

Полностью неявный метод решения уравнений Навье — Стокса для расчета многофазных течений со свободной поверхностью

А. С. КОЗЕЛКОВ^{1,2}, Д. П. МЕЛЕШКИНА¹, А. А. КУРКИН^{2,*}, Н. В. ТАРАСОВА¹,
С. В. ЛАШКИН¹, В. В. КУРУЛИН¹

¹РФЯЦ Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

²Институт радиоэлектроники и информационных технологий НГТУ им. Р.Е. Алексева,
Нижний Новгород, Россия

*Контактный e-mail: aakurkin@gmail.com

Рассмотрен метод расчета многофазных течений со свободной поверхностью в односкоростном приближении на базе полностью неявной связи скорости и давления при решении системы уравнений Навье — Стокса. Связь уравнения неразрывности и уравнений сохранения количества движения осуществляется за счет неявных слагаемых градиента давления и массового потока. Представлены основные формулы дискретизации уравнений и вид коэффициентов, которые суммируются в общую связанную матрицу. Приведены основные шаги вычислительной процедуры. Верификация предложенного метода осуществляется на задачах, имеющих экспериментальные данные, таких как задача об обрушении плотины, гидравлический прыжок и падение параллелепипеда в воду.

Ключевые слова: многофазные течения, свободная поверхность, численное моделирование, уравнения Навье — Стокса.

Введение

Многофазные течения встречаются практически везде, где имеется жидкость. Это поверхностные волны, капли, струи, пузыри, пленки и т. д. Они играют огромную роль в природе и технике. Экспериментальное исследование подобного рода задач зачастую сопряжено со значительными трудностями и затратами, поэтому разработка эффективных численных методов и алгоритмов, способных достоверно описывать такие течения, является актуальной.

Среди многофазных течений особую сложность представляют течения со свободной поверхностью, например течения несмешивающихся жидкостей. Основная проблема при моделировании таких течений — отслеживание поверхности раздела на фиксированной расчетной сетке. Проблема усугубляется еще и тем, что необходимо получить новое качество моделирования фазовых переходов на границе раздела сред. Обзор текущего состояния, современных методов и алгоритмов по моделированию многофазных течений представлен в [1–3].

При разработке численных методов для описания многофазных течений возникает еще одна проблема, свойственная разработке численных методов моделирования однофазной динамики жидкости. Суть проблемы в следующем. Численное интегрирование полной системы уравнений Навье — Стокса при низких числах Маха сопряжено с известными трудностями [4–6]. Первая и наиболее важная из них состоит в “акустической жесткости” [6] (сильном различии величины собственных чисел матрицы системы) системы уравнений динамики сжимаемого газа при существенно дозвуковых скоростях потока. В этом случае скорость сходимости и устойчивость классических методов, первоначально разработанных для решения задач внешней сверхзвуковой аэродинамики, резко ухудшаются, а в предельном случае (“динамически несжимаемые течения” при числе Маха, стремящемся к нулю) вообще теряют работоспособность. В частности, для явных методов ограничение шага интегрирования по времени становится неприемлемо жестким. Неявные методы в линейном приближении являются “безусловно” устойчивыми, однако по мере уменьшения числа Маха область их реальной устойчивости существенно сокращается, а сходимость к стационарному решению резко замедляется [4].

Вторая трудность состоит в том, что для существенно дозвуковых течений характерны чрезвычайно малые относительные изменения давления, вследствие чего расчет градиентов давления содержит операцию вычисления малых разностей близких между собой абсолютных значений статического давления. При достаточно низких числах Маха это неизбежно приводит к потере точности, если для решения задачи применяются традиционные численные методы, использующие в качестве основной переменной плотность или абсолютное статическое давление.

Для преодоления обозначенных трудностей при построении численных схем используют:

- 1) вместо полных уравнений Навье — Стокса асимптотические модели для описания существенно дозвуковых течений (см. например, [7]);
- 2) специальные неявные итерационные алгоритмы, обладающие повышенной работоспособностью при расчете дозвуковых течений;
- 3) методы, основанные на регуляризации системы уравнений с помощью введения дополнительной (искусственной) сжимаемости путем модификации коэффициентов при производных по времени.

С вычислительной точки зрения методы первых двух классов более экономичны, но недостаточно универсальны по отношению к величине числа Маха потока. В частности, методы первого класса неприменимы для расчета течений, в которых существенно проявляется сжимаемость, а методы второго класса могут терять свою эффективность при расчете сверхзвуковых потоков [4]. Методы третьего класса для “гипозвуковых” потоков (число Маха стремится к нулю) менее экономичны, однако их преимуществом является возможность построения универсальных алгоритмов. Существенное их ограничение — расчет нестационарных течений, так как они предназначены для решения стационарных задач в рамках процедуры установления по времени.

Судя по накопленному опыту расчетов самых разнообразных течений, одним из наиболее универсальных методов является алгоритм SIMPLE [5, 8, 9], основанный на полунеявной схеме с расщеплением по физическим процессам и имеющий несколько модификаций. Наряду с возможностью обобщения этого метода на случай сильносжимаемых течений [8], его важное достоинство — эффективный способ неявной аппроксимации уравнений, позволяющий применять его при сколь угодно больших временах расчета. В многочисленных статьях и монографиях представлено его описание для рас-

чета несжимаемых и сжимаемых течений, многофазных течений, течений со свободной поверхностью, а также течений в пористых средах. Улучшение эффективности работы и сходимости алгоритма SIMPLE сводится к разработке модификаций, наиболее точно подстраивающих поля скорости и давления [9]. Однако, несмотря на то, что данные модификации и обладают улучшенными характеристиками сходимости по сравнению с классическим алгоритмом SIMPLE, эта сходимость существенным образом зависит от сложности моделируемого процесса и количества ячеек расчетной модели, в связи с чем все еще предпринимаются попытки разработать модификации, устраняющие этот недостаток. Одна из таких модификаций — совмещенный алгоритм расчета скоростей и давления, основанный на неявной связи уравнения сохранения импульса и неразрывности [10–12].

В настоящей работе совмещенный алгоритм расчета скоростей и давления, основанный на неявной связи уравнения сохранения импульса и неразрывности, обобщен на случай расчета многофазных течений со свободной поверхностью. При моделировании многофазных течений используется модель смеси [1–3], с помощью которой можно задавать произвольное число фаз, включая любую комбинацию жидких или газообразных сред. Для расчета течений со свободной поверхностью модель смеси дополняется уравнением переноса объемных долей для фаз смеси. В работе приводятся основные формулы дискретизации для уравнений модели методом конечных объемов, а также основные шаги вычислительной процедуры. Правильность реализации модели проверяется на серии численных экспериментов расчета задач об обрушении плотины, о падении параллелепипеда в воду и гидравлическом ударе.

1. Основные уравнения и их дискретизация

На первом этапе построения численной схемы будем рассматривать несжимаемые течения, которые состоят в общем случае из произвольного количества гетерогенных фаз, разделенных границей раздела. В рамках односкоростной модели смеси движение данной системы описывается консервативными уравнениями, включающими уравнения неразрывности, сохранения импульса и уравнение для объемных долей фаз, которые имеют следующий вид [12]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u} = -\nabla \sum_k (\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \sum_k (\alpha^{(k)} \mu^{(k)} \nabla \mathbf{u}) - \nabla p + \rho \mathbf{g}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \alpha^{(k)} \rho^{(k)} + \nabla (\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор общей скорости совокупности фаз k ; $\rho^{(k)}$ — плотность фазы k ; $\alpha^{(k)}$ — объемная доля фазы k и $\sum_k \alpha^{(k)} = 1$; p — давление; $\mu^{(k)}$ — молекулярная вязкость фазы k ; \mathbf{g} — ускорение свободного падения; t — время.

Уравнение неразрывности системы уравнений (1) записывается в форме дивергенции скорости. Это позволяет избавиться от проблемы разномасштабной плотности.

Дискретизация системы (1) может быть осуществлена любым известным способом [1, 2, 8]. Если при разработке численного метода ориентироваться на решение задач на произвольных неструктурированных сетках с ячейками произвольной формы, оптимальным выбором дискретизации является метод конечных объемов [8, 9].

Основная сложность при численном решении системы (1) заключается в определении связи поля давления с полем скорости. Процедура согласования поля давления с полем скорости должна приводить к одновременному удовлетворению уравнений неразрывности и сохранения импульса. Наиболее распространенными являются методы типа SIMPLE, основанные на процедуре коррекции давления или принципе расщепления неизвестных [2, 8].

Для получения SIMPLE-процедуры численного решения системы (1) опустим уравнение для объемных долей и массовые силы, рассмотрим ячейку P с гранями $f = nb(P)$ и запишем систему уравнений (1) в дискретном виде:

$$\begin{cases} \sum_{f=nb(P)} \mathbf{u}_f^n \cdot S_f \mathbf{n} = 0, \\ \sum_k \alpha^{(k)} \rho^{(k)} \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\tau} V = - \sum_{f=nb(P)} \sum_k \alpha^{(k)} \rho_f^{(k)} \mathbf{u}_f^{n-1} \mathbf{u}_f^n S_f + \\ + \sum_{f=nb(P)} \sum_k \alpha^{(k)} \mu_f^{(k)} \nabla \mathbf{u}_f^n S_f - \sum_{f=nb(P)} p_f^n S_f + \sum_k \alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{g} V, \end{cases} \quad (2)$$

где n — временной слой; τ — временной шаг; S_f — площадь грани f , разделяющей контрольные объемы расчетной сетки; \mathbf{u}_f — величина скорости на грани (здесь и далее индекс “ f ” означает принадлежность величины к грани); $nb(P)$ — количество граней ячейки (в данном случае ячейки P); V — объем; \mathbf{n} — единичная нормаль к грани.

В случае расчета многофазных течений с помощью алгоритма SIMPLE уравнение для переноса объемных долей решается для $(n-1)$ -й объемной доли $\alpha^{(n)} = 1 - \sum_{k \neq n} \alpha^{(k)}$ фаз k отдельно от уравнений неразрывности и сохранения импульса.

После дискретизации уравнения сохранения импульса системы (2) (нестационарного члена, конвективного и диффузионного потоков) получается система линейных алгебраических уравнений относительно значений скорости в центрах контрольных объемов:

$$A_P \mathbf{u}_p = \sum_{N=NB(P)} A_N \mathbf{u}_N + B_P - D_P A_P \nabla p_P. \quad (3)$$

Здесь коэффициенты A_P , A_N зависят от выбранной схемы дискретизации; B_P — правая часть уравнения; индексы P и N означают принадлежность величины к ячейкам P и N соответственно (далее также действует это правило); $N = NB(P)$ — множество соседних ячеек. Коэффициент D_P определяется выражением вида

$$D_P = \begin{pmatrix} \frac{V}{A_P^u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{V}{A_P^v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{A_P^w} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Из уравнения (3) можно выразить скорость в ячейке P введением оператора $H_P[\mathbf{u}]$ в следующем виде:

$$\mathbf{u}_p = \frac{\sum_{N=NB(P)} A_N \mathbf{u}_N + B_P}{A_P} - D_P \nabla p_P = H_P[\mathbf{u}] - D_P \nabla p_P. \quad (5)$$

На шаге предиктора вычисляется предварительное поле скорости \mathbf{u}^* из уравнения сохранения импульса, которое не удовлетворяет уравнению неразрывности, так как при вычислениях давление берется *явным* образом с предыдущего временного слоя:

$$\mathbf{u}_P^* = H_P [\mathbf{u}^*] - D_P \nabla p_P^{n-1}. \quad (6)$$

Для одновременного выполнения уравнения неразрывности и уравнения сохранения импульса необходима коррекция полей скорости \mathbf{u}' и давления p' :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^n = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^*, \\ p^n = p' + p^{n-1}. \end{cases} \quad (7)$$

Окончательное решение удовлетворяет следующему уравнению:

$$\mathbf{u}_P^n = H_P [\mathbf{u}^n] - D_P \nabla p_P^n. \quad (8)$$

Вычитая друг из друга уравнения (8) и (6), получаем уравнение для коррекции скорости:

$$\mathbf{u}'_P = H_P [\mathbf{u}'] - D_P \nabla p'_P. \quad (9)$$

Используя соотношение (9), подставляем уравнения (7), в уравнение неразрывности системы (2) и получаем

$$\sum_{f=nb(P)} (\mathbf{u}_f^* + \mathbf{u}'_f) S_f = \sum_{f=nb(P)} \mathbf{u}_f^* S_f + \sum_{f=nb(P)} H_P [\mathbf{u}'] S_f - \sum_{f=nb(P)} D_P \nabla p'_P S_f = 0. \quad (10)$$

С учетом допущений, принятых в методе SIMPLE [9] (пренебрегая оператором $H_P[\mathbf{u}']$), уравнение (10) запишем в виде

$$\sum_{f=nb(P)} \mathbf{u}_f^* S_f = \sum_{f=nb(P)} D_P \nabla p'_P S_f. \quad (11)$$

После решения уравнения (11) относительно приращения давления вычисляются новые поля давления и скорости и выполняется коррекция скорости. Это происходит итеративно до тех пор, пока поле скорости не будет с достаточной точностью удовлетворять уравнению неразрывности.

Изложенный алгоритм осуществляет связь скорости и давления *полунявно* за счет использования давления с предыдущего итерационного шага, что зачастую приводит к медленной сходимости решения [9]. Улучшение эффективности работы и сходимости алгоритма SIMPLE сводится к разработке модификаций, наиболее точно подстраивающих поля скорости и давления [9]. Одной из таких модификаций является совмещенный алгоритм расчета скоростей и давления [10]. Совмещение осуществляется за счет неявной дискретизации слагаемых градиента давления и массового потока в уравнениях сохранения импульса и неразрывности, что позволяет избежать шагов предиктора и корректора. Получаемые таким образом неявные коэффициенты суммируются в одну общую диагонально-доминантную матрицу, для работы с которой используются многосеточные методы [13, 14]. Далее алгоритм совмещенного решения применяется для дискретизации системы уравнений, описывающей многофазные течения.

Для получения совмещенного алгоритма решения системы (1) перепишем систему уравнений (2) в виде

$$\begin{cases} \sum_{f=nb(P)} \left\{ \overline{\mathbf{u}}_f^n + \overline{D}_f \left[\overline{\nabla p}_f^{n-1} - \nabla p_f^n \right] \right\} S_f = 0, \\ \sum_k \alpha^{(k)} \rho^{(k)} \frac{(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})}{\tau} V = - \sum_{f=nb(P)} \sum_k \alpha^{(k)} \rho_f^{(k)} \mathbf{u}_f^{n-1} \mathbf{u}_f^n S_f + \\ + \sum_{f=nb(P)} \sum_k \alpha^{(k)} \mu_f^{(k)} \nabla \mathbf{u}_f^n S_f - \sum_{f=nb(P)} p_f^n S_f + \sum_k \alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{g} V. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь “верхняя черта” означает, что величина на грани получена интерполяцией из соседних контрольных объемов. В уравнении неразрывности в системе (12) была использована поправка Рхи — Чоу [15], нивелирующая разницу приближений градиента давления в уравнениях неразрывности и сохранения импульса, а также связывающая поля скорости и давления при одновременном решении уравнений неразрывности и движения.

Для реализации полностью неявного алгоритма решения системы (12) удобно переписать ее в алгебраической форме:

$$\begin{cases} \sum_{j \in \{p, u, v, w\}} a_P^{pj} j_P + \sum_{N=NB(P)} \left[\sum_{j \in \{p, u, v, w\}} a_N^{pj} j_N \right] = b_P^p, \\ \sum_{j \in \{p, u, v, w\}} a_P^{ij} j_P + \sum_{N=NB(P)} \left[\sum_{j \in \{p, u, v, w\}} a_N^{ij} j_N \right] = b_P^i, \quad i = \{u, v, w\}. \end{cases} \quad (13)$$

Суммирование по индексу “ j ” для первого уравнения системы (13) — уравнения неразрывности — дает коэффициенты общей матрицы системы для вычисления давления в контрольных объемах дискретной модели. Неявная часть данных коэффициентов имеет вид

$$\begin{aligned} a_N^{pp} &= \frac{(\overline{D}_f S_f) S_f}{S_f d_{PN}}, \quad a_P^{pp} = - \sum_{N=nb(P)} a_N^{pp}, \quad a_N^{pu} = \lambda_f \rho_f S_f^x, \\ a_N^{pv} &= \lambda_f \rho_f S_f^y, \quad a_N^{pw} = \lambda_f \rho_f S_f^z, \quad a_P^{pu} = \sum_{f=nb(P)} [(1 - \lambda_f) \rho_f S_f^x], \\ a_P^{pv} &= \sum_{f=nb(P)} [(1 - \lambda_f) \rho_f S_f^y], \quad a_P^{pw} = \sum_{f=nb(P)} [(1 - \lambda_f) \rho_f S_f^z]. \end{aligned} \quad (14)$$

При записи явной части данных коэффициентов использовался алгоритм неортогональной коррекции [16] для возможности правильного расчета на произвольных неструктурированных сетках, а также применялась формула для вычисления давления на грани p_f с помощью линейной интерполяции по значениям в центрах ячеек [8]:

$$p_f = \lambda_f p_P + (1 - \lambda_f) p_N, \quad (15)$$

где λ_f — геометрический фактор.

Для первого уравнения системы (13) правая часть имеет вид

$$b_P^p = \sum_{f=nb(P)} \overline{D}_f \overline{\nabla p}_f S_f - \overline{D}_f \nabla p_f \left(S_f - \frac{S_f S_f}{S_f d_{PN}} d_{PN} \right), \quad (16)$$

где d_{PN} — расстояние между центрами соседних ячеек P и N .

Суммирование по индексу “ i ” для второго уравнения системы (13) — уравнения сохранения импульса — дает коэффициенты общей матрицы системы для вычисления компонент скорости:

$$a_N^{uu} = a_N^{vv} = a_N^{ww} = \sum_k \alpha_f^{(k)} \mu_f \frac{S_f S_f}{S_f d_{PN}} + \min(0, m_f), \quad (17)$$

где $m_f = \sum_k \alpha_f^{(k)} \rho_f^{(k)} u_f^{(n-1)} S_f$ — массовый поток на грани с предыдущей итерации.

Первое слагаемое в (17) относится к диффузионному слагаемому, второе слагаемое — это конвективная составляющая, которая аппроксимируется с помощью любой известной дифференциальной схемы, применимой на произвольных неструктурированных сетках [17–20]. При вычислении второго слагаемого в (17) используется противопотоковая схема (Upwind Differences — UD). Также при вычислениях используются противопотоковая схема с линейной интерполяцией (Linear Upwind Differences — LUD), схема QUICK, центрально-разностная схема (Central Differences — CD), схемы семейства NVD (Normalized Variable Diagram), все вышеперечисленные схемы — гибридные, смешанные с противопотоковой схемой для увеличения монотонности.

Дискретизация нестационарного слагаемого может быть осуществлена по одной из известных неявных схем [20] — схеме Эйлера или схеме Адамса—Бэшфорта. Вклад диффузионного и конвективного слагаемых уравнений сохранения импульса относится и к диагональным коэффициентам общей матрицы системы, которые с учетом нестационарного слагаемого, дискретизованного с помощью схемы Эйлера, будут иметь вид

$$\begin{aligned} a_P^{uu} &= - \sum_{N=NB(P)} a_N^{uu} + \sum_k \alpha_P^{(k)} \rho_P^{(k)} \frac{V}{\tau}, \\ a_P^{vv} &= - \sum_{N=NB(P)} a_N^{vv} + \sum_k \alpha_P^{(k)} \rho_P^{(k)} \frac{V}{\tau}, \\ a_P^{ww} &= - \sum_{N=NB(P)} a_N^{ww} + \sum_k \alpha_P^{(k)} \rho_P^{(k)} \frac{V}{\tau}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для второго уравнения системы (13) правая часть имеет вид

$$\begin{aligned} b_P^u &= \sum_{f=nb(P)} \left[\nabla u \mu_f \left(S_f - \frac{S_f S_f}{S_f d_{PN}} d_{PN} \right) \right] + \sum_k \alpha_P^{(k)} \rho_P^{(k)} u_P \frac{V}{\tau} + \sum_k \alpha^{(k)} \rho^{(k)} g_x V, \\ b_P^v &= \sum_{f=nb(P)} \left[\nabla v \mu_f \left(S_f - \frac{S_f S_f}{S_f d_{PN}} d_{PN} \right) \right] + \sum_k \alpha_P^{(k)} \rho_P^{(k)} v_P \frac{V}{\tau} + \sum_k \alpha^{(k)} \rho^{(k)} g_y V, \\ b_P^w &= \sum_{f=nb(P)} \left[\nabla w \mu_f \left(S_f - \frac{S_f S_f}{S_f d_{PN}} d_{PN} \right) \right] + \sum_k \alpha_P^{(k)} \rho_P^{(k)} w_P \frac{V}{\tau} + \sum_k \alpha^{(k)} \rho^{(k)} g_z V. \end{aligned} \quad (19)$$

Коэффициенты, относящиеся к силам давления, запишутся как

$$\begin{aligned} a_N^{up} &= (1 - \lambda_f) S_f^x, & a_N^{vp} &= (1 - \lambda_f) S_f^y, & a_N^{wp} &= (1 - \lambda_f) S_f^z, \\ a_P^{up} &= \sum_{f=nb(P)} \lambda_f S_f^x, & a_P^{vp} &= \sum_{f=nb(P)} \lambda_f S_f^y, & a_P^{wp} &= \sum_{f=nb(P)} \lambda_f S_f^z. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, совмещенная система линейных алгебраических уравнений полностью неявного алгоритма для моделирования многофазного потока имеет вид

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_P^{pp} & a_P^{pu} & a_P^{pv} & a_P^{pw} \\ a_P^{up} & a_P^{uu} & a_P^{uv} & a_P^{uw} \\ a_P^{vp} & a_P^{vu} & a_P^{vv} & a_P^{vw} \\ a_P^{wp} & a_P^{wu} & a_P^{wv} & a_P^{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_P \\ u_P \\ v_P \\ w_P \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{N=NB(P)} \begin{bmatrix} a_N^{pp} & a_N^{pu} & a_N^{pv} & a_N^{pw} \\ a_N^{up} & a_N^{uu} & a_N^{uv} & a_N^{uw} \\ a_N^{vp} & a_N^{vu} & a_N^{vv} & a_N^{vw} \\ a_N^{wp} & a_N^{wu} & a_N^{wv} & a_N^{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_N \\ u_N \\ v_N \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_P^p \\ b_P^u \\ b_P^v \\ b_P^w \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

Данная система записана для вычисления общей скорости и общего давления многофазного потока, однако она может быть обобщена и на случай расчета, где каждая фаза обладает своей скоростью и физическими свойствами, такими как сжимаемость и турбулентность. Эти обобщения будут проведены в следующих работах.

Для моделирования границ раздела фаз, после решения системы (21) для $(n - 1)$ -й объемной доли фаз решается уравнение переноса объемных долей, т. е. третье уравнение системы (1). Его дискретизация методом конечных объемов осуществляется по схеме, аналогичной той, что используется для уравнения сохранения импульса.

Для аппроксимации конвективного слагаемого уравнения переноса объемных долей используется схема M-CICSAM [21], относящаяся к классу сжимающих схем высокого разрешения и обеспечивающая сохранение минимально возможной толщины границы раздела сред, а также сохранение формы распределения объемных долей при параллельном переносе и вращении. Дискретизация нестационарного слагаемого также осуществляется по схемам Эйлера или Адамса — Бэшфорта.

В алгебраической форме данная система уравнений для k -й фазы записывается как

$$a_P^{(k)} \alpha_P^{(k)} + \sum_{N=NB(P)} a_N^{(k)} \alpha_N^{(k)} = b_P^{(k)}. \quad (22)$$

Коэффициенты матрицы неявного решения уравнения (22) имеют вид

$$\begin{aligned} a_N^{(k)} &= \min \left(0, u_f^{(n-1)} S_f \right), \quad a_P^{(k)} = - \sum_{N=NB(P)} a_N^{(k)} + \frac{V}{\tau}, \\ b_P^{(k)} &= -u_f^{(n-1)} S_f \left(\alpha_{MC}^{(k)} - \alpha_{UD}^{(k)} \right) + \frac{V}{\tau} \alpha_P^{(k),n-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\alpha_{MC}^{(k)}$ и $\alpha_{UD}^{(k)}$ — значение объемной доли на грани, найденной по схеме M-CICSAM и по противопоточной схеме соответственно; $\alpha_P^{(k),n-1}$ — значение объемной доли на предыдущем шаге по времени. Представленные слагаемые получены с помощью дискретизации методом отложенной коррекции [16].

Для численного решения итоговая система уравнений должна быть дополнена начальными и граничными условиями. На твердых стенках градиент давления и объемных долей равен нулю: $\partial p / \partial n = 0$, $\partial \alpha_k / \partial n = 0$, значение скорости равно нулю: $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. На входе задано фиксированное значение скорости и объемных долей, градиент давления равен нулю: $\partial p / \partial n = 0$. На выходе фиксируется статическое давление, градиенты скорости и объемных долей равны нулю: $\partial u / \partial n = 0$, $\partial v / \partial n = 0$, $\partial w / \partial n = 0$, $\partial \alpha_k / \partial n = 0$.

Дискретизация системы уравнений Навье — Стокса предложенным методом приводит к системе разностных уравнений вида (21), которая, как правило, является системой с плохо обусловленной матрицей [13, 14]. Число обусловленности может составлять 10^7 – 10^8 , а для некоторых течений приближается к 10^{10} , поэтому наиболее затратным этапом вычислительной процедуры является решение матрицы системы линейных алгебраических уравнений, которое при использовании классических итерационных методов занимает около 90 % вычислительного времени расчетного шага [14, 22]. При этом классические итерационные методы либо перестают работать, либо дают очень медленную скорость сходимости. Один из универсальных методов решения систем разностных уравнений — многосеточный метод [23, 24], основанный на использовании последовательности вложенных сеток и операторов перехода от одной сетки к другой. Различают алгебраический (Algebraic Multi-Grid — AMG) и геометрический (Full Approximation Storage — FAS) подходы [14, 25–28].

В алгебраическом подходе дискретные уравнения на последовательности вложенных сеток формируются без построения вложенных сеток, а в геометрическом — иерархия сеток создается при помощи слияния контрольных объемов подробной сетки (при этом отпадает необходимость хранения сеток различного уровня в виде отдельных файлов). В зависимости от топологии исходной сетки грубые сетки имеют ячейки нерегулярной формы с различным числом граней (несколько контрольных объемов подробной сетки объединяются в контрольный объем грубой сетки). Простота построения сеточных уровней приводит к простоте построения операторов ограничения и продолжения, что делает, на наш взгляд, алгебраический подход очень привлекательным с точки зрения численной реализации решения уравнений Навье — Стокса.

В многосеточном методе процесс решения начинается с самой грубой сетки. Решение, полученное на грубой сетке, интерполируется на подробную сетку и используется в качестве начального приближения в каком-либо итерационном процессе, что требует сравнительно небольшого числа итераций для достижения заданной точности. При этом учитывается свойство некоторых итерационных методов (например, метода Гаусса–Зейделя) сходиться с высокой скоростью на нескольких итерациях за счет быстрого подавления высокочастотных компонент Фурье начальной ошибки в разложении по базису из собственных векторов, замедляясь в дальнейшем [24]. Низкочастотные гармоники сходятся медленнее и составляют основную часть ошибки.

Многосеточный метод не является фиксированным методом, а представляет собой шаблон и сборную конструкцию, эффективность реализации которой зависит от адаптации ее компонентов к решаемой задаче.

Реализация представленного в настоящей работе неявного алгоритма расчета многофазных течений со свободной поверхностью на основе уравнений Навье — Стокса базируется именно на многосеточном методе. Такая реализация, как показано в работах [13, 14, 29, 30], позволяет существенно ускорить вычислительную процедуру. Современное состояние методов ускорения гидродинамических расчетов на основе многосеточного метода представлено в [14].

2. Результаты численных экспериментов

В данном разделе приведены результаты верификации представленной выше модели. Модель реализована в пакете программ ЛОГОС — российском программном продукте инженерного анализа, предназначенном для решения сопряженных трехмерных задач

конвективного теплопереноса, аэродинамики и гидродинамики на параллельных ЭВМ [14, 30–34]. Пакет программ ЛОГОС успешно прошел верификацию и показал достаточно хорошие результаты на серии различных гидродинамических задач, включая расчеты турбулентных и нестационарных течений [13, 14, 17–19, 29–34].

2.1. Обрушение плотины

В задаче рассматривалось падение столба жидкости внутри резервуара для двух постановок: с препятствием прямоугольного сечения, расположенным на дне резервуара (рис. 1, а), и без препятствия (рис. 1, б). Результаты экспериментальных исследований падения столба жидкости представлены в [35].

Для проведения численного моделирования были построены блочно-структурированные расчетные сетки. В первом случае для области с препятствием построена сетка, состоящая из 92 тысяч ячеек, где в горизонтальном направлении располагаются 400 ячеек, в вертикальном — 230. Во втором случае сетка состоит из 8400 ячеек, где в горизонтальном направлении располагаются 120 ячеек, в вертикальном — 70.

В расчетах использовалась схема второго порядка точности по времени Адамса — Бэшфорта. Для аппроксимации конвективных слагаемых в уравнении сохранения импульса использовалась противопотоковая схема, а для конвективных слагаемых в уравнении переноса объемных долей — схема M-CICSAM. Шаг по времени в расчетах составлял 0.001 с. На один шаг по времени приходилось не более 10 внутренних итераций.

На рис. 2, а и рис. 3, а в безразмерном виде приведены результаты численного моделирования для двух постановок. Сплошной черной линией показана граница раздела фаз (свободная поверхность) — вода и воздух для различных моментов времени, черными штрихами показаны векторы скорости. На рис. 2, б, и 3, б приведены результаты численного моделирования, полученные в работе [35] для двух постановок. На рис. 2, в и 3, в представлены фотографии свободной поверхности, полученные в эксперименте [35] для двух постановок.

Как видно на рис. 2, в момент времени $t = 0.2$ с передняя кромка водяного столба встречается с препятствием, формируя мощный всплеск вверх перед препятствием. Высота всплеска, форма образованной каверны хорошо согласуются как между расчетами, так и с экспериментом [35]. На момент времени $t = 0.3$ с всплеск достигает верхней границы расчетной области, но не доходит до правой стенки, что опять наблюдается как в обоих расчетах, так и в эксперименте. При этом изгиб образующейся поверхности

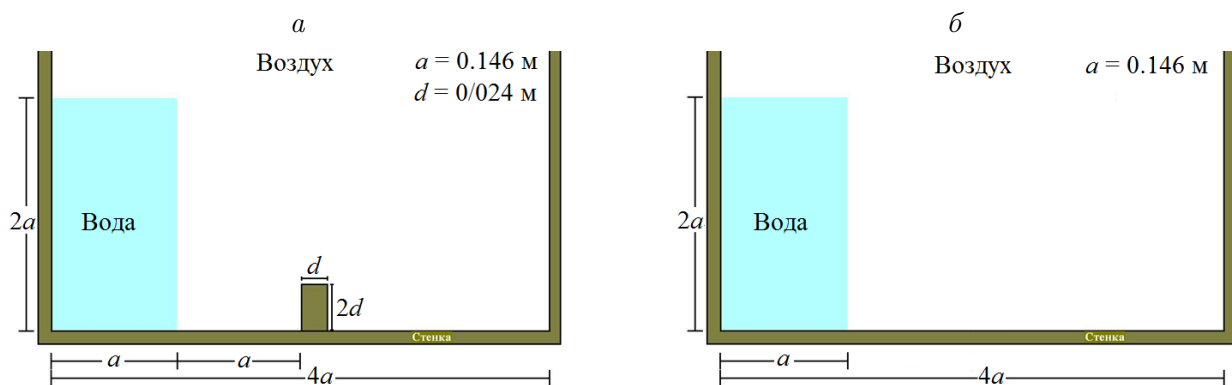


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

раздела воды и воздуха хорошо согласуется для обоих расчетных и экспериментального случаев. В момент времени $t = 0.4$ с образованная всплеском волна достигает правой границы модельной (экспериментальной) области, что также наблюдается и в эксперименте. Отчетливо видный на момент времени $t = 0.5$ с гидравлический удар об эту стенку порождает волну, форма и расположение которой совпадают для всех трех случаев.

На момент времени $t = 0.6$ с (см. рис. 2) приходится самая активная стадия обрушения волны. При этом расчетные результаты показывают образование воздушного

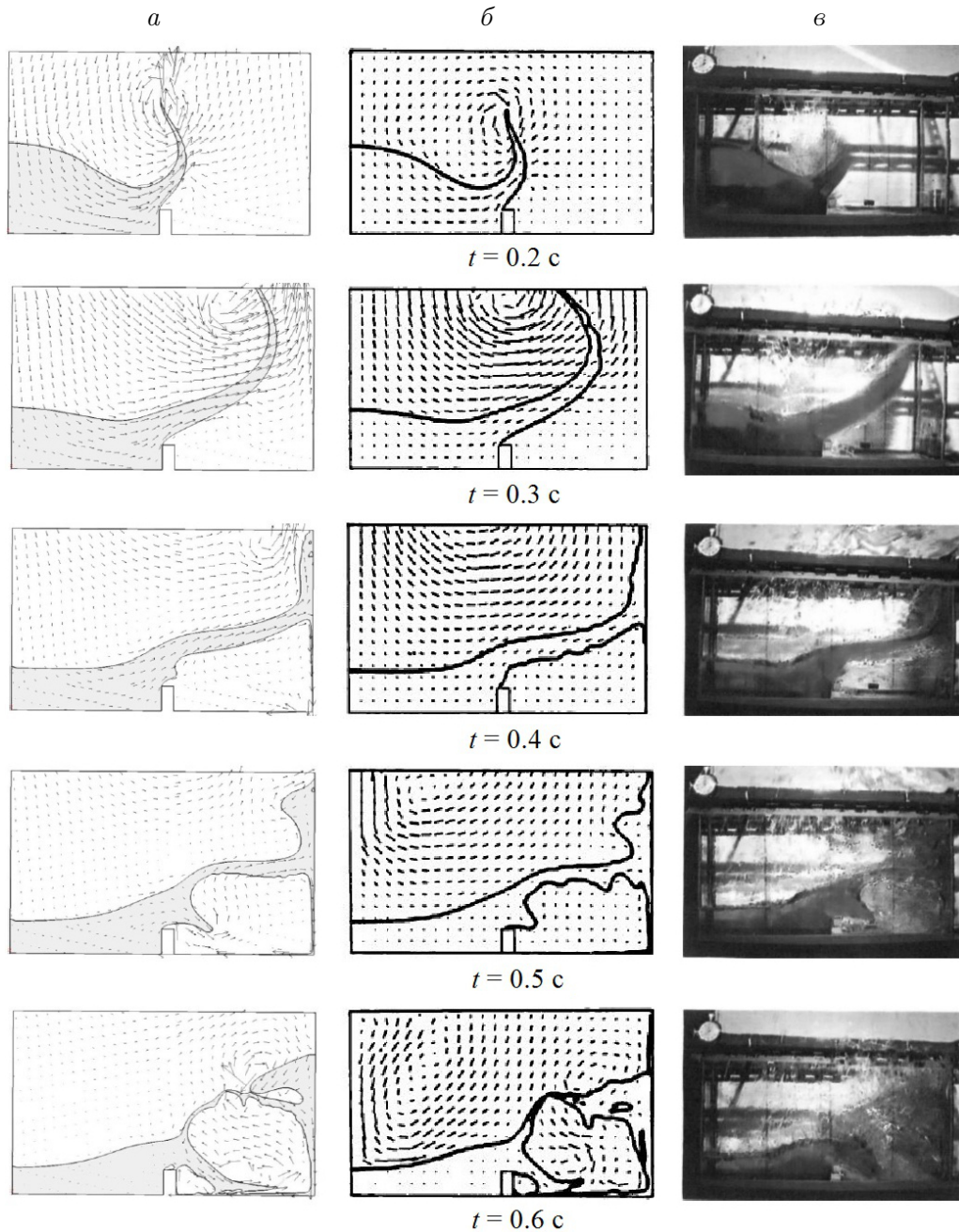


Рис. 2. Обрушение столба жидкости на дно резервуара с препятствием: *a* — результаты численного моделирования; *б* — результаты численного моделирования, полученные в [35]; *в* — экспериментальные данные

кармана около правой границы области, по форме примерно совпадающего для обоих расчетных случаев. Фотография эксперимента позволяет его идентифицировать.

На рис. 3 приведены результаты для второй постановки, где на дне резервуара отсутствует препятствие. Видно, что численные результаты как по нестационарным характеристикам (времени образования и обрушения волны), так и по форме свободной поверхности дают хорошее качественное согласие с экспериментом для двух постановок.

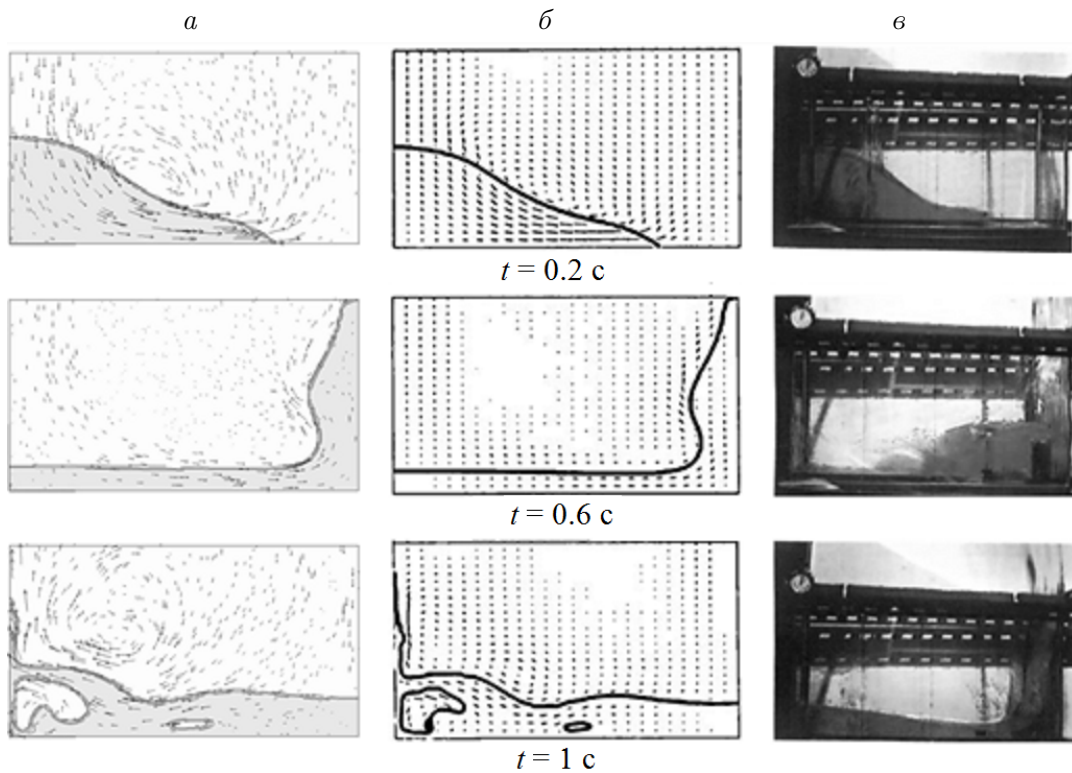


Рис. 3. Обрушение столба жидкости на дно резервуара без препятствия: *a* — результаты численного моделирования; *б* — результаты численного моделирования, полученные в [35]; *в* — экспериментальные данные

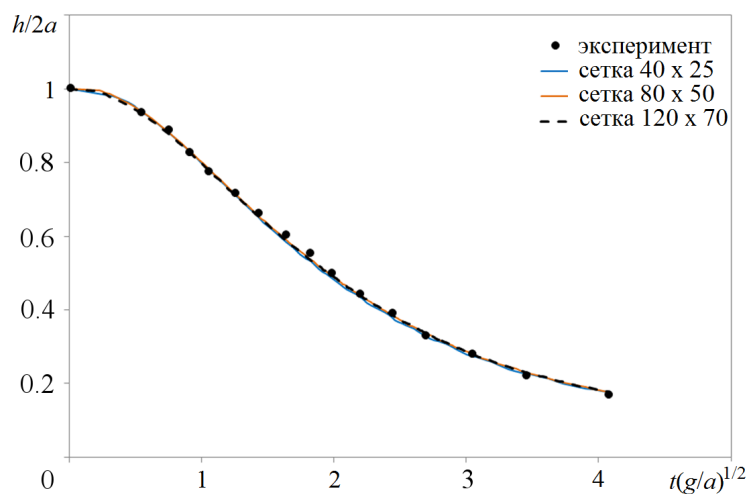


Рис. 4. Зависимость высоты обрушающегося столба жидкости от времени

Для второй постановки были проведены исследования на сходимость расчетного алгоритма на последовательности сгущающихся сеток, состоящих из 1000, 4000 и 8400 ячеек. На рис. 4 представлен график численной и экспериментальной зависимостей высоты свободной поверхности h от времени t . Как следует из рисунка, на двух более подробных сетках достигается лучшее по сравнению с грубой сеткой решение, которое сходится к эксперименту.

2.2. Задача о падении параллелепипеда в воду

Верификацию представленного алгоритма с помощью правильного описания распространения волн на свободной поверхности можно осуществить путем численного моделирования эксперимента, описанного в [36]. В этом эксперименте с высоты H вдоль торцевой стенки бассейна в воду свободно падает прямоугольный параллелепипед с высотой H_1 и длиной l . Прямоугольный бассейн с горизонтальным дном заполнен водой на высоту $h < H_1$. В натурном эксперименте длина бассейна составляла 4.3 м, а ширина — 0.2 м. В невозмущенном состоянии вода находится в состоянии покоя. Расчетная модель представлена на рис. 5.

В [36] рассматривается несколько вариантов проведения эксперимента, отличающихся друг от друга размерами тела, высотой, с которой оно падает, и глубиной воды. В безразмерной форме эти параметры выглядят так:

$$H_0 = H/h, \quad H_1^0 = H_1/h, \quad l_0 = l/h, \quad x_0 = x/h, \quad \rho_0 = (\rho_1 - \rho)/\rho,$$

где ρ_1, ρ — плотность тела и жидкости соответственно. Величины $h, H_0, H_1^0, l_0, \rho_0, x_0$ меняются в зависимости от постановки. В первом случае $h = 8$ см, $H_0 = 2.9$, $H_1^0 = 2.26$, $l_0 = 0.575$, $\rho_0 = 0.215$. На расстоянии $x_0 = 16$ установлен мареограф, фиксирующий колебания водной поверхности. Во втором случае $h = 4$ см, $H_0 = 4.75$, $H_1^0 = 4.5$, $l_0 = 1.15$, $\rho_0 = 0.215$, а мареограф установлен на расстоянии $x_0 = 31.5$.

Для моделирования падения параллелепипеда в воду была построена блочно-структурированная расчетная сетка, состоящая примерно из 1 млн ячеек в области с размерами $4.3 \times 0.4 \times 0.5$ м. В месте падения параллелепипеда и установки датчика сетка более мелкая. На левую, правую и нижнюю стенки дискретной модели накладывалось граничное условие прилипания потока, сверху фиксировалось статическое давление.

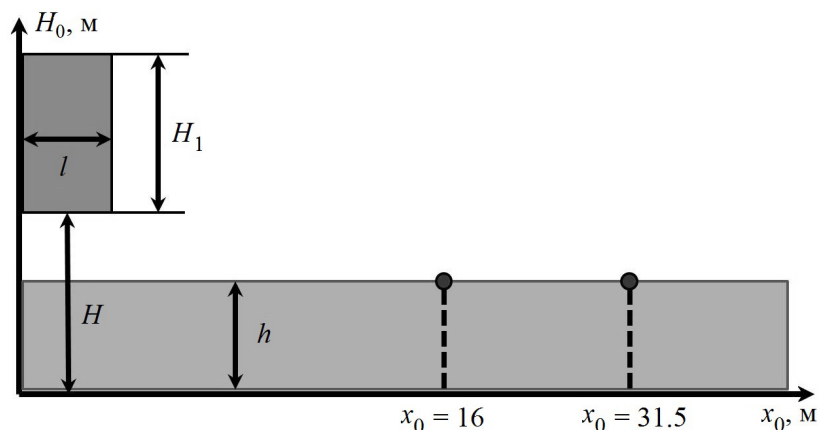


Рис. 5. Геометрия задачи

В расчетах использовалась схема второго порядка точности по времени, для конвективных слагаемых в уравнении сохранения импульса использовалась противопоточная схема, для конвективных слагаемых в уравнении переноса объемных долей — схема M-CICSAM. Шаг по времени составлял 0.001 с. На один шаг по времени приходилось не более 10 внутренних итераций.

На рис. 6 показано образование волн от падения параллелепипеда для первой постановки задачи. В момент времени $t = 0.25$ с наблюдается ранняя стадия развития каверны и брызговой струи. В момент времени $t = 0.3$ с струя продолжает развиваться. Через 0.1 с дно канала обнажилось, скорость формирования струи уменьшилась. В момент $t = 7.5$ с показана заключительная стадия схлопывания каверны и генерации брызговой струи. Следует отметить, что в работе [36] не указано, в какие моменты времени сделаны фотографии. Авторами настоящей статьи самостоятельно выбраны моменты времени для построения результатов численного моделирования.

На рис. 7 приведены зависимости амплитуды колебаний уровня воды в бассейне от времени для второй и третьей постановок задачи соответственно. Точками выделены

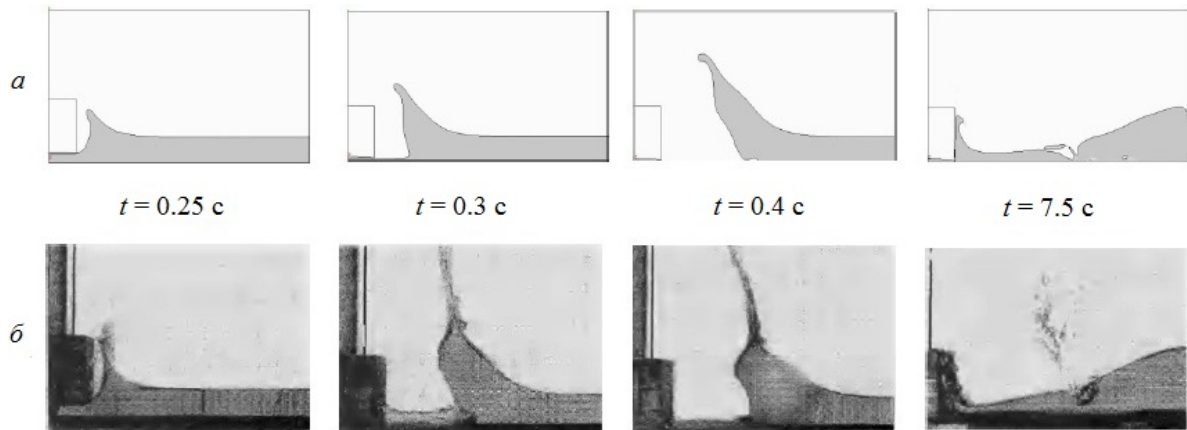


Рис. 6. Образование волн от падения параллелепипеда для первой постановки задачи: *a* — результаты численного моделирования на моменты времени 0.25, 0.3, 0.4 и 7.5 с; *б* — экспериментальные данные

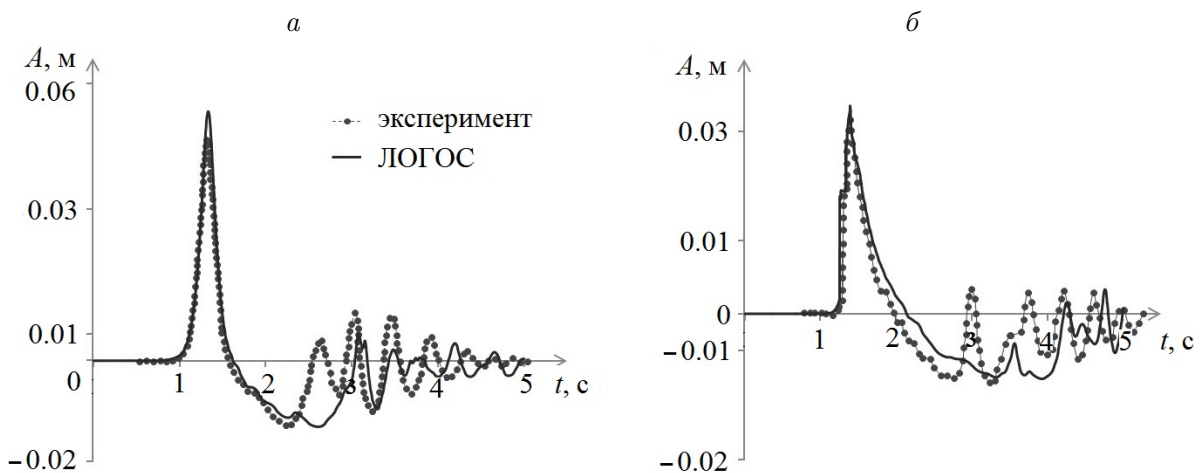


Рис. 7. Амплитуда колебаний уровня воды в бассейне для второй (*a*) и третьей (*б*) постановок задачи соответственно

на кривая, построенная на основе данных, записанных неподвижным волномером [36]. Сплошной линией показана амплитуда колебаний уровня воды, налитой в бассейн, полученных с помощью численного моделирования. Сравнение мареографных записей показывает хорошее совпадение для первой приходящей волны. Вычисленная амплитуда второй волны (“отрицательной”) также хорошо соответствует экспериментальным данным, однако наблюдается различие для дальнейших колебаний поверхности, которые имеют миллиметровую амплитуду. Это может быть связано как с качеством расчетной сетки, так и со способом записи численных данных в мареографной точке.

Чтобы оценить эффективность счета реализованного алгоритма, данная задача была протестирована на серии численных экспериментов на различном числе процессоров. Для этого использовался классический подход, подразумевающий вычисление времени счета задачи на одном процессоре и сравнение его со временем счета в многопроцессорном варианте.

Используя данный подход, ускорение параллельной реализации на p процессорах оцениваем по формуле

$$S_p = \frac{T_1}{T_p}, \quad (24)$$

где T_1 — это время выполнения расчета задачи на одном процессоре; T_p — время решения задачи на p процессорах.

Для оценки масштабируемости параллельного алгоритма использовано понятие расчетной эффективности:

$$E_p = \frac{S_p}{p} 100 \%. \quad (25)$$

Т а б л и ц а 1. Эффективность параллельной реализации

Количество MPI-процессов	Количество ячеек на один MPI-процесс	Время, с	S_p	E_p , %
1	1001000	6678.67816	1.00	100.00
2	500500	3503.72387	1.91	95.31
6	166833	1152.71065	5.79	96.56
12	83417	611.95098	10.91	90.95
24	41708	321.6888	20.76	86.51
48	20854	191.1625	34.94	72.79
72	13903	140.39359	47.57	66.07
96	10427	115.8801	57.63	60.04
112	8938	106.24062	62.86	56.13
128	7820	97.76454	68.31	53.37
144	6951	95.41685	69.99	48.61
160	6256	93.1783	71.68	44.80
176	5688	89.09855	74.96	42.59
192	5214	86.25327	77.43	40.33
208	4813	81.20086	82.25	39.54
240	4171	76.5454	87.25	36.35
272	3680	74.33824	89.84	33.03
336	2979	74.66373	89.45	26.62
368	2720	78.67625	84.89	23.07

Понятно, что в реальных расчетах из-за наличия межпроцессорных обменов эффективность $E_p = 100\%$ недостижима.

Результаты сравнения времени решения задачи на различном количестве MPI-процессов с параметрами ускорения и эффективности приведены в табл. 1. Как видно, эффективность счета не ниже 60% достигается при декомпозиции на 96 MPI-процессов. Несмотря на это, при плавном снижении эффективности ускорение продолжает расти и замедляется лишь при декомпозиции на 368 MPI-процессов, что говорит о качественном и продолжительном ускорении счета.

2.3. Задача о гидравлическом ударе

В данном тесте рассматривается задача о гидравлическом ударе, которая представляет собой движение горизонтального слоя жидкости со скоростью 1 м/с в ограниченной стенками области. В результате движения жидкости волна ударяется о противоположную стенку, обрушивается и возникает обратная волна. Параметры численной схемы приведены на рис. 8 [35, 37]. Длина и высота емкости составляют 12.5 и 4.0 м соответственно.

Для численного эксперимента построена блочно-структурированная сеточная модель, состоящая из 6 тысяч ячеек: в горизонтальном направлении располагаются 100 ячеек, в вертикальном — 60. На левую, правую и нижнюю стенки дискретной модели накладывалось граничное условие прилипания потока, сверху фиксировалось статическое давление.

В расчетах использовалась схема второго порядка точности по времени Адамса — Башфорта, для конвективных слагаемых в уравнении сохранения импульса использовалась противопотоковая схема, для конвективных слагаемых в уравнении переноса объемных долей — схема M-CICSAM. Шаг по времени составлял 0.001 с. Как и в предыдущих задачах, на один шаг по времени приходилось не более 10 внутренних итераций.

В табл. 2 приведены значения высоты h_0 (рис. 8), которой достигает вода в результате обрушения с учетом $g = 1$ и 0.4548 м/с^2 . Высота h_0 измерялась в тот момент времени,



Рис. 8. Параметры численной схемы

Т а б л и ц а 2. Значение высоты волны h_0 при обрушении, м

Ускорение свободного падения g , м/с ²	h_0 , м		Относительная погрешность, %
	[35]	Численное моделирование	
1	2.19	2.20	0.46
0.4548	2.9	2.9	0

когда волна, отразившись от правой стенки, достигала левой и поверхность жидкости за фронтом волны была примерно параллельна дну емкости. Была рассчитана относительная погрешность численных результатов. Видно хорошее количественное согласие численных и аналитических результатов.

На рис. 9 приведены результаты численного моделирования обрушения жидкости с помощью представленной в настоящей работе модели и опубликованные в [35]. Сплошной черной линией показана граница раздела фаз вода — воздух, черными штрихами показаны векторы скорости. В момент $t = 3.5$ с отраженная от правой стенки ударная волна начинает двигаться в обратном направлении. В момент $t = 4.9$ с фронт волны изгибается и начинает формироваться каверна. Затем в моменты времени $t = 7.94$ и 9.88 с отраженная волна, сформировав несколько каверн, достигает левой стенки.

В результате опрокидывания ударной волны в моменты времени 7.94 и 9.88 с образуется несколько подводных пузырей. Они наблюдаются как в [35], так и в расчетах. Из представленных результатов видно, что при численном моделировании форма свободной поверхности правильно описывает поведение движения волны и согласуется с экспериментом.

Так, на рис. 9 для результатов численного моделирования с помощью представленной в настоящей работе модели видно, что скорость газовой фазы в средней части канала существенно больше скорости жидкости в отличие от результатов работы [35].

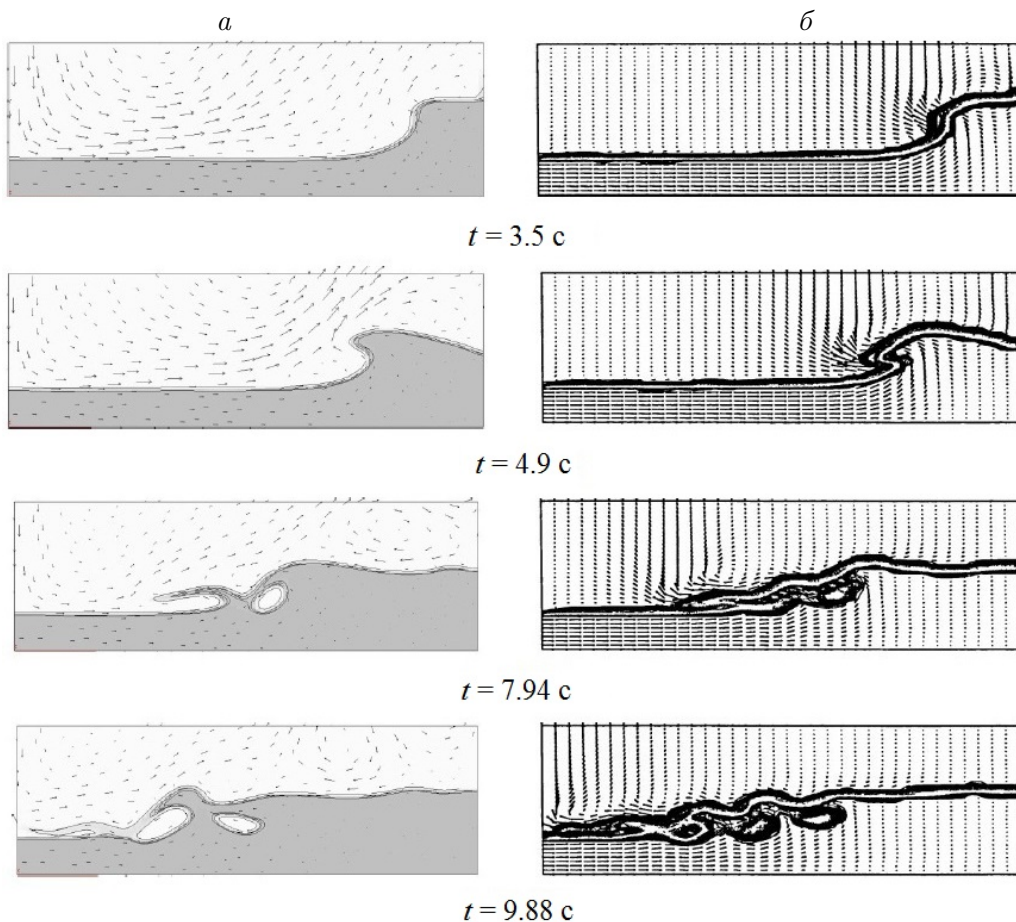


Рис. 9. Результаты для $g = 1$ на моменты времени 3.5 , 4.9 , 7.94 и 9.88 с: a — численное моделирование гидравлического удара; b — данные [35]

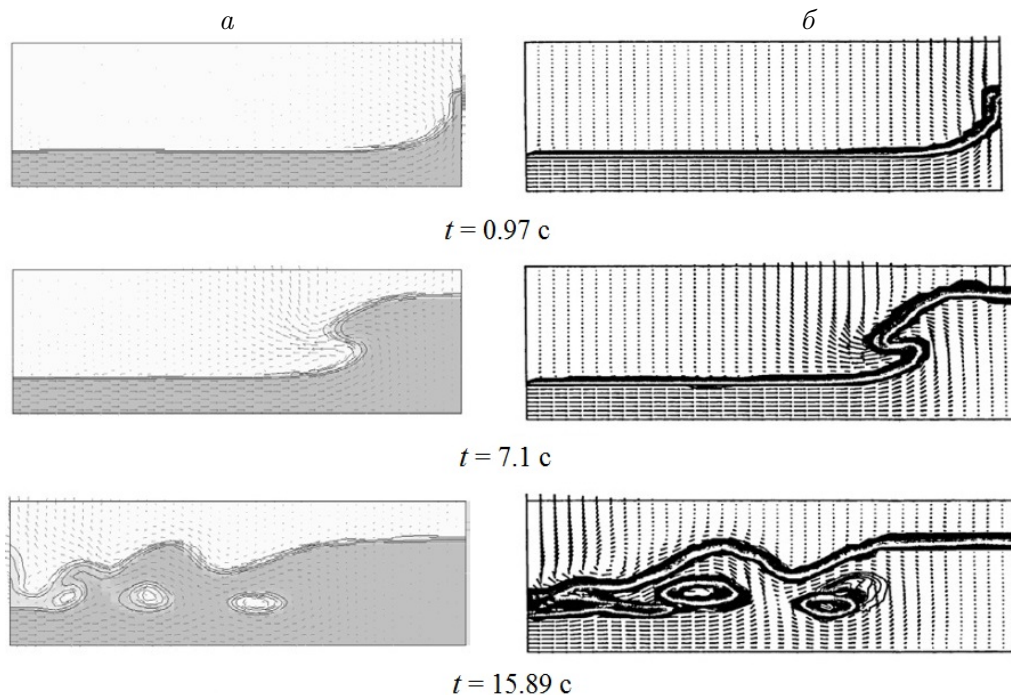


Рис. 10. Результаты для $g = 0.4548$ на моменты времени 0.97, 7.10 и 15.89 с: *a* — численное моделирование гидравлического удара; *б* — данные [35]

Это связано с заданным верхним граничным условием, где фиксировалось статическое давление. Такое граничное условие не препятствует образованию свободных вихрей, которые и заметны на рисунке.

Для этой задачи был также проведен расчет величины ускорения свободного падения $g = 0.4548$ м/с² (рис. 10). Высота волны на противоположной стенке также с хорошей точностью соответствует экспериментальным данным (табл. 2).

Форма свободной поверхности, полученная при численном моделировании для разных моментов времени, дает хорошее согласие с экспериментом.

Заключение

Представлен метод моделирования многофазных течений со свободной поверхностью, основанный на полностью неявной схеме. Метод заключается в совместном решении уравнений сохранения импульса и неразрывности. Для моделирования многофазных течений используется модель смеси, позволяющая задавать произвольное число фаз, включая любую комбинацию жидких, твердых или газообразных сред. Свободная поверхность описывается дополнительным уравнением переноса объемных долей для фаз смеси, которое также решается в полностью неявной постановке.

В работе представлены основные формулы дискретизации уравнений модели с использованием метода конечных объемов и основные шаги вычислительной процедуры. Верификация метода осуществляется на серии вычислительных экспериментов для задач, имеющих экспериментальные данные. Верификация показала хорошие результаты для всей серии тестов. Отметим, что представленный метод уже использовался для численного моделирования цунами космогенного и оползневоего происхождения [32–34].

Благодарности. Представленные результаты получены в рамках выполнения базовой части государственного задания № 2014/133 (“Организация проведения научных исследований” и проект № 2820), при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-6637.2016.5) и РФФИ (грант № 16-01-00267).

Список литературы / References

- [1] **Леонов А.А., Чуданов В.В., Аксенова А.Е.** Методы прямого численного моделирования в двухфазных средах. М.: Наука, 2013. 197 с.
Leonov, A.A., Chudanov, V.V., Aksenova, A.E. Methods of direct numerical simulation in two-phase media. Moscow: Nauka, 2013. 197 p.
- [2] **Волков К.Н., Емельянов В.Н.** Течения газа с частицами. М.: Физматлит, 2008. 600 с.
Volkov, K.N., Emelyanov, V.N. Flows of gas with particles. Moscow: Fizmatlit, 2008. 600 p. (In Russ.)
- [3] **Kolev, N.I.** Multiphase flow dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 751 p.
- [4] **Стрелец М.Х., Шур М.Л.** Метод масштабирования сжимаемости для стационарных течений вязкого газа при произвольных числах Маха // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1988. Т. 28, № 2. С. 254–266.
Strelets, M.Kh., Shur, M.L. Methods of scaling the compressibility in calculating stationary flows of a viscous gas at arbitrary Mach numbers // USSR Comput. Mathematics and Math. Physics. 1988. Vol. 28, No. 1. P. 165–173.
- [5] **Тарасова Н.В., Козелков А.С., Мелешкина Д.П., Лашкин С.В., Денисова О.В., Сизова М.А.** Особенности применения алгоритма SIMPLE для расчета сжимаемых течений // Вопр. атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2015. Вып. 3. С. 20–34.
Tarasova, N.V., Kozelkov, A.S., Meleshkina, D.P., Lashkin, S.V., Denisova, O.V., Sizova, M.A. Specifics of the simple algorithm application for the calculation of incompressible flows // Voprosy Atomnoy Nauki i Tekhniki. Ser. Math. Modelling of Phys. Processes. 2015. Iss. 3. P. 20–34. (In Russ.)
- [6] **Turkel, E.** Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations // J. of Comput. Physics. 1987. Vol. 72, No. 2. P. 277–298.
- [7] **Najm, H.N., Knio, O.M.** Modelling low Mach number reacting flow with detailed chemistry and transport // J. of Sci. Comput. 2005. Vol. 25, No. 1-2. P. 263–287.
- [8] **Ferziger, J.H., Peric, M.** Computational methods fluid dynamics. Berlin: Springer, 2001. 423 p.
- [9] **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. 1056 p.
Fletcher, C.A.J. Computational techniques for fluid dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 893 p.
- [10] **Chen, Z.J., Przekwas, A.J.** A coupled pressure-based computational method for incompressible/compressible flows // J. of Comput. Physics. 2010. Vol. 229. P. 9150–9165.
- [11] **Darwish, M., Sraj, I., Moukalled, F.** A coupled finite volume solver for the solution of incompressible flows on unstructured grids // J. of Comput. Physics. 2009. Vol. 228. P. 180–201.
- [12] **Moukalled, F., Darwish, M.** Pressure-based algorithms for multifluid flow at all speeds. Part I: Mass conservation formulation // Numerical Heat Transfer. Part B: Fundamentals. 2004. Vol. 45, No. 6. P. 495–522.

- [13] **Козелков А.С., Дерюгин Ю.Н., Лашкин С.В., Силаев Д.П., Симонов П.Г., Тятюшкина, Е.С.** Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использованием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС // *Вопр. атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов.* 2013. Вып. 4. С. 44–56.
Kozelkov, A.S., Deryugin, Yu.N., Lashkin, S.V., Silaev, D.P., Simonov, P.G., Tyatyushkina, E.S. Implementation in LOGOS software of a computational scheme for a viscous incompressible fluid using the multigrid method based on algorithm SIMPLE // *Voprosy Atomnoy Nauki i Tekhniki. Ser. Math. Modelling of Phys. Processes.* 2013. Iss. 4. P. 44–56. (In Russ.)
- [14] **Козелков А.С., Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г.** Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2013. 536 с.
Kozelkov, A.V., Volkov, K.N., Deryugin, Yu.N., Emelyanov, V.N., Karpenko, A.G. The acceleration of gas dynamic calculations on unstructured grids. M.: Fizmatlit, 2013. 536 p. (In Russ.)
- [15] **Rhie, C.M., Chow, W.L.** A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation // *AIAA.* 1983. Vol. 21. P. 1525–1532.
- [16] **Jasak, H.** Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows: PhD Thesis Department of Mechanical Engineering. London, Imperial College of Science, 1996. 394 p.
- [17] **Козелков А.С., Шагалиев Р.М., Дмитриев С.М., Куркин А.А., Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Пелиновский Е.Н., Легчанов М.А.** Математические модели и алгоритмы для численного моделирования задач гидродинамики и аэродинамики: Учеб. пособие. Н. Новгород: НГТУ, 2014. 166 с.
Kozelkov, A.S., Shagaliev, R.M., Dmitriev, S.M., Kurkin, A.A., Volkov, K.N., Deryugin, Yu.N., Emelyanov, V.N., Pelinovsky, E.N., Legchanov, M.A. Mathematical models and algorithms for numerical modeling of hydrodynamics and aerodynamics: Ucheb. posobie. Nizhniy Novgorod: NGTU, 2014. 166 p. (In Russ.)
- [18] **Козелков А.С., Курулин В.В., Тятюшкина Е.С., Пучкова О.Л.** Моделирование турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости на неструктурированных сетках с использованием модели отсоединенных вихрей // *Матем. моделирование.* 2014. Т. 26, № 8. С. 81–96.
Kozelkov, A.S., Kurulin, V.V., Tyatyushkina, E.S., Puchkov, O.L. Application of the detached eddy simulation model for viscous incompressible turbulent flow simulations on unstructured grids // *Matematicheskoe Modelirovanie.* 2014. Vol. 26, No. 8. P. 81–96. (In Russ.)
- [19] **Козелков А.С., Курулин В.В.** Численная схема для моделирования турбулентных течений несжимаемой жидкости с использованием вихреразрешающих подходов // *Журн. вычисл. математики и матем. физики.* 2015. Т. 55, № 7. С. 1255–1265.
Kozelkov, A.S., Kurulin, V.V. Eddy-resolving numerical scheme for simulation of turbulent incompressible flows // *USSR Comput. Mathematics and Math. Physics.* 2015. Vol. 55, No. 7. P. 1232–1241.
- [20] **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
Roache, P.J. Computational fluid dynamics. Hermosa: Albuquerque, 1982. 446 p.
- [21] **Waclawczyk, T., Koronowicz, T.** Remarks on prediction of wave drag using VOF method with interface capturing approach // *Archives of Civil and Mechanical Engineering.* 2008. Vol. 8. P. 5–14.

- [22] **Бахвалов Н.С.** О сходимости одного релаксационного метода для эллиптического оператора с естественными ограничениями // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1966. Т. 6, № 5. С. 861–883.
Bakhvalov, N.S. On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator // USSR Comput. Mathematics and Math. Physics. 1966. Vol. 6, No. 5. P. 101–135.
- [23] **Федоренко Р.П.** Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1961. Т. 1, № 5. С. 922–926.
Fedorenko, R.P. A relaxation method for solving elliptic difference equations // USSR Comput. Mathematics and Math. Physics. 1961. Т. 1, No. 5. P. 1092–1096.
- [24] **Петров И.Б., Лобанов А.И.** Лекции по вычисл. математике: Учеб. пособие. М.: БИНОМ, 2006. 523 с.
Petrov, I.B., Lobanov, A.I. Lectures on computational mathematics: Tutorial. M.: BINOM, 2006. 523 p. (In Russ.)
- [25] **Saad, Y.** Iterative methods for sparse linear systems. Minneapolis: SIAM, 2003. 528 p.
- [26] **Brandt, A.** Guide to multigrid development / Eds. Dold A., Eckmann B. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag. 1982. P. 220–312.
- [27] **Stuben, K., Trottenberg, U.** Multigrid methods: fundamental algorithms, model problem analysis and applications. Berlin: Springer. 1982. 176 p.
- [28] **Vanek, P., Mandel, J., Brezina, M.** Algebraic multigrid based on smoothed aggregation for second and fourth order problems // Computing. 1996. Vol. 56, iss. 3. P. 179–196.
- [29] **Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В.** Алгебраический метод в задачах вычислительной физики // Вычисл. методы и программирование. 2014. Т. 15, № 2. С. 183–200.
Volkov, K.N., Deriugin, Yu.N., Emelyanov, V.N., Kozelkov, A.S., Teterina, I.V. An algebraic multigrid method in problems of computational // Numerical Methods and Programming. 2014. Vol. 15, No. 2. P. 183–200. (In Russ.)
- [30] **Козелков А.С., Лашкин С.В., Ялозо А.В.** Исследование потенциала суперкомпьютеров для масштабируемого численного моделирования задач гидродинамики в промышленных приложениях // Сб. докл. XI Всерос. съезда по фундамент. пробл. теор. и прикл. механики, Казань. 2015. С. 1853–1855.
Kozelkov, A.S., Lashkin, S.V., Yalozo, A.V. The research of the supercomputers potential for scalable numerical simulation of problems of hydrodynamics in industrial applications // Proc. of the XI All-russian Congress on Fundamental Problems of the Theoretical and Applied Mechanics, Kazan. 2015. P. 1853–1855. (In Russ.)
- [31] **Козелков А.С., Курулин В.В., Пучкова О.Л., Лашкин С.В.** Моделирование турбулентных течений с использованием алгебраической модели рейнольдсовых напряжений с универсальными пристеночными функциями // Вычисл. механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 1. С. 40–51.
Kozelkov, A.S., Kurulin, V.V., Puchkova, O.L., Lashkin, S.V. Simulation of turbulent flows using an algebraic Reynolds stress model with universal wall functions // Comput. Continuum Mechanics. 2014. Vol. 7, No. 1. P. 40–51. (In Russ.)
- [32] **Козелков А.С., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.** Влияние угла входа тела в воду на высоты генерируемых волн // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 166–176.
Kozelkov, A.S., Kurkin, A. A., Pelinovskii, E.N. Effect of the angle of water entry of a body on the generated wave heights // Fluid Dynamics. 2016. Vol. 51, No. 2. P. 288–289.

- [33] **Козелков А.С., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Курулин В.В., Тятюшкина Е.С.** Моделирование возмущений в озере Чебаркуль при падении метеорита в 2013 году // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 6. С. 134–143.
Kozelkov, A.S., Kurkin, A.A., Pelinovskii, E.N., Kurulin, V.V., Tyatyushkina, E.S. Modelling the disturbances in the lake Chebarkul caused by the fall of the meteorite in 2013 // Fluid Dynamics. 2015. Vol. 50, No. 6. P. 828–840.
- [34] **Козелков А.С.** Методика численного моделирования цунами оползневого типа на основе уравнений Навье — Стокса // Вычисл. механика сплошных сред. 2016. Т. 9, № 2. С. 218–236.
Kozelkov, A.S. Methods of numerical modelling of landslide type tsunami on the basis of the Navier — Stokes equations // Comput. Continuum Mechanics. 2016. Vol. 9, No. 2. P. 218–236. (In Russ.)
- [35] **Ubbink, O.** Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces. London: Imperial College of Science, Technology and Medicine. 1997. 193 p.
- [36] **Букреев В.И., Гусев А.В.** Гравитационные волны при падении тела на мелкую воду // Прикл. механика и техн. физика. 1996. Т. 37, № 2. С. 224–231.
Boukreev, V.I., Gusev, A.V. Gravity waves generated by a body falling onto shallow water // J. of Appl. Mechanics and Techn. Physics. 1996. Vol. 37, No. 2. P. 224–231. (In Russ.)
- [37] **Hirt, C.W., Nichols, B.D.** Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Comput. Physics. 1981. Vol. 39. P. 201–225.

*Поступила в редакцию 24 декабря 2015 г.,
с доработки — 20 мая 2016 г.*

Fully implicit method for solution of Navier — Stokes equations for simulation of multiphase flows with free surface

KOZELKOV, ANDREY S.^{1,2}, MELESHKINA, DARIYA P.¹, KURKIN, ANDREY A.^{2,*}, TARASOVA, NATALIYA V.¹, LASHKIN, SERGEY V.¹, KURULIN, VADIM V.¹

¹Russian Federal Nuclear Center. All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Nizhny Novgorod region, Sarov, 607189, Russia

²Institute of Radio Electronics and Information Technology NNSTU, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

*Corresponding author: Kurkin, Andrey A., e-mail: aakurkin@gmail.com

This paper presents a method for calculation of multiphase flows with a free surface. According to the current experience for calculations of a variety of different flows, one of the most universal methods is the SIMPLE algorithm, based on the modified semi-implicit scheme that uses splitting into physical processes. Along with the ability to generalize this method to the case of strongly compressible flows, its major advantage is an efficient way of implicit approximation of the equations, allowing arbitrarily large calculation time for its application. Such a modification is a combined algorithm, which increases the rate of convergence of the total calculation algorithm compared to the classical SIMPLE method due to an implicit relation between the speed and the pressure. Such implicit term in the equation of conservation of momentum is the pressure gradient, whereas in the continuity equation it is attributed to the mass flow.

This paper presents a numerical scheme for modelling of multiphase flows with a free surface. The procedure to the solution relies on the classical approach — the SIMPLE method with splitting into physical processes. With the help of some modification it leads to the combined method based on a fully implicit relation between the pressure and velocity fields. For the simulation of multiphase flows, the considered approach employs one-speed model to describe the mix. This model allows simulating any number of phases, including any combination of liquid, solid or gaseous media. Only one system of equations for all phases is required. For the calculation of free surface flows the numerical scheme is closed by a transport equation for the volume fractions of the phases, which simulates the motion of a free surface using the special M-CICSAM scheme.

The correct implementation of the model is tested on a series of numerical experiments for problems of the collapse of a dam, the fall of a box into the water and a hydraulic shock.

Keywords: multiphase flows, free surface, numerical simulation, Navier — Stokes.

Acknowledgements. The presented results were obtained within the framework of the fundamental part of the state task № 2014/133 (“Organization of scientific research” and the project number 2820), Council for Grants of the President of Russian Foundation for state support of the leading scientific schools, project NSh-6637.2016.5, and by RFBR (grant No. 16-01-00267).

Received 24 December 2015

Received in revised form 20 May 2016