет вид

$$t > 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \\ u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = 0, \quad u(t, l) = u_c(t), \quad (5)$$

$$u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, \\ M_c \frac{d^2 u_c}{dt^2} - 2D \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, l) = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2 \left(d + \frac{h}{\varepsilon} - u_c \right)^2}, \quad u_c(0) = \frac{du_c}{dt}(0) = 0. \quad (6)$$

На основе анализа уравнений математической модели требуется сформулировать условия функционирования прибора и указать на возникающие отсюда зависимости между параметрами, определяющими колебания платформы на первом и втором этапах работы микрорезонатора. Результаты численного исследования (5), (6) приведены ниже.

2. Математическая модель микрорезонатора с пренебрежимо малой массой пружины

Математическая модель микрорезонатора с пружиной, масса которой много меньше массы платформы, позволяет свести проблему к исследованию уравнения движения материальной точки, представляющего простейшую консервативную систему [7]. При этом основные условия функционирования микрорезонатора формулируются в аналитическом виде. Как показывают вычисления, характеристики математической модели микрорезонатора с нулевой массой пружины достаточно близки к аналогичным характеристикам математической модели (5), (6), начиная с достаточно большого (но реалистичного) отношения массы платформы к массе пружины.

Пусть $U(x)$ — обобщенное решение начально-краевой задачи (2), формулировка которой при $M = 0$ принимает вид

$$0 \leq x \leq 2l, \quad D \frac{d^4 U}{dx^4} = F_c \delta(x - l), \\ U(0) = \frac{dU}{dx}(0) = 0, \quad U(2l) = \frac{dU}{dx}(2l) = 0. \quad (7)$$

Функция $U(x)$ описывает стационарное равновесие упругой балки под воздействием сосредоточенной силы F_c , постоянной по ширине балки. Из (7) следует, что

$$U(x) = F_c K(x, l), \quad (8)$$

где $K(x, l)$ — функция Грина $K(x, \xi)$ однородной краевой задачи при $\xi = l$ [8–10]:

$$K(x, l) = \begin{cases} \frac{(2l - x)^2}{D} \left(\frac{l}{8} - \frac{2l - x}{12} \right), & x \geq l, \\ \frac{x^2}{D} \left(\frac{l}{8} - \frac{x}{12} \right), & x < l. \end{cases}$$

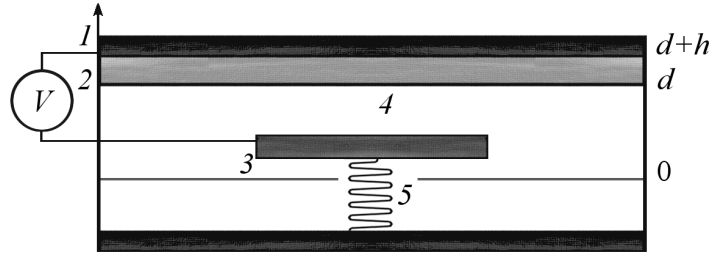


Рис. 3. Схема микрорезонатора типа платформа с коэффициентом жесткости G условной пружины в случае $M = 0$

Поскольку в любой момент времени $U(l)$ совпадает с $u_c(t)$,

$$F_c = \frac{u_c}{K(l, l)} = Gu_c, \quad G = \frac{24D}{l^3}. \quad (9)$$

При этом задача Коши (4) с учетом (1) и (9) записывается в виде

$$t > 0, \quad M_c \frac{d^2 u_c}{dt^2} + Gu_c = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2 \left(d + \frac{h}{\varepsilon} - u_c \right)^2}, \quad u_c(0) = \frac{du_c}{dt}(0) = 0. \quad (10)$$

Решение $u_c(t)$ задачи Коши (10) определяет закон движения материальной точки массы M_c под воздействием электростатического притяжения (1) и упругой силы условной пружины (9) с коэффициентом жесткости G .

На рис. 3 представлена схема микрорезонатора с нулевой массой пружины: платформа прикреплена к условной пружине с коэффициентом жесткости G , вычисляемым по формуле (9). Здесь 1 — неподвижный электрод, 2 — диэлектрик, 3 — подвижный электрод (платформа) в текущий момент времени t , 4 — воздушный зазор между поверхностью диэлектрика и поверхностью платформы, 5 — условная пружина, 0 — положение платформы в начальный момент времени.

Отметим, что из (8) следует формула для описания изгиба цилиндрической формы пружины $u(t, x)$ нулевой массы. В произвольный момент времени с учетом выражения для функции Грина $K(x, l)$ функция $u(t, x)$ имеет вид

$$u(t, x) = \frac{K(x, l)}{K(l, l)} u_c(t). \quad (11)$$

В итоге проблема свелась к исследованию решения задачи Коши (10), описывающему при выполнении определенных условий автоколебания платформы, возникающие во время запуска.

2.1. Автоколебания платформы при запуске микрорезонатора

Как известно [7], уравнение

$$M_c \frac{d^2 u_c}{dt^2} + Gu_c = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2 \left(d + \frac{h}{\varepsilon} - u_c \right)^2} \quad (12)$$

относится к простейшим консервативным системам. В частности, для уравнения (12) в явном виде выписывается интеграл энергии, что позволяет достаточно подробно изучить свойства его решения и в том числе определить условия, при которых существуют автоколебания платформы [4].

Следуя [4], введем безразмерные переменные τ и y , связанные с t и u_c формулами

$$t = \sqrt{\frac{M_c}{G}} \tau, \quad u_c = \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right) y. \quad (13)$$

После перехода к безразмерным переменным (13) уравнение (12) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + y = \frac{q}{(1-y)^2}, \quad (14)$$

где q — безразмерная комбинация параметров, определяющих электростатическое притяжение:

$$q = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2G \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)^3}. \quad (15)$$

Таким образом, свойства решений уравнения (14) зависят только от одного параметра q . Приведем основные результаты исследования.

Установлено, что при запуске микрорезонатора возникают автоколебания платформы, если

$$0 < q = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2G \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)^3} < \frac{1}{8}. \quad (16)$$

В противном случае при $q > 1/8$ автоколебания отсутствуют. Это означает, что под воздействием электростатического притяжения за конечное время происходит соударение платформы с поверхностью диэлектрика, известное как схлопывание.

Обозначим через $Ampl$ амплитуду автоколебаний, которой соответствует “безразмерная” амплитуда α . Связь $Ampl$ и параметров электростатического притяжения с учетом (15) имеет вид

$$q = \frac{1}{2} \alpha(1 - \alpha), \quad \alpha = \frac{Ampl}{d + \frac{h}{\varepsilon}}. \quad (17)$$

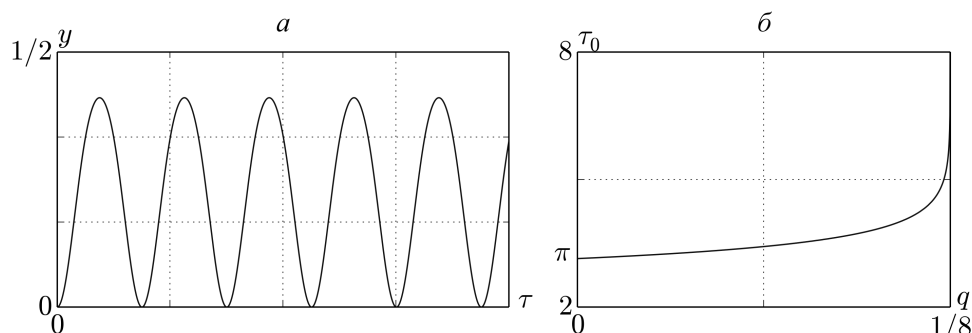


Рис. 4. Типичный вид автоколебаний резонатора, возникающих при его запуске (а), зависимость полупериода автоколебаний τ_0 уравнения (14) от параметра q (б)

Поскольку $0 \leq q < 1/8$, имеет место ограничение на амплитуду $Ampl$ из неравенства

$$0 \leq \alpha = \frac{Ampl}{d + \frac{h}{\varepsilon}} < \frac{1}{2}. \quad (18)$$

На рис. 4, *a* приведен типичный вид автоколебаний резонатора в безразмерных переменных (13). На рис. 4, *б* представлена зависимость полупериода автоколебаний τ_0 , описываемых решением уравнения (14), от параметра q , а следовательно, зависимость периода автоколебаний T_0 платформы от параметров электростатического притяжения. С учетом (13)

$$T_0 = 2\sqrt{\frac{M_c}{G}}\tau_0.$$

2.2. Связь параметров запуска и собственных колебаний платформы

При выполнении условия (16) и $t < T_{imp}$ платформа совершает автоколебания, описываемые задачей Коши (10). В момент времени $t = T_{imp}$ действие электростатического притяжения прекращается, а движение платформы продолжается по инерции в виде незатухающих собственных колебаний.

Пусть \hat{u}_c — решение, а \hat{u}'_c — производная решения задачи Коши (10) при $t = T_{imp}$:

$$\hat{u}_c = u_c(T_{imp}), \quad \hat{u}'_c = \frac{du_c}{dt}(T_{imp}).$$

Будем рассматривать \hat{u}_c и \hat{u}'_c в качестве начальных условий задачи Коши, решение которой описывает собственные колебания платформы:

$$t > T_{imp}, \quad M_c \frac{d^2 u_c}{dt^2} + G u_c = 0, \quad u_c(T_{imp}) = \hat{u}_c, \quad \frac{du_c}{dt}(T_{imp}) = \hat{u}'_c. \quad (19)$$

Отсюда

$$u_c(t) = \hat{u}_c \cos(\Omega t - \Omega T_{imp}) + \hat{u}'_c \frac{\sin(\Omega t - \Omega T_{imp})}{\Omega}, \quad (20)$$

где

$$\Omega = \sqrt{\frac{G}{M_c}} \quad (21)$$

— частота собственных колебаний, которая в силу (9) может регулироваться заданием параметров пружины. Из (20) следует, что амплитуда $Ampl_0$ собственных колебаний платформы вычисляется по формуле

$$Ampl_0 = \frac{2}{\Omega} \sqrt{\Omega^2 \hat{u}_c^2 + \hat{u}'_c^2}.$$

Пусть моменту T_{imp} соответствует масштабированное значение τ_{imp} :

$$T_{imp} = \sqrt{\frac{M_c}{G}} \tau_{imp}.$$

Заметим, что начальными данными в задаче Коши (19) будут $\hat{u}_c = Ampl$, $\hat{u}'_c = 0$, если T_{imp} выбирается равным полупериоду (нечетному числу полупериодов) автоколебаний,

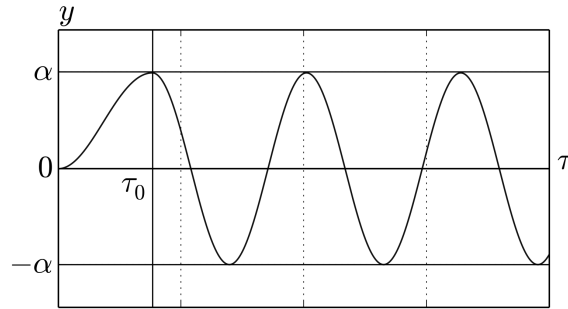


Рис. 5. Автоколебания ($0 < \tau \leq \tau_0$) и собственные колебания ($\tau > \tau_0$) платформы при $\tau_{imp} = \tau_0$

т. е. τ_{imp} равно τ_0 (нечетному числу τ_0). При этом собственные колебания платформы имеют вид

$$t > T_{imp}, \quad u_c(t) = Ampl \cos(\Omega t - \Omega T_{imp}).$$

Отсюда следует, что амплитуда собственных колебаний платформы будет равна двум амплитудам автоколебаний:

$$Ampl_0 = 2Ampl = 2 \left(d + \frac{h}{\varepsilon} \right) \alpha.$$

Из ограничения (18) на амплитуду автоколебаний следует, что

$$Ampl_0 < d + \frac{h}{\varepsilon}.$$

Важно отметить, что при указанном выборе длительности запуска амплитуда собственных колебаний будет наименее чувствительна к малым вариациям T_{imp} .

На рис. 5 представлены два этапа работы микрорезонатора в безразмерных переменных в случае $\tau_{imp} = \tau_0$. Первый этап ($0 < \tau \leq \tau_0$) — автоколебания платформы при запуске. Второй этап ($\tau > \tau_0$) — собственные колебания платформы. При этом амплитуда собственных колебаний платформы равна двум амплитудам автоколебаний.

В итоге после подстановки в уравнение параболы (17) выражений безразмерных комбинаций получаем искомую связь параметров запуска и собственных колебаний в виде

$$q = \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha), \quad q = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2G \left(d + \frac{h}{\varepsilon} \right)^3}, \quad \alpha = \frac{Ampl_0}{2 \left(d + \frac{h}{\varepsilon} \right)}. \quad (22)$$

Напомним, что в выражение безразмерной комбинации для q можно включить частоту Ω собственных колебаний платформы и ее массу M_c согласно (21).

2.3. Пример расчета параметров микрорезонатора

Приведем пример расчета параметров микрорезонатора, определяющих заданный режим работы. Из вычислений следует, что найденные в рамках математической модели значения параметров характерны для МЭМС.

Рассмотрим математическую модель микрорезонатора с параметрами:

d — расстояние от места крепления балки до поверхности диэлектрика, $d = 10^{-7}$ м;

h — толщина диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε , обычно, $h/\varepsilon \ll d$;

M_c — масса платформы, $M_c = 4 \cdot 10^{-16}$ кг;

S — площадь платформы, $S = 10^{-12}$ м²;

ε_0 — электрическая постоянная, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$;

h_0 — толщина балки, $h_0 = 10^{-7}$ м;

l_0 — ширина балки, $l_0 = 10^{-6}$ м;

E — модуль Юнга, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м²;

Ω — частота собственных колебаний, $\Omega = 10^{-9}$ с⁻¹;

$Ampl_0$ — амплитуда собственных колебаний платформы, $Ampl_0 = 4 \cdot 10^{-8}$ м.

Требуется определить длину балки $2l$ и разность потенциалов V . Приведем последовательность вычислений.

Определение длины пружины. При заданных частоте собственных колебаний и массе платформы коэффициент жесткости пружины согласно (21) вычисляется по формуле

$$G = \Omega^2 M_c = 400 \text{ Н/м.}$$

С другой стороны, согласно (9)

$$G = \frac{24D}{l^3}, \quad D = l_0 \frac{h_0^3 E}{12}.$$

Отсюда

$$l = h_0 \left(\frac{2l_0 E}{G} \right)^{1/3} = 10^{-6} \text{ м.}$$

Определение разности потенциалов V . По заданной амплитуде собственных колебаний $Ampl_0$ находим амплитуду автоколебаний $Ampl$ и соответствующее значение безразмерной комбинации α :

$$Ampl = \frac{Ampl_0}{2} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ м}, \quad \alpha = \frac{Ampl}{d + \frac{h}{\varepsilon}} \approx \frac{Ampl}{d} = 0.2.$$

Используя (22), вычисляем значение безразмерной комбинации q :

$$q = \frac{1}{2} \alpha (1 - \alpha) = 0.08.$$

Из выражения безразмерной комбинации q следует, что

$$V = \sqrt{q \frac{2G \left(d + \frac{h}{\varepsilon} \right)^3}{\varepsilon_0 S}} \approx \sqrt{q \frac{2G d^3}{\varepsilon_0 S}} = 85.04 \text{ В.}$$

Отметим, что найденные в примере значения длины балки и разности потенциалов, как и значения других параметров микрорезонатора, их определяющие, вполне согласуются с возможностями технологии современной микроэлектроники.

3. Численное исследование математической модели микрорезонатора

Ранее нами были найдены явные выражения основных характеристик микрорезонатора при нулевой массе пружины. Целью численного исследования является определение тех же характеристик в зависимости от значения параметра $\theta > 1$, представляющего отношение массы платформы к массе пружины. Как показали вычисления, характеристики микрорезонатора с ростом θ стремятся к предельным выражениям, которые имеют место при нулевой массе пружины. Предложенный в данной работе численный метод позволил провести исследование модели, в частности, в области больших значений параметра θ , при которых характеристики практически совпали с предельным случаем.

3.1. Формулировка начально-краевой задачи в безразмерных величинах

Предварительно преобразуем начально-краевую задачу (5), (6), выполнив переход к безразмерным переменным τ, s, y и y_c с масштабами $T, l, d + h/\varepsilon$ для t, x, u и u_c . При этом образуются безразмерные комбинации θ и \bar{q} . Имеем

$$t = \sqrt{\frac{l^3 M_c}{2D}} \tau, \quad x = ls, \quad u = \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right) y, \quad u_c = \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right) y_c, \quad (23)$$

$$\theta = \frac{M_c}{2lM}, \quad \bar{q} = \frac{\varepsilon_0 V^2 S l^3}{4D \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)^3}.$$

В результате формулировка принимает вид

$$\begin{aligned} \tau > 0, \quad 0 \leq s \leq 1, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \theta \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} = 0, \quad y(0, s) = \frac{\partial y}{\partial \tau}(0, s) = 0, \\ y(\tau, 0) = \frac{\partial y}{\partial s}(\tau, 0) = 0, \quad y(\tau, 1) = y_c(\tau), \quad \frac{\partial y}{\partial s}(\tau, 1) = 0, \\ \frac{d^2 y_c}{d\tau^2} - \frac{\partial^3 y}{\partial s^3}(\tau, 1) = \frac{\bar{q}}{(1 - y_c)^2}, \quad y_c(0) = \frac{dy_c}{d\tau}(0) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Обратим внимание на то, что решение начально-краевой задачи (24) зависит только от параметров \bar{q} и θ , что упрощает представление результатов численного исследования.

Пусть $y(\tau, s)$ — решение (24), которое при $s = 1, 0 < \tau \leq \tau_{imp}$, описывает колебания платформы при запуске. “Безразмерную” амплитуду автоколебаний платформы, представленных графиком функции $y_c(\tau) = y(\tau, 1)$, обозначим через α . При $\tau > \tau_{imp}$ платформа совершает собственные колебания с “безразмерной” амплитудой α_0 . В соответствии с ранее принятыми обозначениями и выбранными масштабами имеем

$$T_{imp} = \tau_{imp} \sqrt{\frac{l^3 M_c}{2D}}, \quad Ampl = \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right) \alpha, \quad Ampl_0 = \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right) \alpha_0. \quad (25)$$

Как показали вычисления, при достаточно больших значениях параметра θ поверхность $y = y(\tau, s)$ с учетом симметрии качественно подобна поверхности $u = u(t, x)$,

определяемой по формуле (11), которая получена ранее при рассмотрении модели микрорезонатора с пренебрежимо малой массой пружины. Из уравнения поверхности следует, что графики сечений поверхности $u = u(t, x)$ плоскостями $x = \text{const}$, $0 \leq x \leq l$, представляют колебания с одной и той же частотой и амплитудами, монотонно убывающими при стремлении x к 0. Практически такие же синхронность колебаний и поведение амплитуд наблюдаются в сечениях поверхности $y = y(\tau, s)$ плоскостями $s = \text{const}$, $0 \leq s \leq 1$.

Принцип выбора “безразмерной” длительности запуска τ_{imp} остается тем же, что и в случае $M = 0$. При решении начально-краевой задачи фиксируется момент $\tau = \tau_0$, когда значение $y_c(\tau)$ достигает максимального значения α (возможно, не в первый раз):

$$\tau_{imp} = \tau_0, \quad y_c(\tau_0) = \alpha, \quad \frac{dy_c}{d\tau}(\tau_0) = 0. \quad (26)$$

Численно было показано, что как следствие выполнения условия (26) “безразмерная” амплитуда α_0 собственных колебаний, возникающих при $\tau > \tau_0$, будет практически равна 2α .

Результаты численного исследования начально-краевой задачи будут представлены в виде графиков зависимости амплитуд α и α_0 от параметров \bar{q} и θ , которые дают полное представление о характеристиках микрорезонатора.

3.2. Метод прямых

Рассмотрим численное исследование начально-краевых задач (5), (6) методом прямых, при котором проблема приближенно сводится к интегрированию нелинейной автономной системы дифференциальных уравнений относительно сеточных значений функции $y(\tau, s)$. Отметим, что метод прямых успешно применялся для численного анализа начально-краевых задач, моделирующих работу микрорезонатора с подвижными электродами различного типа [11].

Согласно методу прямых введем в рассмотрение сетку по s с постоянным шагом разбиения H :

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m = 1, \quad s_i = Hi, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad H = 1/m.$$

Соответствующие сеточные значения решения $y(\tau, s)$ обозначим через y_i :

$$y_i = y(\tau, s_i), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad y_0 = 0, \quad y_m = y_c.$$

После замены в (24) частных производных функции $y(\tau, s)$ по s , включая краевые условия, на соответствующие разделенные разности с погрешностью порядка H^2 получим представление начально-краевой задачи в виде задачи Коши для автономной системы из m дифференциальных уравнений второго порядка относительно сеточных значений y_i :

$$0 < \tau \leq \tau_{imp}, \quad \frac{d^2 \mathbf{Y}}{d\tau^2} + Q A \mathbf{Y} = \mathbf{R}(\mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}(0) = \frac{d\mathbf{Y}}{d\tau}(0) = 0, \quad (27)$$

получим задачу Коши, определяющую компоненты вектор-функции $\mathbf{W}(\tau)$:

$$\tau_k < \tau \leq \tau_{k+1}, \quad \frac{d^2 \mathbf{W}}{d\tau^2} + QJ\mathbf{W} = T^{-1}\bar{\mathbf{R}}^k, \quad \mathbf{W}(\tau_k) = \mathbf{W}^k, \quad \frac{d\mathbf{W}}{d\tau}(\tau_k) = \mathbf{Z}^k. \quad (30)$$

Поскольку J — диагональная матрица, (30) представляет векторную запись серии из m независимых задач Коши относительно компонент $w_i(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, m$, вектор-функции $\mathbf{W}(\tau)$. С учетом обозначений компонент w_i^k , z_i^k , e_i^k , $i = 1, 2, \dots, m$, векторов \mathbf{W}^k , \mathbf{Z}^k и $T^{-1}\bar{\mathbf{R}}^k$ соответственно имеем

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \sqrt{\lambda_i Q}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \tau_k < \tau \leq \tau_{k+1}, \quad \frac{d^2 w_i}{d\tau^2} + \kappa_i^2 w_i &= e_i^k, \quad w_i(\tau_k) = w_i^k, \quad \frac{dw_i}{d\tau}(\tau_k) = z_i^k. \end{aligned} \quad (31)$$

Из точного решения задач Коши (31) следуют выражения для компонент векторов \mathbf{W}^{k+1} и \mathbf{Z}^{k+1} :

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, m, \\ w_i^{k+1} &= \frac{e_i^k}{\kappa_i^2} + \left(w_i^k - \frac{e_i^k}{\kappa_i^2} \right) \cos(\Delta\kappa_i) + z_i^k \frac{\sin(\Delta\kappa_i)}{\kappa_i}, \\ z_i^{k+1} &= -\kappa_i \left(w_i^k - \frac{e_i^k}{\kappa_i^2} \right) \sin(\Delta\kappa_i) + z_i^k \cos(\Delta\kappa_i). \end{aligned}$$

Отсюда находим $\mathbf{Y}^{k+1} = T\mathbf{W}^{k+1}$, $\mathbf{V}^{k+1} = T\mathbf{Z}^{k+1}$ и т. д.

Приближенное описание собственных колебаний платформы в методе прямых дается задачей Коши для однородного векторного уравнения, которое следует из (27) при $\bar{q} = 0$:

$$\tau > \tau_{imp}, \quad \frac{d^2 \mathbf{Y}}{d\tau^2} + QA\mathbf{Y} = 0, \quad \mathbf{Y}(\tau_{imp}) = \mathbf{Y}^*, \quad \frac{d\mathbf{Y}}{d\tau}(\tau_{imp}) = \mathbf{V}^*. \quad (32)$$

Здесь векторы \mathbf{Y}^* и \mathbf{V}^* принадлежат решению задачи Коши (27) при $\tau = \tau_{imp}$. После преобразования $\mathbf{W}(\tau) = T^{-1}\mathbf{Y}(\tau)$ в (32) получим задачу Коши:

$$\begin{aligned} \tau > \tau_{imp}, \quad \frac{d^2 \mathbf{W}}{d\tau^2} + QJ\mathbf{W} &= 0, \\ \mathbf{W}(\tau_{imp}) = \mathbf{W}^* = T^{-1}\mathbf{Y}^*, \quad \frac{d\mathbf{W}}{d\tau}(\tau_{imp}) &= \mathbf{Z}^* = T^{-1}\mathbf{V}^*. \end{aligned}$$

При этом каждая из компонент $w_i(\tau)$ вектор-функции $\mathbf{W}(\tau)$ определяется по формуле

$$w_i(\tau) = w_i^* \cos(\kappa_i \tau - \kappa_i \tau_{imp}) + z_i^* \frac{\sin(\kappa_i \tau - \kappa_i \tau_{imp})}{\kappa_i},$$

где w_i^* и z_i^* , $i = 1, 2, \dots, m$, — компоненты векторов \mathbf{W}^* и \mathbf{Z}^* . Отсюда следует, что вектор-функция $\mathbf{Y}(\tau) = T\mathbf{W}(\tau)$ представляет собственные колебания платформы.

Заметим, что вычислительные затраты на разложение (28) матрицы A в связи с предлагаемым методом интегрирования оправданы тем, что это разложение, выполняемое один раз, в дальнейшем используется многократно при численном построении характеристик микрорезонатора.

3.4. Результаты вычислений

Приведем результаты численного анализа начально-краевой задачи (24), приближением которой в методе прямых является задача Коши (27). В итоге построенные при $\theta = 100$ графики, представляющие характеристики микрорезонатора (рис. 6), будут количественно близки к аналогичным графикам, полученным при исследовании математической модели микрорезонатора с нулевой массой пружины.

Напомним, что колебания платформы описываются графиком функции $y_c(\tau) = y(\tau, 1)$. При этом α — “безразмерная” амплитуда автоколебаний платформы, а α_0 — “безразмерная” амплитуда собственных колебаний.

Условие возникновения автоколебаний платформы имеет вид ограничений на безразмерные комбинации \bar{q} и α :

$$\bar{q} = \frac{\varepsilon_0 V^2 S l^3}{4D \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)^3} < 1.5, \quad \alpha = \frac{Ampl}{d + \frac{h}{\varepsilon}} < 0.5.$$

Связь между параметрами электростатического притяжения \bar{q} и амплитудой автоколебаний платформы (α) представлена на рис. 6, а. Как показала проверка, с большой точностью можно считать, что это график параболы

$$\bar{q} = 6\alpha(1 - \alpha), \quad 0 < \alpha < 0.5, \quad 0 < \bar{q} < 1.5. \quad (33)$$

После подстановки в (33) выражений безразмерных комбинаций \bar{q} и α получим искомую связь между параметрами в виде

$$\frac{\varepsilon_0 V^2 S l^3}{24D \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)^3} = \alpha(1 - \alpha), \quad \alpha = \frac{Ampl}{d + \frac{h}{\varepsilon}}. \quad (34)$$

С другой стороны, та же зависимость определяется формулой (17), полученной аналитически в случае $M = 0$. Из (17) имеем

$$\frac{\varepsilon_0 V^2 S}{G \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)^3} = \alpha(1 - \alpha), \quad G = \frac{24D}{l^3}. \quad (35)$$

Таким образом, формула (34), аппроксимирующая численно построенную зависимость $\bar{q} = \bar{q}(\alpha)$ при $\theta = 100$, повторяет с большой точностью связь между параметрами (35), которая имеет место в предельном случае $\theta = \infty$.

При выборе “безразмерной” длительности запуска $\tau_{imp} = \tau_0$ из условия (26) “безразмерная” амплитуда собственных колебаний α_0 практически равна двум “безразмерным” амплитудам автоколебаний α . Зависимость τ_0 от \bar{q} представлена на рис. 6, б.

На рис. 6 приведены примеры типичного поведения автоколебаний (ϑ) и собственных колебаний (z) при $\bar{q} = 1$, $\tau_0 = 1.042$ в сечениях поверхности $y(\tau, s)$ плоскостями $s = 0.25; 0.5; 0.75; 1$ (соответственно кривые 1–4). Описание колебаний платформы дает график функции $y(\tau, 1)$. Из него следует выполнение равенства $\alpha_0 = 2\alpha$ между “безразмерными” амплитудами колебаний платформы. Отметим, что в сечениях поверхности

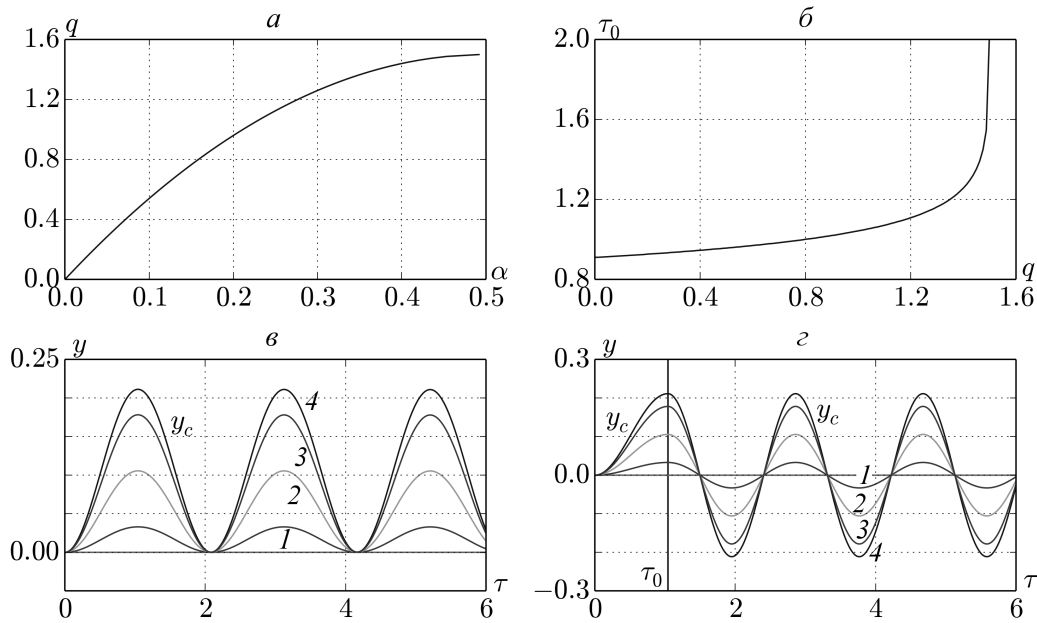


Рис. 6. Графики функций: $a - \bar{q}(\alpha)$ и $b - \tau_0(\bar{q})$; $c -$ автоколебания при $\tau > 0$; $d -$ автоколебания при $0 < \tau \leq \tau_0$ и собственные колебания при $\tau > \tau_0$

$y(\tau, s)$ колебания происходят почти синхронно, поэтому частота колебания платформы, наблюдаемая в сечении $s = 1$, вполне характеризует колебания пружины в целом.

Соотношение $\alpha_0 = 2\alpha$ между “безразмерными” амплитудами колебаний платформы с учетом (25), рассматриваемое совместно с формулой (34), устанавливает связь между параметрами запуска и амплитудой собственных колебаний платформы $Ampl_0$ в виде

$$\frac{\varepsilon_0 V^2 S l^3}{24D \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)^3} = \alpha(1 - \alpha), \quad \alpha = \frac{Ampl_0}{2 \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)}. \quad (36)$$

Практическое совпадение результатов численного анализа начально-краевой задачи (24) при $\theta = 100$ с предельным случаем $\theta = \infty$ означает, что предложенный численный метод позволяет находить характеристики микрорезонатора при всех имеющих физический смысл значениях параметра θ . Можно утверждать, что при $\theta > 100$ заведомо будет реализовываться предельный случай. Тем самым в определенном смысле решена проблема вычислительного свойства, возникающая при задании в начально-краевой задаче слишком больших значений θ .

3.5. Характеристики микрорезонатора в зависимости от θ

Формулы, полученные в предельном случае, могут быть использованы для приближенного описания характеристик микрорезонатора при $\theta < 100$. Основываясь на результатах вычислений, сделаем следующие выводы.

- При всех $\theta > 1$ в микрорезонаторе возникают автоколебания, если

$$\bar{q} = \frac{\varepsilon_0 V^2 S l^3}{4D \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)^3} < 1.5, \quad \alpha = \frac{Ampl}{d + \frac{h}{\varepsilon}} < 0.5.$$

• При всех $\theta > 1$ связь параметров запуска микрорезонатора и амплитуды автоколебаний следует из параболы, представленной на рис. 6, а:

$$\bar{q} = 6\alpha(1 - \alpha).$$

• Начиная со значения параметра $\theta = 10$, графики функции $\tau_0(\bar{q})$ (рис. 6, б), используемые для задания длительности запуска из условия (26), практически совпадают.

• При всех $\theta > 1$ и выполнении условия (26) амплитуда собственных колебаний платформы в два раза превышает амплитуду автоколебаний.

• Связь между параметрами запуска и амплитудой собственных колебаний при $\theta > 10$ и выполнении условия (26) определяется формулой (36).

• При всех $\theta > 1$ и выполнении условия (26) графики автоколебаний и собственных колебаний имеют вид, представленный на рис. 6, в и г.

4. Наименьшая частота собственных колебаний платформы

Важной характеристикой микрорезонатора является наименьшая частота собственных колебаний платформы [2]. Как уже отмечалось, особенностью возникающих при запуске микрорезонатора автоколебаний и их продолжением в виде собственных колебаний является почти синхронность колебаний в сечениях поверхности пружины (рис. 6, г). Это позволяет по собственным колебаниям платформы судить о колебаниях цилиндрической поверхности пружины в целом, ограничиваясь определением наименьшей собственной частоты. При этом период колебаний, соответствующий наименьшей собственной частоте, вполне согласуется с графическим представлением собственных колебаний.

Воспользуемся методом разделения переменных для поиска нетривиального решения $y(\tau, s)$ краевой задачи, которая следует из (24) при $\bar{q} = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq s \leq 1, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \theta \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}(\tau, 1) - \frac{\partial^3 y}{\partial s^3}(\tau, 1) = 0, \\ y(\tau, 0) = \frac{\partial y}{\partial s}(\tau, 0) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial s}(\tau, 1) = 0. \end{aligned}$$

Как известно [6], в этом случае $y(\tau, s)$ ищется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от τ , а другая — только от s :

$$y(\tau, s) = \Phi(\tau)X(s).$$

Здесь функция $\Phi(\tau)$ — решение уравнения

$$\frac{d\Phi}{d\tau^2} + \theta\gamma^2\Phi = 0, \tag{37}$$

а $X(s)$ — собственная функция краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^4 X}{ds^4} - \gamma^2 X = 0, \\ X(0) = \frac{dX}{ds}(0) = 0, \quad \frac{dX}{ds}(1) = 0, \quad \frac{d^3 X}{ds^3}(1) + \theta\gamma^2 X(1) = 0, \end{aligned} \tag{38}$$

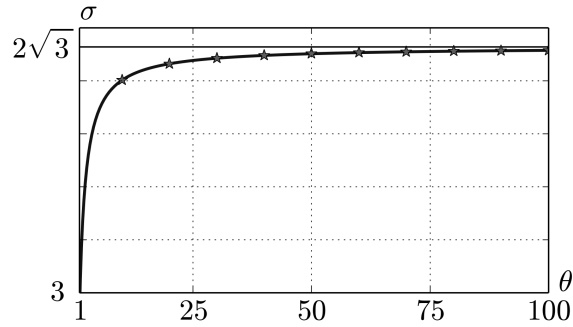


Рис. 7. График зависимости $\sigma(\theta)$; точки — значения σ , найденные в результате вычисления наименьшего собственного числа матрицы A в методе прямых

соответствующая собственному числу γ . Из (37) следует, что $\Phi(\tau)$ описывает гармонические колебания с частотой $\omega = \gamma\sqrt{\theta}$.

Трансцендентное уравнение для вычисления собственных чисел γ , при которых однородная краевая задача (38) имеет нетривиальное решение, имеет вид

$$\sqrt{\gamma} \frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{\gamma}) \cos(\sqrt{\gamma})}{\operatorname{ch}(\sqrt{\gamma}) \sin(\sqrt{\gamma}) + \operatorname{sh}(\sqrt{\gamma}) \cos(\sqrt{\gamma})} = \frac{1}{\theta}. \quad (39)$$

В соответствии с целями численного исследования мы не будем останавливаться на изучении свойств множества собственных чисел и собственных функций краевой задачи (38) в зависимости от параметра θ .

Обозначим через σ наименьшую “безразмерную” частоту гармонических колебаний, определяемую из (39):

$$\sigma = \gamma\sqrt{\theta}$$

График зависимости $\sigma(\theta)$ приведен на рис. 7. Здесь точками на графике обозначены значения σ , найденные в результате вычисления наименьшего собственного числа матрицы A в методе прямых, что свидетельствует о совпадении аналитического и численного способов определения σ .

Зависимость “размерной” наименьшей собственной частоты Ω от параметра θ с учетом временного масштаба (23) имеет вид

$$\Omega = \sigma(\theta) \sqrt{\frac{2D}{l^3 M_c}}.$$

Таким образом, график на рис. 7 позволяет оценить частоту Ω собственных колебаний платформы в зависимости от отношения масс платформы и пружины. Отметим, что $\sigma \rightarrow 2\sqrt{3}$ при $\theta \rightarrow \infty$. При этом предельное выражение Ω имеет вид

$$\Omega = \sqrt{\frac{24D}{l^3 M_c}},$$

что совпадает с формулой (21) для собственной частоты колебания платформы микрорезонатора, коэффициент жесткости пружины которого указан в (9).

5. Математические модели микрорезонатора с более сложной системой пружин

Применим полученные результаты к описанию работы микрорезонатора “платформа” с более сложной системой пружин, схема которых приведена на рис. 1. Примеры микрорезонаторов с системой пружин двух типов приведены на рис. 8. В качестве пружин используются упругие балки с жестко закрепленными концами.

Как было показано, формулы для характеристик микрорезонатора, полученные в предположении, что масса пружины много меньше массы платформы, дают приближенные выражения зависимостей между параметрами микрорезонатора с конечным отношением масс. Для использования этих формул достаточно знать коэффициент жесткости G пружины в уравнении (10) исходя из определения упругих сил (9) каждой из пружин.

Пример 1. На рис. 8, а представлена схема конструкции микрорезонатора с системой пружин, предложенная в работе [12]. Здесь 1 и 2 — пружины длины $2l$ и ширины l_0 каждая, которые прикреплены к платформе 3.

Приведем формулу для коэффициента жесткости G системы пружин в примере 1:

$$G = 2G_0, \quad G_0 = \frac{24D_0}{l^3},$$

где D_0 — цилиндрическая жесткость пружин ширины l_0 и толщины h_0 каждая:

$$D_0 = l_0 \frac{h_0^3 E}{12}.$$

Пример 2. Определим коэффициент жесткости системы пружин микрорезонатора, схема которого представлена на рис. 8, б. Здесь 1 — пружина длины $2r_1$ и ширины l_1 , 2 — пружина длины $2r_2$ и ширины l_2 , прикрепленные к платформе 3, как это указано на схеме.

Формула для коэффициента жесткости G системы пружин в примере 2 имеет вид

$$G = G_1 + G_2, \quad G_1 = \frac{24D_1}{r_1^3}, \quad G_2 = \frac{24D_2}{r_2^3},$$

где D_1 — цилиндрическая жесткость пружины 1 ширины l_1 и толщины h_1 ; D_2 — цилиндрическая жесткость пружины 2 ширины l_2 и толщины h_2 :

$$D_1 = l_1 \frac{h_1^3 E}{12}, \quad D_2 = l_2 \frac{h_2^3 E}{12}.$$

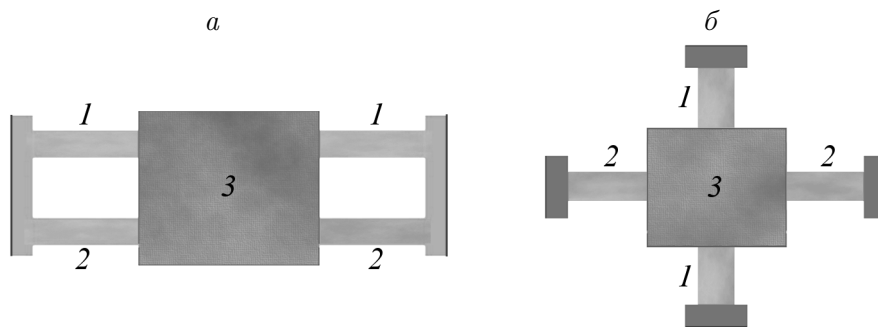


Рис. 8. Схемы конструкций микрорезонатора (вид сверху) с системой пружин а — в примере 1, б — в примере 2

В итоге, используя результаты детального исследования свойств решения задачи Коши (10), определяющей закон движения платформы, имеем описание основных характеристик микрорезонатора с рассматриваемыми системами пружин с коэффициентом жесткости G , вычисляемым по формулам, приведенным в примерах 1 и 2.

6. Математические модели микрорезонатора с использованием консольной балки и натянутой пленки в качестве пружины

Тем же методом были проведены исследования математической модели микрорезонатора, в котором платформа прикреплена к пружине в виде упругой консольной балки и натянутой пленки. Кратко остановимся на результатах исследования соответствующих начально-краевых задач. При этом сохраняются ранее принятые обозначения. Более подробное изложение приведено в [13].

6.1. Пружина — упругая балка консольного типа

Пусть функция $u(t, x)$, $t > 0$, $0 \leq x \leq l$, описывает цилиндрическую форму консоли с цилиндрической жесткостью D длины l и массы lM , используемой в качестве пружины. Левый конец консоли жестко закреплен. К правому свободному концу консоли прикреплена платформа, положение которой определяется значением $u_c(t) = u(t, l)$. В итоге совместная система уравнений, представляющая математическую модель микрорезонатора, имеет вид, аналогичный (5), (6):

$$\begin{aligned}
 t > 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= 0, \\
 u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, l) = 0, \quad u(t, l) = u_c(t), & \quad (40) \\
 u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, & \\
 M_c \frac{d^2 u_c}{dt^2} + F_c = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2 \left(d + \frac{h}{\varepsilon} - u_c \right)^2}, \quad u_c(0) = \frac{du_c}{dt}(0) = 0, & \quad (41)
 \end{aligned}$$

где упругая сила пружины

$$F_c = -D \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, l).$$

Рассмотрим микрорезонатор с нулевой массой пружины. В этом случае решением краевой задачи (40), где $M = 0$, является функция

$$u(t, x) = \frac{3x^2}{2l^3} \left(l - \frac{x}{3} \right) u_c(t).$$

(Это же выражение можно получить, используя рассуждения, аналогичные (7), (8).) При этом получаем выражение для упругой силы пружины:

$$F_c = -D \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, l) = G u_c(t), \quad G = \frac{3D}{l^3}. \quad (42)$$

Таким образом, задача Коши (41), моделирующая работу микрорезонатора, в котором платформа прикреплена к условной пружине с коэффициентом жесткости G , с учетом (42) принимает вид (10).

Численное исследование с использованием метода прямых начально-краевой задачи (40), (41) в зависимости от параметра θ , $\theta = M_c/lM$, указывает на соответствие характеристик микрорезонатора с нулевой массой пружины и характеристик резонатора с конечным отношением масс θ , ранее отмеченное в случае резонатора с пружиной типа упругая балка. Приведем краткое описание основных результатов с использованием характеристик (15)–(18), полученных при $M = 0$ для задачи Коши (10).

Характеристики микрорезонатора, определенные численно при $\theta = 100$, практически совпадают с характеристиками микрорезонатора с нулевой массой пружины (предельный случай). Формулы, полученные в предельном случае, могут быть использованы для приближенного описания характеристик микрорезонатора при всех значениях θ , меньших 100 и больших 1.

При всех $\theta > 1$ в микрорезонаторе возникают автоколебания, если

$$q = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2G \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)^3} < 0.125, \quad \alpha = \frac{Ampl}{d + \frac{h}{\varepsilon}} < 0.5, \quad G = \frac{3D}{l^3}. \quad (43)$$

При всех $\theta > 1$ связь параметров запуска микрорезонатора и амплитуды автоколебаний следует из равенства (17):

$$q = \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha),$$

где выражения безразмерных комбинаций q и α определены в (43).

Пусть длительность запуска T_{imp} задается моментом времени, при котором отклонение $u_c(T_{imp})$ автоколебаний становится максимальным. Тогда при всех $\theta > 1$ и указанном выборе длительности запуска амплитуда собственных колебаний платформы в два раза превышает амплитуду автоколебаний.

При $\theta > 1$ и указанном выборе длительности запуска связь между параметрами запуска и амплитудой собственных колебаний определяется формулой

$$\frac{\varepsilon_0 V^2 S}{G \left(h + \frac{h}{\varepsilon}\right)^3} = \alpha(1 - \alpha), \quad \alpha = \frac{Ampl_0}{2 \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)}.$$

При $\theta > 1$ и указанном выборе длительности запуска графики автоколебаний и собственных колебаний имеют вид, представленный на рис. 6, в и г.

6.2. Пружина — натянутая пленка

Пусть функция $u(t, x)$, $t > 0$, $0 \leq x \leq 2l$, описывает цилиндрическую форму натянутой с натяжением N пленки длины $2l$ и массы $2lM$ с закрепленными концами, используемой в качестве пружины. К середине пружины прикреплена платформа, положение которой определяется значением $u_c(t) = u(t, l)$. С учетом симметрии $u(t, x)$ относительно $x = l$ совместная система уравнений, представляющая математическую модель

микрорезонатора, имеет вид, аналогичный (5), (6):

$$\begin{aligned} t > 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = u_c(t), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, \\ M_c \frac{d^2 u_c}{dt^2} + F_c = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2 \left(d + \frac{h}{\varepsilon} - u_c \right)^2}, \quad u_c(0) = \frac{du_c}{dt}(0) = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

где упругая сила пружины

$$F_c = 2N \frac{\partial u}{\partial x}(t, l).$$

Если масса пружины равна нулю, то, как следует из (44),

$$u(t, x) = \frac{x}{l} u_c(t).$$

Отсюда

$$F_c = 2N \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = G u_c, \quad G = \frac{2N}{l}. \quad (46)$$

С учетом (46) задача Коши (45), принимая вид (10), моделирует работу микрорезонатора, в котором платформа прикреплена к условной пружине с коэффициентом жесткости G .

Краткое описание характеристик микрорезонатора с пружиной типа натянутая пленка повторяет изложение результатов предыдущего пункта с тем лишь отличием, что в рассматриваемом случае коэффициент жесткости G условной пружины определяется по формуле (46).

Заключение

В заключение приведем краткие комментарии по итогам математического моделирования работы микрорезонаторов типа платформа.

1. К основным результатам исследования относится определение областей параметров модели, при которых решение $u = u(t, x)$ рассматриваемых начально-краевых задач (5), (6), (40), (41) и (44), (45) описывает колебания пружины с цилиндрической поверхностью: автоколебания во время запуска, переходящие в собственные колебания по окончании запуска. В сечении поверхности $x = l$ функция $u_c(t) = u(t, l)$ описывает положение платформы. Как следует из формулировок начально-краевых задач, параметры модели образуют только две безразмерные комбинации q и θ . Комбинация q пропорциональна силе электростатического притяжения и, кроме того, связана с типом пружины (упругая балка с жестким закреплением концов, упругая балка-консоль, натянутая пленка), прикрепленной к платформе. Комбинацию θ образует отношение массы платформы M_c к массе пружины.

На основе вычислений, выполненных при различных значениях θ в области существования автоколебаний, построены графики функции $q(\alpha)$, которые при всех $\theta > 1$

оказались близкими к параболе:

$$q = \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha), \quad q = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2G \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)^3}, \quad \alpha = \frac{Ampl}{d + \frac{h}{\varepsilon}},$$

где α — нормированная амплитуда автоколебаний платформы; $G = 24D/l^3$ — пружина типа упругая балка; $G = 3D/l^3$ — пружина типа консоль; $G = 2N/l$ — пружина типа натянутая пленка. Автоколебания возникают, если $q < 0.125$. При этом $\alpha < 0.5$.

2. Отметим, что при численном исследовании начально-краевых задач выявилось неочевидное свойство цилиндрической поверхности $u = u(t, x)$. Как оказалось, колебания поверхности в сечениях $x = \text{const}$ происходят почти синхронно. Это позволяет иметь представление о частоте колебаний в сечениях по частоте колебаний платформы, которые описываются функцией $u_c(t) = u(t, l)$. Примеры графиков поверхности в сечениях в безразмерных величинах, $\theta = 100$, приведены на рис. 6.

3. Наименьшая частота собственных колебаний платформы Ω определялась методом разделения переменных применительно к однородным начально-краевым задачам (5), (6), (40), (41) и (44), (45), где $V = 0$. При $\theta > 25$ наименьшая собственная частота вполне определяется формулами $\Omega = \sqrt{24D/(l^3 M_c)}$ — пружина типа упругая балка, $\Omega = \sqrt{3D/(l^3 M_c)}$ — пружина типа консоль, $\Omega = \sqrt{2N/(l M_c)}$ — пружина типа натянутая пленка. При этом период колебаний платформы, соответствующий наименьшей собственной частоте, вполне согласуется с графическим представлением численного решения однородных начально-краевых задач.

4. Амплитуда собственных колебаний, зависящая от длительности T_{imp} запуска резонатора, определялась по следующему правилу. При запуске фиксировался один из моментов времени, при котором отклонение платформы от нуля было наибольшим, т. е. равным амплитуде автоколебаний. В этом случае амплитуда собственных колебаний приближенно равна двум амплитудам автоколебаний. При таком выборе T_{imp} значение амплитуды собственных колебаний в меньшей степени зависит от неточностей выбора T_{imp} .

5. Пусть α_0 — нормированная амплитуда собственных колебаний платформы: $\alpha_0 = 2\alpha$. Тогда функция $q(\alpha)$ с учетом выражений безразмерных комбинаций устанавливает связь между параметрами собственных колебаний и параметрами запуска.

6. Численно показано, что характеристики микрорезонатора с нулевой массой пружины могут использоваться как приближение характеристик микрорезонатора с достаточно большим, но реалистичным отношением масс θ . Предложенный численный метод позволяет сопоставлять приближенное и численные определения характеристик.

Рассматриваемые в данной работе начально-краевые задачи дают “идеализированное” описание колебаний в микрорезонаторе. Тем не менее результаты исследования могут быть полезны при технологических разработках прибора. Кроме того, они дают возможность сравнивать “идеальные” характеристики микрорезонатора и характеристики микрорезонатора, математическая модель которого дает более полное отображение физического процесса (например, учет “размазывания” прямоугольного импульса при запуске).

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность С. К. Годунову за поддержку и внимание к данной работе.

Список литературы / References

- [1] **Косцов Э.Г.** Состояние и перспективы микро- и нанoeлектромеханики // Автометрия. 2009. Т. 45, № 3. С. 3–52.
Kostsov, E.G. Status and prospects of micro- and nanoelectromechanics // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2009. Vol. 45, No. 3. P. 189–226.
- [2] **Гринберг Я.С., Пашкин Ю.А., Ильичев Е.В.** Наномеханические резонаторы // Успехи физ. наук. 2012. Т. 182, № 4. С. 407–436.
Greenberg, Ya.S., Pashkin, Yu.A., Il'ichev, E.V. Nanomechanical resonators // Physics-Uspokhi. 2012. Vol. 55, No. 4. P. 382–407.
- [3] **Косцов Э.Г., Фадеев С.И.** Новые микроэлектромеханические резонаторы для гигагерцовых частот // Автометрия. 2013. Т. 49, № 2. С. 115–122.
Kostsov, E.G., Fadeev, S.I. New microelectromechanical cavities for gigahertz frequencies // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2013. Vol. 49, No. 2. P. 204–210.
- [4] **Косцов Э.Г., Фадеев С.И.** О функционировании СВЧ микроэлектромеханического резонатора // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 4. С. 75–86.
Kostsov, E.G., Fadeev, S.I. On the functioning of a VHF microelectromechanical resonator // Sib. Zh. Ind. Mat. 2013. Vol. 16, No. 4. P. 75–86. (In Russ.)
- [5] **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
Lavrentiev, M.A., Shabat, B.V. Methods of the theory of functions of complex variable. Moscow: Nauka, 1987. 688 p. (In Russ.)
- [6] **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A. Equations of mathematical physics. N.Y.: Dover Publications, 2011. 800 p. (Translated by A.R.M. Robson and P. Basu; translation ed. by D.M. Brink.)
- [7] **Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.** Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
Andronov, A.A., Vitt, A.A., Khaykin, S.E. Theory of oscillations. N.Y.: Dover Publications, 2011. 864 p. (Translated from the Russian by F. Immirzi; translation ed. by prof. W. Fishwick.)
- [8] **Годунов С.К.** Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Краевые задачи. Новосибирск: НГУ, 1994. 264 с.
Godunov, S.K. Ordinary differential equations with constant coefficients. Boundary value problems. Novosibirsk: NSU, 1994. 264 p. (In Russ.)
- [9] Пленочная электромеханика / В.Л. Дятлов, В.В. Коняшкин, Б.С. Потапов, С.И. Фадеев. Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1991. 248 с.
Film electromechanics / V.L. Dyatlov, V.V. Konjashkin, B.S. Potapov, S.I. Fadeev. Novosibirsk: Nauka, Sib. otделение, 1991. 248 p. (In Russ.)
- [10] **Фадеев С.И., Когай В.В.** Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 2012. 278 с.
Fadeev, S.I., Kogai, V.V. Boundary value problems for systems of ordinary differential equations. Novosibirsk: NSU, 2012. 278 p. (In Russ.)
- [11] **Фадеев С.И., Косцов Э.Г., Пиманов Д.О.** Численное исследование математических моделей микроэлектромеханических резонаторов разного типа // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 4. С. 120–135.
Fadeev, S.I., Kostsov, E.G., Pimanov, D.O. Numerical study of mathematical models of microelectromechanical resonators of various types // J. of Applied and Industrial Mathematics. 2015. Vol. 9, No. 1. P. 47–60.

- [12] **Bhattacharya, A., Chakraborty Subha, Bhattacharyya, Т.К.** A top-down design methodology of MEMS varactor for RF applications based on a substrate-induced capacitive model // *Microsystem Technologies*. 2011. Vol. 17, No. 10–11. P. 1589–1598.
- [13] **Фадеев С.И., Косцов Э.Г., Пиманов Д.О.** Моделирование микроэлектромеханических СВЧ резонаторов типа платформа. Новосибирск, 2015. 38 с. (Препр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 296).
Fadeev, S.I., Kostsov, E.G., Pimanov, D.O. Modelling of microelectromechanical VHF resonators of the platform type. Novosibirsk, 2015. 38 p. (Preprint / RAS. Sib. Branch. Sobolev Institute of Mathematics; No. 296). (In Russ.)

Поступила в редакцию 16 сентября 2015 г.

Study of the mathematical model for a microelectromechanical resonator of the Platform type

FADEEV, STANISLAV I.^{1,3}, KOSTSOV, EDUARD G.², PIMANOV, DANIIL O.^{3,*}

¹Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

²Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

³Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russia

*Corresponding author: Pimanov, Daniil O., e-mail: pimanov-daniil@yandex.ru

The results of mathematical modelling of the microelectromechanical high frequency resonator of “Platform” type are presented. The resonator consists of a fixed electrode coated with dielectric film and movable electrode in the form of stiff (nondeformable) platform attached to an elastic beam with rigidly fixed ends. The mathematical model is represented by the formulations of nonlinear initial-boundary value problem describing the oscillations of the moveable electrode. The auto-oscillations originate during the start up under the influence of intensity of the electrostatical field between the movable and fixed electrodes in the micro-gap. At the end of the start up, auto-oscillations are transformed into natural oscillations. The conditions for initialisation of the oscillations are determined numerically. These conditions appear to be close to the case when the mass of the platform is much greater than the mass of the elastic element. Therefore we can obtain formulas in analytical form, describing the main characteristics of microresonator’s behavior with a good precision. Similar studies are carried out for the microresonators of “Platform” type with elastic elements in form of cantilever beam and strained film.

The article presents an example for calculation of the microresonator’s parameters. We have shown that the obtained values of parameters satisfy the current MEMS technology. The results can be useful in the technological design of the device.

Keywords: electrostatical attraction, cylindrical flexure of elastic beam, method of lines, auto-oscillations and natural oscillations, Green’s functions, natural frequency, Fourier method.

Received 16 September 2015