

# ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ БОЛЬШИХ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ

А. В. ЕДЕЛЕВ, С. М. ЕНИКЕЕВА, С. М. СЕНДЕРОВ

*Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН*

*Иркутск, Россия*

e-mail: enikeeva@isem.sei.irk.ru

The article is devoted to the information support for reliability studies of large piping and feed systems and conduits. The respective database and the development principles of the graphic interface are described.

## Введение

Актуальность исследований состояния и функционирования больших трубопроводных систем энергетики в различных условиях, а также определения “узких мест” в обеспечении потребностей в энергоресурсах в настоящее время весьма высока. Это связано со значительным количеством угроз процессу нормального топливо- и энергоснабжения (изношенность оборудования, чрезмерная концентрация транспортных коммуникаций, политические акции и т. д.). Под узким местом мы понимаем тот элемент системы, который ограничивает производственные возможности последней. При этом узкое место представляет собой не обязательно сам аварийный элемент, но узел или транспортную дугу, ограничивающую маневр по переадресации потоков энергоресурса для удовлетворения потребителя. По сути это оптимизационная задача, и в той или иной постановке она решалась многими авторами [2, 3].

В Институте систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН разработана программно-вычислительная система “Нефть и газ России”, включающая в себя модели, имитирующие поведение Единой системы газоснабжения (ЕСГ) и систем нефте- и нефтепродуктоснабжения (ЕСН) в нештатных ситуациях, которая используется и для определения узких мест.

## 1. Математическая постановка задачи

Поставленная задача решается методом Басакера — Гоуэна [4] как задача о максимальном потоке минимальной стоимости с ограничениями по пропускной способности на дугах, по объемам добычи, хранения и потребления в узлах сети. Для системы газоснабжения она имеет следующий вид:

$$\max f$$

при условиях

$$\sum_{i \in N_j^+} x_{ij} - \sum_{i \in N_j^-} x_{ji} = \begin{cases} -f, & j = S, \\ 0, & j \neq S, t, \\ f, & j = t \end{cases}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad \forall (i, j),$$

где  $f$  — величина суммарного потока по сети,  $S$  — номер узла общего источника,  $t$  — номер узла общего стока,  $N_j^+$  — подмножество входящих в узел  $j$  дуг,  $N_j^-$  — подмножество выходящих из узла  $j$  дуг,  $x_{ij}$  — поток газа по дуге  $(i, j)$ ,  $d_{ij}$  — пропускная способность дуги; при ограничениях

$$\sum_{(i,j)} C_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_j \leq M_j^{\text{доб}} \quad \text{для } j \in N_1 \quad (\text{объекты добычи}),$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_j \leq M_j^{\text{ПХГ}} \quad \text{для } j \in N_2 \quad (\text{объекты хранения}),$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} \leq M_{ij}^{\text{ТР}} \quad (\text{участки транспорта } i, j),$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{i(k)} = Q_{i(k)} \quad \text{для } i = N_{3(k)}, k = (1, \dots, L) \quad (\text{объекты потребления}),$$

где  $C_{ij}$  — удельные топливно-энергетические затраты на соответствующих объектах ЕСГ,  $Q_{i(k)}$  — требуемые объемы газа для потребителей разных категорий,  $M_j^{\text{доб}}$  — максимальный объем добычи в  $j$ -м узле добычи,  $M_j^{\text{ПХГ}}$  — максимальные запасы газа в  $j$ -м ПХГ,  $L$  — категории потребителей.

## 2. Описание базы данных

Для обеспечения исследователя полной и современной информацией разрабатываются базы данных. В предлагаемой работе рассматриваются данные об объектах ЕСГ и нефтепродуктоснабжения (ЕСН). Базы данных нормализованы [1], что упрощает синхронную модификацию всех хранимых копий данных, т. к. в процессе нормализации зависимости между данными прослеживаются более строго, исключаются повторы данных. Это уменьшает вероятность внесения ошибок в базу и улучшает возможность проверки данных благодаря их большей согласованности. Структура баз данных ориентирована на объекты рассматриваемых трубопроводных систем.

Для записи в базы данных выделены объекты добычи, хранения, потребления и транспорта. На рис. 1 изображена концептуальная схема базы данных об объектах ЕСГ. Базы данных других рассматриваемых в статье систем имеют подобную структуру. Информация об объектах в настоящее время содержит показатели, главным образом касающиеся возможности проведения потокораспределения, т. к. решение именно этой оптимизационной задачи дает возможность определять узкие места в сети. Ниже перечислены некоторые показатели, занесенные в базу данных. Несколько показателей можно увидеть на рис. 2.

Объектами добычи в БД — ЕСГ являются газодобывающие предприятия и нефтяные компании, вырабатывающие попутный газ; в БД — ЕСН (нефтепродукты) — нефтеперерабатывающие заводы; в БД — ЕСН (нефть) — нефтегазодобывающие управления. В качестве объектов потребления рассматриваются основные субъекты Российской Федерации, экспортные терминалы, а также некоторые наиболее крупные предприятия — потребители газа (нефти, нефтепродуктов). Объекты транспорта включают в себя компрессорные

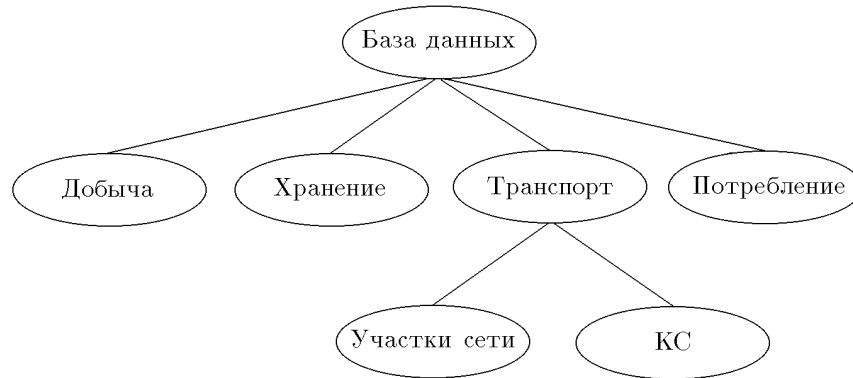


Рис. 1. Схема базы данных (газ).

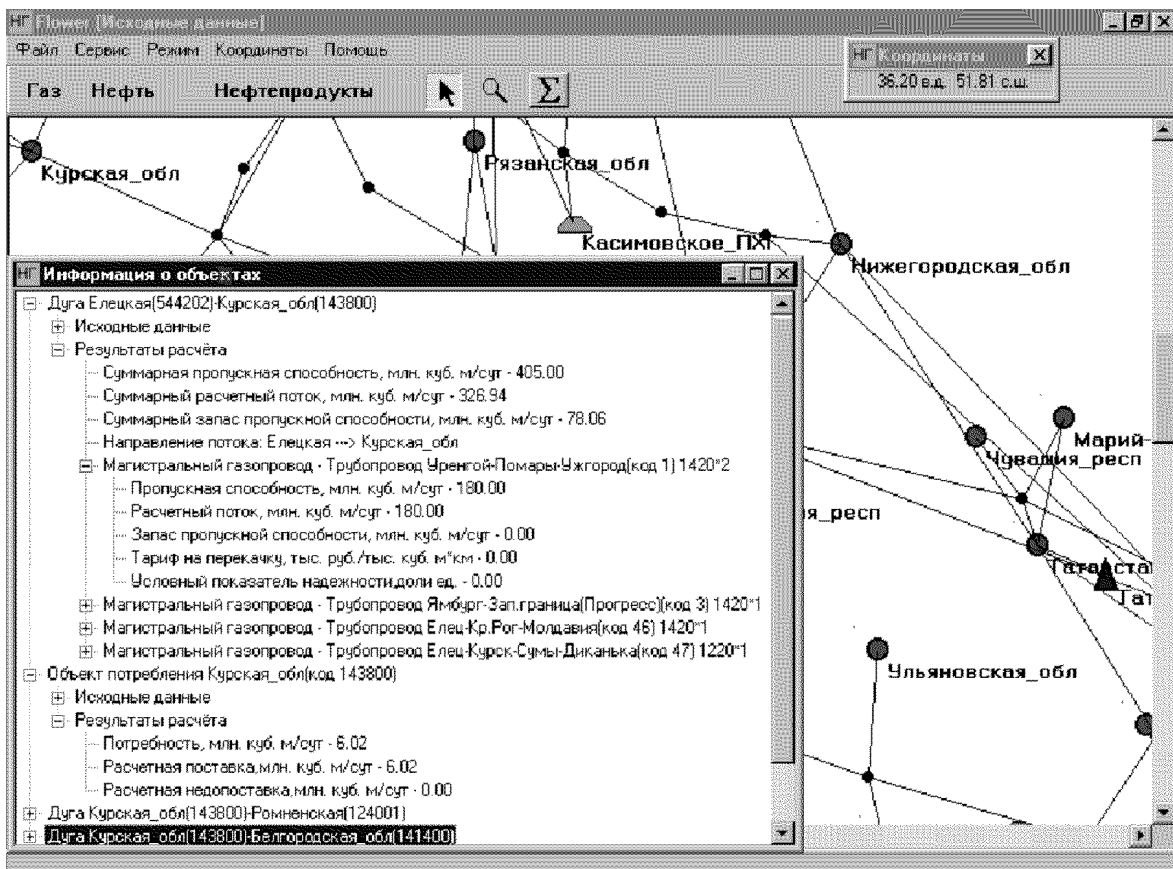


Рис. 2. Пример интерфейса пользователя.

(насосные) станции и линейную часть (трубопроводы, дискретный транспорт). Последняя представлена в виде совокупности участков, организованных в сеть, агрегированную до необходимого для исследования уровня (распределительные сети не рассматриваются). При агрегировании сети учтена принадлежность участков тому или иному трубопроводу. Это позволяет при проведении потокораспределения в вычислительном эксперименте более гибко устанавливать цены на транспортировку газа (нефти), регулируя тем самым обеспечение приоритетных потребителей в первую очередь. При разработке базы данных учтены все нитки, отражены диаметры трубопроводов. В базу данных занесены также данные о географическом расположении (долгота и широта) объектов, что позволяет сопоставить различные системы — ЕСГ, ЕСН (рис. 3).

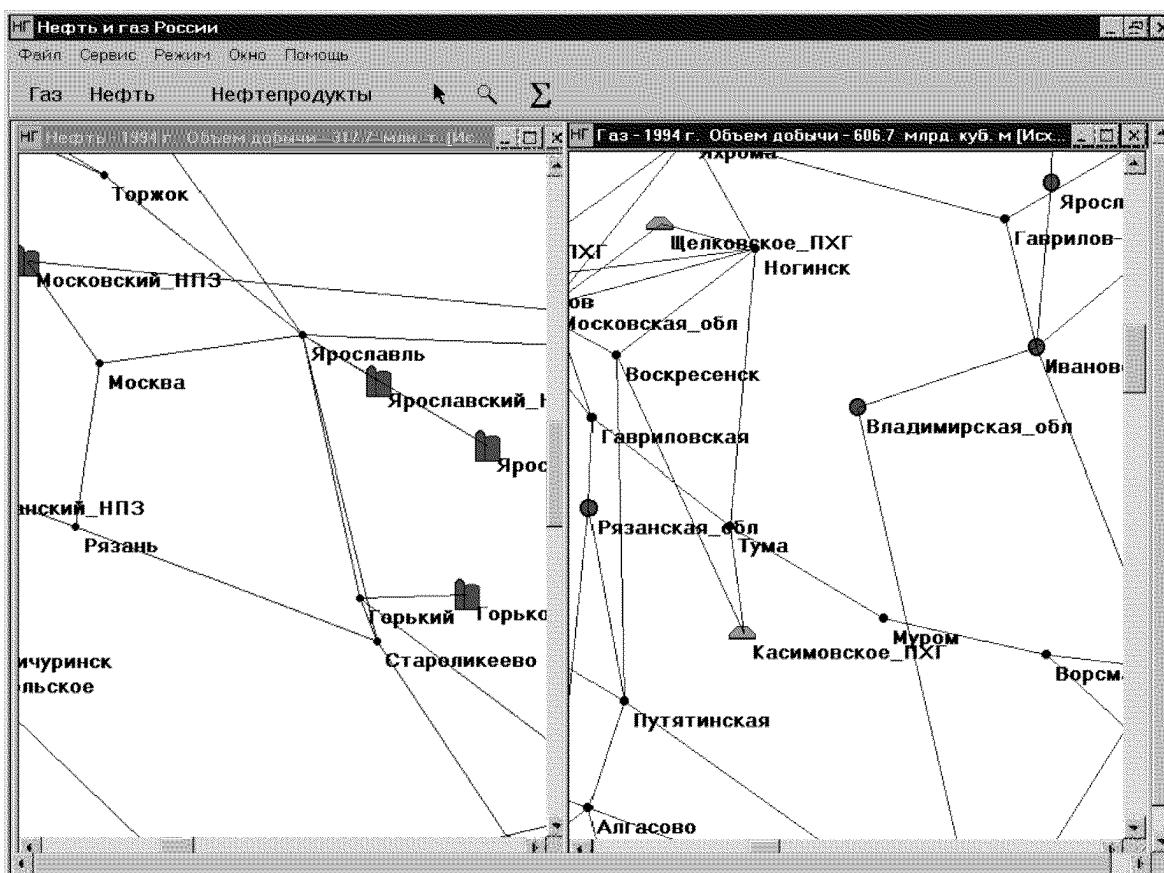


Рис. 3. Фрагмент отображения системы “Нефть и газ России”.

База данных системы “Нефть и газ России” характеризуется следующими показателями:

добывающих предприятий — по газу 28, по нефти 81 по нефтепродуктам 27;

потребителей — соответственно 73, 47, 94;

хранилищ — по газу 28;

участков — по газу 336, по нефти 288, по нефтепродуктам 366;

дуг — соответственно 582, 324, 7;

общая длина в одностороннем исполнении превышает 160 тыс. км.

### 3. Описание интерфейса

Программа, осуществляющая интерфейс с базой, строит графическое изображение сети, дугами которого являются участки сети, а узлами — объекты добычи, хранения, потребления, точки ветвления, в которых в реальной сети располагаются компрессорные (насосные) станции. Кроме того, она дает возможность наглядного отображения на экране информации о каждом объекте: объемов добычи, хранения, потребления в соответствующих узлах, а также пропускной способности на любом участке сети, принадлежащем соответствующему трубопроводу (см. рис. 2).

Перед обработкой базы данных пользователю предлагается запустить расчетную программу, и в случае утвердительного ответа программа ждет окончания расчета. Расчетная программа формирует файл результатов. Далее создается файл настроек на базу данных. При этом одновременно осуществляется контроль данных на полноту и соответствие файлов базы данных друг другу и файлу результатов с параллельной выдачей диагностированных ошибок на экран. И только после проведения такого анализа пользователю предлагается создать (или не создавать) графические образы на экране. Диагностирование ошибок не всегда отрицает возможность построения изображения. Благодаря этому есть возможность постепенного доведения до нужного состояния (или разработки другого варианта агрегирования) такой сложной системы, как ЕСГ или ЕСН.

На одном экране могут быть открыты несколько окон, т. е., например, могут быть показаны одновременно “Нефть” и “Газ”, схема до и после расчета потокораспределения. Граф, соответствующий проведенному потокораспределению, от исходного отличается тем, что на нем дуги и объекты, которые являются препятствием для прохождения потока, изображены другим цветом. Так, красный цвет дуги означает, что использованы предельные возможности участка, синий цвет — по дуге нет потока совсем, красный цвет узла говорит о недопоставке энергоресурса в этот узел. Таким образом, анализ участков и дуг по цвету позволяет найти конкретного “виновника” недопоставки энергоресурса, который может находиться достаточно далеко от энергодефицитного узла. Это связано с тем, что трубопроводные сети для транспорта углеводородного сырья в связи с многократной замкнутостью имеют достаточно сложную конфигурацию. В случае с ЕСН наличие дискретного транспорта (железнодорожные, автомобильные перевозки) и возможность учета его в наших моделях позволяют в вычислительном эксперименте более свободно маневрировать потоками нефти и нефтепродуктов, поскольку в этом случае пропускная способность участка не ограничена диаметром трубы. Пользователь данной программы имеет возможность:

- масштабировать изображения графа (увеличить, уменьшить);
- получать информацию о дуге или объекте;
- переключаться в один из режимов просмотра: до расчета (из базы данных) или после расчета (из файла результатов);
- просматривать файл результатов расчета, не покидая программу;
- выбирать из списка один или несколько трубопроводов.

Программа разработана так, что возможно расширение ее услуг в области аналогичных исследований в системах углеснабжения, электроэнергетики.

Таким образом, база данных и интерфейс позволяют:

- получать полную и наглядную информацию о совокупной работе всех систем топливоснабжения и их возможностях по удовлетворению потребителей в исследуемых условиях функционирования;

— оказывать реальную помощь в определении узких мест в системе топливоснабжения в различных ситуациях;

— проводить вычислительный эксперимент при совместной работе отдельных энергетических систем.

Это дает возможность проводить менее трудоемкий, а главное, более качественный и эффективный анализ ситуации и осуществлять выбор соответствующих действий или мероприятий по снижению негативных последствий от возможных недопоставок энерго-ресурса.

## Список литературы

- [1] ДЕЙТ К. Дж. *Введение в системы баз данных*. Диалектика, Киев, 1998.
- [2] АНТОНОВ Г. Н., ЧЕРКЕСОВ Г. Н., КРИВОРУЦКИЙ Л. Д. и др. *Методы и модели исследования живучести систем энергетики*. Наука, Сиб. отд-ние, Новосибирск, 1990.
- [3] СУХАРЕВ М. Г., СТАВРОВСКИЙ Е. Р., БРЯНСКИХ В. Е. *Оптимальное развитие систем газоснабжения*. Недра, М., 1981.
- [4] ФОРД Л., ФОЛКЕРСОН Д. *Потоки в сетях*. Мир, М., 1966.

*Поступила в редакцию 5 ноября 1998 г.,  
в переработанном виде 31 марта 1999 г.*

# ON THE MULTIPLICATIVE PRODUCT OF THE DIRAC-DELTA DISTRIBUTION ON THE HYPER-SURFACE

A. KANANTHAI

*Department of Mathematics, Chiangmai University  
Chiangmai 50200, Thailand*

Определяется мультипликативное произведение распределений  $\frac{\delta(cr - s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} \frac{\delta(cr + s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}$ ,

где  $\delta$  — дельта-функция Дирака,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}$ ,  $s = \sqrt{x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2 + \dots + x_{p+q}^2}$ , а  $p > 1$  и  $q > 1$  ( $p+q = n$ ) — размерности в евклидовом пространстве  $R^n$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in R^p$ ,  $(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+q}) \in R^q$ ,  $c$  — вещественное число. При некоторых ограничениях на  $p$  и  $n$  в таком мультипликативном произведении получена формула для функции Грина в квантовых теориях поля.

## 1. Introduction

Let  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  be a point in the Euclidean space  $R^n$  and  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  be any sufficiently smooth function such that on  $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  we have  $\text{grad } P \neq 0$ , that means there are no singular points on  $P = 0$ . Then the generalized function  $\delta^{(k-1)}(P)$  is defined in [1, p. 211] by

$$\langle \delta^{(k-1)}(P), \varphi \rangle = (-1)^{k-1} \int \Psi_{u_1}^{(k-1)}(0, u_2, u_3, \dots, u_n) du_2 du_3 \dots du_n. \tag{1.1}$$

We write  $u_1 = P$  and choose the remaining  $u_i$  coordinate (with  $i = 2, 3, \dots, n$ ) arbitrary except that the Jacobian of the  $x_i$  with respect to the  $u_i$ , which we shall denote by  $D \binom{x}{u}$ , fail to vanish (which is always possible so long as  $\text{grad } P \neq 0$  on  $P = 0$ ). In (1.1), write

$$\Psi(u) = \Psi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \varphi_1 D \binom{x}{u},$$

$$\varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

The integral of (1.1) is taken over the  $P = 0$  surface, where  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  is an infinitely differentiable function with bounded support.

Now, consider the nondegenerated quadratic form

$$u = c^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2) - (x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2 + \dots + x_{p+q}^2) \tag{1.2}$$

where  $p > 1$  and  $q > 1$  with  $p + q = n$  is the dimension of the space  $R^n$  and  $c$  is a real number. Write  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}$  and  $s = \sqrt{x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2 + \dots + x_{p+q}^2}$  then (1.2) can be written

$$u = c^2 r^2 - s^2 = (cr - s)(cr + s). \quad (1.3)$$

Taking  $P = cr - s$  in (1.1), then (1.1) can be written in the form

$$\langle \delta^{(k-1)}(cr - s), \varphi \rangle = (-1)^{k-1} \int \left[ \frac{\partial^{k-1}}{\partial P^{k-1}} \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) D \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right]_{P=0} du_2 du_3 \dots du_n. \quad (1.4)$$

In this paper we study the multiplicative product  $\frac{\delta(cr - s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} \frac{\delta(cr + s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}$  which is the generalization of the work of M. Aguirre Tellez [2].

## 2. The generalized functions $\frac{\delta(cr-s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}$ and $\frac{\delta(cr+s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}$

From (1.2), let  $y_1 = cx_1, y_2 = cx_2, \dots, y_p = cx_p$  and the coordinate  $x = (y_1, y_2, \dots, y_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+q}) \in R^n$  and  $dx = dy_1 dy_2 \dots dy_p dx_{p+1} dx_{p+2} \dots dx_{p+q} = c^p dx_1 dx_2 \dots dx_p dx_{p+1} \dots dx_{p+q}, p+q = n$ . We define

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(k-1)}(cr - s), \varphi(x) \rangle &= \int_{P=0} \delta^{(k-1)}(cr - s) \varphi(x) dx = \\ &= \int_{P=0} \delta^{(k-1)}(cr - s) \varphi(x) dy_1 \dots dy_p dx_{p+1} \dots dx_{p+q} = c^p \int_{P=0} \delta^{(k-1)}(cr - s) \varphi(x) dx_1 dx_2 \dots dx_{p+q}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Let us transform to bipolar coordinate defined by  $x_1 = r\omega_1, x_2 = r\omega_2, \dots, x_p = r\omega_p$  and  $x_{p+1} = s\omega_{p+1}, x_{p+2} = s\omega_{p+2}, \dots, x_{p+q} = r\omega_{p+q}$  where  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}, s = \sqrt{x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2 + \dots + x_{p+q}^2}$ . Thus

$$dx_1 dx_2 \dots dx_{p+q} = r^{p-1} s^{q-1} dr ds d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)} \quad (2.2)$$

where  $d\Omega^{(p)}$  and  $d\Omega^{(q)}$  are the elements of surface area on the unit sphere in the space  $R^p$  and  $R^q$  respectively.

Choose the coordinates to be  $P, r$  and  $\omega_i$ , then (2.2) becomes

$$dx_1 dx_2 \dots dx_{p+q} = (cr - p)^{q-1} r^{p-1} dr dP d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)} \quad (2.3)$$

where  $P = cr - s$ . By (1.4) and (2.3), the equation (2.1) can be written in the form

$$\langle \delta^{(k-1)}(cr - s), \varphi(x) \rangle = c^p (-1)^{k-1} \int \left[ \frac{\partial^{k-1}}{\partial P^{k-1}} \{ (cr - P)^{q-1} \varphi(r, s) \} \right]_{cr=s} r^{p-1} dr d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)}. \quad (2.4)$$

Since  $P = cr - s$ , then  $\frac{\partial^{k-1}}{\partial P^{k-1}} = (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial S^{k-1}}$ .

Thus (1.8) can be written as

$$\langle \delta^{(k-1)}(cr - s), \varphi(x) \rangle = c^p \int \left[ \frac{\partial^{k-1}}{\partial S^{k-1}} \{ s^{q-1} \varphi(r, s) \} \right]_{cr=s} r^{(p-1)} dr d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)}.$$



Let

$$\Psi(r, s) = \int_{\Omega} \varphi(r, s) d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)} \quad (2.5)$$

then

$$\langle \delta^{(k-1)}(cr - s), \varphi(x) \rangle = c^p \int_{r=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}} \{s^{q-1} \Psi(r, s)\} \right]_{cr=s} r^{p-1} dr.$$

For  $k = 1$ , we have

$$\langle \delta(cr - s), \varphi(x) \rangle = c^p \int_{r=0}^{\infty} [s^{q-1} \Psi(r, s)]_{cr=s} r^{p-1} dr$$

or

$$\left\langle \frac{\delta(cr - s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi(x) \right\rangle = c^p \int_{r=0}^{\infty} [s^{\frac{q-1}{2}} \Psi(r, s)]_{cr=s} r^{\frac{p-1}{2}} dr. \quad (2.6)$$

Similarly, for  $P = cr + s$  we obtain

$$\left\langle \frac{\delta(cr + s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi(x) \right\rangle = c^p \int_{-\infty}^0 [s^{\frac{q-1}{2}} \Psi(r, s)]_{cr=-s} r^{\frac{p-1}{2}} dr. \quad (2.7)$$

### 3. The generalized functions $(cr - s)_+^{\lambda}$ and $(cr + s)_-^{\lambda}$

We define

$$(cr - s)_+^{\lambda} = \begin{cases} (cr - s)^{\lambda}, & \text{for } cr \geq s, \\ 0, & \text{for } cr < s, \end{cases} \quad (3.1)$$

and

$$(cr + s)_-^{\lambda} = \begin{cases} -(cr + s)^{\lambda}, & \text{for } cr + s < 0, \\ 0, & \text{for } cr + s \geq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

where  $\lambda$  is a complex number.

The generalized function  $(c - s)_+^{\lambda}$ , where  $\lambda$  is a complex number, is defined by

$$\langle (cr - s)_+^{\lambda}, \varphi(x) \rangle = \int_{cr-s \geq 0} (cr - s)^{\lambda} \varphi(x) dx.$$

Since

$$dx = dy_1 dy_2 \dots dy_p dx_{p+1} dx_{p+2} \dots dx_{p+q} = c^p dx_1 dx_2 \dots dx_p dx_{p+1} \dots dx_{p+q},$$

we have

$$\langle (cr - s)_+^{\lambda}, \varphi \rangle = c^p \int_{cr-s \geq 0} (cr - s)^{\lambda} \varphi(x) r^{p-1} dr s^{q-1} ds d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)}$$

or

$$\left\langle \frac{(cr - s)_+^{\lambda}}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle = c^p \int_{r=0}^{\infty} \int_{s=0}^{cr} (cr - s)^{\lambda} \Psi(r, s) r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}} ds dr$$

where  $\Psi(r, s)$  is defined by (2.5).

Let  $u = cr$  and  $v = s$ , then

$$\left\langle \frac{(cr - s)_+^{\lambda}}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle = c^p \int_{r=0}^{\infty} \int_{s=0}^u (u - v)^{\lambda} \Psi\left(\frac{u}{c}, v\right) \left(\frac{u}{c}\right)^{\frac{p-1}{2}} v^{\frac{q-1}{2}} dv \frac{du}{c}$$

put  $v = ut$ , we obtain

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{(cr-s)_+^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle &= c^p \int_0^\infty \int_0^1 (u-ut)^\lambda \Psi\left(\frac{u}{c}, ut\right) \frac{u^{\frac{p-1}{2}}}{c^{\frac{p-1}{2}}} u^{\frac{q-1}{2}} t^{\frac{q-1}{2}} u dt \frac{du}{c} = \\
 &= c^{\frac{p-1}{2}} \int_0^\infty \int_0^1 u^\lambda (1-t)^\lambda \Psi\left(\frac{u}{c}, ut\right) u^{\frac{p+q}{2}} t^{\frac{q-1}{2}} dt du = \\
 &= c^{\frac{p-1}{2}} \int_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}} du \int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-1}{2}} \Psi\left(\frac{u}{c}, ut\right) dt = c^{\frac{p-1}{2}} \int_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}} G(\lambda, u) du \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

where

$$G(\lambda, u) = \int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-1}{2}} \Psi\left(\frac{u}{c}, ut\right) dt.$$

Now  $G(\lambda, u)$  have poles at  $\lambda = -k (k = 1, 2, \dots)$ , by I. M. Gelfand and G. E. Shilov [1, p. 49],

$$\operatorname{Res}_{\substack{\lambda=-k \\ k=1,2,\dots}} \langle x_+^\lambda, \varphi \rangle = \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.$$

Thus

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-k} G(\lambda, u) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left[ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left\{ t^{\frac{q-1}{2}} \Psi\left(\frac{u}{c}, ut\right) \right\} \right]_{t=1}. \quad (3.4)$$

Since  $G(\lambda, u)$  have poles at  $\lambda = -k$ , we write

$$G(\lambda, u) = \frac{G_0(u)}{\lambda+k} + G_1(\lambda, u)$$

in the neighborhood of  $\lambda = -k$  where

$$G_0(u) = \operatorname{Res}_{\lambda=-k} G(\lambda, u) \quad (3.5)$$

and  $G_1(\lambda, u)$  is regular at  $\lambda = -k$ .

Thus (3.3) can be written in the form

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{(cr-s)_+^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle &= c^{\frac{p-1}{2}} \int_0^\infty u^{\lambda+n/2} \left[ \frac{G_0(u)}{\lambda+k} + G_1(\lambda, u) \right] du = \\
 &= \frac{c^{\frac{p-1}{2}}}{\lambda+k} \int_0^\infty u^{\lambda+n/2} G_0(u) du + c^{\frac{p-1}{2}} \int_0^\infty G_1(\lambda, u) du.
 \end{aligned}$$

$$\text{Thus } \operatorname{Res}_{\lambda=-k} \left\langle \frac{(cr-s)_+^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle = c^{\frac{p-1}{2}} \int_0^\infty u^{-k+n/2} G_0(u) du.$$

By (3.4) and (3.5) we obtain

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-k} \left\langle \frac{(cr-s)_+^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle = c^{\frac{p-1}{2}} \int_0^\infty u^{-k+n/2} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left[ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left\{ t^{\frac{q-1}{2}} \Psi\left(\frac{u}{c}, ut\right) \right\} \right]_{t=1} du.$$

Let  $s = ut$ . Then  $\frac{\partial}{\partial t} = u \frac{\partial}{\partial s}$ .

Thus, we have

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\lambda=-k} \left\langle \frac{(cr-s)_+^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle &= \frac{c^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^\infty u^{-k+n/2} u^{k-1} \left[ \frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}} \left\{ s^{\frac{q-1}{2}} u^{\frac{1-q}{2}} \Psi \left( \frac{u}{c}, s \right) \right\} \right]_{\substack{t=1 \\ s=u}} du = \\ &= \frac{(-1)^{k-1} c^{\frac{p-1}{2}}}{(k-1)!} \int_0^\infty \left[ \frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}} \left\{ s^{\frac{q-1}{2}} \Psi \left( \frac{u}{c}, s \right) \right\} \right]_{\substack{t=1 \\ s=u}} u^{\frac{p-1}{2}} du = \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} c^{\frac{p-1}{2}} c^{\frac{p+1}{2}} \int_0^\infty \left[ \frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}} \left\{ s^{\frac{q-1}{2}} \Psi(r, s) \right\} \right]_{s=cr} r^{\frac{p-1}{2}} dr \end{aligned}$$

for  $u = cr$ . Putting  $k = 1$ . Thus

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-1} \left\langle \frac{(cr-s)_+^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle = c^p \int_0^\infty \left[ s^{\frac{q-1}{2}} \Psi(r, s) \right]_{s=cr} r^{\frac{p-1}{2}} dr. \quad (3.6)$$

From (2.6) and (3.6) we obtain

$$\frac{\delta(cr-s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} = \operatorname{Res}_{\lambda=-1} \frac{(cr-s)_+^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}. \quad (3.7)$$

Now consider the generalized function  $(cr+s)_-^\lambda$ . We have

$$\begin{aligned} \langle (cr+s)_-^\lambda, \varphi \rangle &= c^p \int_{cr+s<0} (-cr-s)^\lambda \varphi(r, s) r^{p-1} s^{q-1} ds dr d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)}, \\ \left\langle \frac{(cr+s)_-^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle &= c^p \int_{-\infty}^0 \left[ \int_0^{-cr} (-cr-s)^\lambda \Psi(r, s) s^{\frac{q-1}{2}} ds \right] r^{\frac{p-1}{2}} dr. \end{aligned}$$

Let  $u = cr$  and  $v = s$ . We have for  $v = -ut$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{(cr+s)_-^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle &= c^p \int_{-\infty}^0 \left[ \int_0^{-u} (-(u+v))^\lambda \Psi \left( \frac{u}{c}, v \right) v^{\frac{q-1}{2}} dv \right] \left( \frac{u}{c} \right)^{\frac{p-1}{2}} d \left( \frac{u}{c} \right) = \\ &= c^p \int_{-\infty}^0 \left[ \int_0^1 (-(u-ut))^\lambda \Psi \left( \frac{u}{c}, -ut \right) (-ut)^{\frac{q-1}{2}} (-u) dt \right] \frac{u^{\frac{p-1}{2}}}{c^{\frac{p-1}{2}}} d \left( \frac{u}{c} \right) = \\ &= \frac{c^p}{(-c)^{\frac{p-1}{2}} c} \int_{-\infty}^0 (-u)^{\lambda+n/2} du \int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-1}{2}} \Psi \left( \frac{u}{c}, -ut \right) dt = \\ &= \frac{c^p}{(-c)^{\frac{p-1}{2}} c} \int_{-\infty}^0 (-u)^{\lambda+n/2} G(\lambda, -u) du \end{aligned}$$

where

$$G(\lambda, -u) = \int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-1}{2}} \Psi \left( \frac{u}{c}, -ut \right) dt.$$

Since  $G(\lambda, -u)$  have poles at  $\lambda = -j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) we have

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-j} G(\lambda, u) = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \left[ \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \left\{ t^{\frac{q-1}{2}} \Psi \left( \frac{u}{c}, -ut \right) \right\} \right]_{t=1}.$$

Now, in the neighborhood of  $\lambda = -j$  we write

$$G(\lambda, -u) = \frac{1}{x+j} G_0(-u) + G_1(\lambda, -u)$$

where  $G_0(-u) = \operatorname{Res}_{\lambda=-j} G(\lambda, -u)$  and  $G_1(\lambda, -u)$  is regular function.

The same as before, for  $s = -ut$  and  $\frac{\partial}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial s}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\lambda=-j} \left\langle \frac{(cr+s)_-^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle &= \frac{c^p}{(-c)^{\frac{p-1}{2}} c} \int_{-\infty}^0 (-u)^{-j+\frac{p}{2}} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \left[ \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \left\{ t^{\frac{q-1}{2}} \Psi \left( \frac{u}{c}, -ut \right) \right\} \right]_{t=1} du = \\ &= \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \frac{c^p}{(-c)^{\frac{p-1}{2}} c} \int_{-\infty}^0 \left[ \frac{\partial^{j-1}}{\partial s^{j-1}} \left\{ s^{\frac{q-1}{2}} \Psi \left( \frac{u}{c}, s \right) \right\} \right]_{s=-u} (-u)^{\frac{p-1}{2}} du = \\ &= \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} c^p \int_{-\infty}^0 \frac{\partial^{j-1}}{\partial s^{j-1}} \left[ s^{\frac{q-1}{2}} \Psi(r, s) \right] r^{\frac{p-1}{2}} dr. \end{aligned}$$

Putting  $j = 1$  we obtain

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-1} \left\langle \frac{(cr+s)_-^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle = c^p \int_{-\infty}^0 \left[ s^{\frac{q-1}{2}} \Psi(r, s) \right]_{s=-cr} r^{\frac{p-1}{2}} dr. \quad (3.8)$$

From (2.7) and (3.8) we obtain

$$\frac{\delta(cr+s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} = \operatorname{Res}_{\lambda=-1} \frac{(cr+s)_-^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}. \quad (3.9)$$

## 4. The generalized function $(c^2 r^2 - s^2)_-^\lambda$

We have

$$\begin{aligned} \langle (c^2 r^2 - s^2)_-^\lambda, \varphi \rangle &= \int_{c^2 r^2 - s^2 \leq 0} (-(c^2 r^2 - s^2))^\lambda \varphi(x) dx = \\ &= c^p \int_{c^2 r^2 - s^2 \leq 0} (-(c^2 r^2 - s^2))^\lambda \varphi(r, s) r^{p-1} dr d\Omega^{(p)} s^{q-1} ds d\Omega^{(q)} = \\ &= c^p \int_{s=0}^{\infty} \int_{r=0}^{\frac{s}{c}} (s^2 - c^2 r^2)^\lambda \Psi(r, s) r^{p-1} s^{q-1} dr ds \end{aligned}$$

where  $\Psi(r, s)$  is defined by (2.5).

Let  $u = c^2 r^2$  and  $v = s^2$ . Thus

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{(c^2 r^2 - s^2)_-^\lambda}{r^{p-1} s^{q-1}}, \varphi \right\rangle &= \frac{1}{4} \frac{c^p}{c^2} \int_0^\infty \int_0^v (v-u)^\lambda \Psi_1(u, v) r^{-1} s^{-1} du dv = \\ &= \frac{1}{4} c^{p-1} \int_0^\infty \int_0^v (v-u)^\lambda \Psi_1(u, v) u^{\frac{-1}{2}} v^{\frac{-1}{2}} du dv. \end{aligned}$$

Let  $u = vt$  we obtain

$$\left\langle \frac{(c^2r^2 - s^2)_-^\lambda}{r^{p-1}s^{q-1}}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{4}c^{p-1} \int_0^\infty v^\lambda \int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{-1}{2}} \Psi_1(vt, v) dt = \frac{1}{4}c^{p-1} \int_0^\infty v^\lambda \Phi(\lambda, v) dv$$

where

$$\Phi(\lambda, v) = \int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{-1}{2}} \Psi(vt, v) dt. \quad (4.1)$$

Now  $\Phi(\lambda, v)$  have poles at  $\lambda = -j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ), we write

$$\Phi(\lambda, v) = \frac{\Phi_0(v)}{\lambda + j} + \Phi_1(\lambda, v).$$

Thus  $\text{Res}_{\lambda=-j} \Phi(\lambda, v) = \Phi_0(v)$  and  $\Phi_1(\lambda, v)$  is regular.

We have

$$\left\langle \frac{(c^2r^2 - s^2)_-^\lambda}{r^{p-1}s^{q-1}}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{4}c^{p-1} \int_0^\infty v^\lambda \left[ \frac{\Phi_0(v)}{\lambda + j} + \Phi_1(\lambda, v) \right] dv. \quad (4.2)$$

We see that  $\left\langle \frac{(c^2r^2 - s^2)_-^\lambda}{r^{p-1}s^{q-1}}, \varphi \right\rangle$  has a pole of order two at  $\lambda = -j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ).

In the neighborhood of such  $\lambda$  we expand  $\frac{(c^2r^2 - s^2)_-^\lambda}{r^{p-1}s^{q-1}}$  in the Laurent series

$$\frac{(c^2r^2 - s^2)_-^\lambda}{r^{p-1}s^{q-1}} = \frac{A^j}{(\lambda + j)^2} + \frac{B^j}{\lambda + j} + \dots \quad (4.3)$$

From (4.2) and (4.3), we have

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow -j} \langle (\lambda + j)^2 \frac{(c^2r^2 - s^2)_-^\lambda}{r^{p-1}s^{q-1}}, \varphi \rangle &= \langle A^j, \varphi \rangle = \frac{1}{4}c^{p-1} \lim_{\lambda \rightarrow -j} (\lambda + j) \int_0^\infty v^\lambda \Phi_0(v) dv = \\ &= \frac{1}{4}c^{p-1} \text{Res}_{\lambda=-j} \int_0^\infty v^\lambda \Phi_0(v) dv = \frac{1}{4}c^{p-1} \frac{\Phi_0^{(j-1)}(0)}{(j-1)!} \end{aligned}$$

by [1, p. 49]. Let  $j = 1$ , we have  $\langle A^1, \varphi \rangle = \frac{1}{4}c^{p-1}\Phi_0(0)$ . By (4.1)

$$\Phi_0(0) = \text{Res}_{\lambda=-j} \Phi(\lambda, 0) = \text{Res}_{\lambda=-j} \int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{-1}{2}} \Psi_1(0, 0) dt.$$

Since

$$\Psi_1(u, v) = \Psi(r, s) = \int_\Omega \varphi(r, s) d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)},$$

we have  $\Psi_1(0, 0) = \Psi(0, 0) = \varphi(0)\Omega^{(p)}\Omega^{(q)}$ .

Thus

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow -1} \langle (\lambda + 1)^2 \frac{(c^2r^2 - s^2)_-^\lambda}{r^{p-1}s^{q-1}}, \varphi \rangle &= \frac{1}{4}c^{p-1} \varphi(0)\Omega^{(p)}\Omega^{(q)} \text{Res}_{\lambda=-1} \int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{-1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{4}c^{p-1} \varphi(0)\Omega^{(p)}\Omega^{(q)} \text{Res}_{\lambda=-1} \left( \frac{\Gamma(\lambda + 1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda + 1 + \frac{1}{2})} \right). \end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\lambda=-1} \left( \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1+\frac{1}{2})} \right) &= \operatorname{Res}_{\lambda=-1} \left( \frac{\Gamma(\lambda+2)}{\lambda+1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1+\frac{1}{2})} \right) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow -1} \left[ (\lambda+1) \frac{\Gamma(\lambda+2)\Gamma(\frac{1}{2})}{(\lambda+1)\Gamma(\lambda+1+\frac{1}{2})} \right] = \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 1. \end{aligned}$$

Thus

$$\lim_{\lambda \rightarrow -1} \left\langle (\lambda+1)^2 \frac{(c^2 r^2 - s^2)_-^\lambda}{r^{p-1} s^{q-1}}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{4} c^{p-1} \varphi(0) \Omega^{(p)} \Omega^{(q)} = \frac{1}{4} c^{p-1} \frac{2\pi^{p/2}}{\Gamma(\frac{p}{2})} \frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(\frac{q}{2})} \varphi(0)$$

where  $\Omega^{(p)}$  and  $\Omega^{(q)}$  are surfaces of unit sphere in  $R^p$  and  $R^q$  and equal to  $\frac{2\pi^{p/2}}{\Gamma(\frac{p}{2})}$  and  $\frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(\frac{q}{2})}$  respectively.

It follows that

$$\lim_{\lambda \rightarrow -1} \left\langle (\lambda+1)^2 \frac{(c^2 r^2 - s^2)_-^\lambda}{r^{p-1} s^{q-1}}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{c^{p-1}}{4} \frac{(2\pi^{\frac{p}{2}})(2\pi^{\frac{q}{2}})\delta}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})}, \varphi \right\rangle. \quad (4.4)$$

## 5. The multiplicative product of $\frac{\delta(cr-s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}$ and $\frac{\delta(cr+s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}$

We define

$$(cr-s)_+^\lambda = \begin{cases} (cr-s)^\lambda, & \text{if } cr-s \geq 0, \\ 0, & \text{if } cr-s < 0 \end{cases}$$

and

$$(cr+s)_-^\lambda = \begin{cases} -(cr+s)^\lambda, & \text{if } cr+s \leq 0, \\ 0, & \text{if } cr+s > 0. \end{cases}$$

From the definition, it follows that

$$(cr-s)_+^\lambda (cr+s)_-^\lambda = (c^2 r^2 - s^2)_-^\lambda. \quad (5.1)$$

**Theorem.** *Given the nondegenerated quadratic form*

$$u = c^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2) - (x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2 + \dots + x_{p+q}^2)$$

where  $p+q=n$  is the dimension of the space  $R^n$  and  $c$  is a real number. Write  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}$  and  $s = \sqrt{x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2 + \dots + x_{p+q}^2}$ . Then the following formula is valid.

$$\frac{\delta(cr-s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} \frac{\delta(cr+s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} = \frac{c^{p-1} \pi^{\frac{n}{2}} \delta(x)}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})}$$

where  $\delta$  is the Dirac-delta function,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  and  $p+q=n$ .

**Proof:** From (3.7) and (3.9), we have by (5.1)

$$\frac{\delta(cr-s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} \frac{\delta(cr+s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} = \operatorname{Res}_{\lambda=-1} \frac{(cr-s)_+^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} \operatorname{Res}_{\lambda=-1} \frac{(cr+s)_-^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow -1} (\lambda + 1) \frac{(cr - s)_+^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} \lim_{\lambda \rightarrow -1} (\lambda + 1) \frac{(cr + s)^\lambda}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} = \lim_{\lambda \rightarrow -1} \left[ (\lambda + 1)^2 \frac{(c^2 r^2 - s^2)_-^\lambda}{r^{p-1} s^{q-1}} \right].$$

Thus by (4.4)

$$\left\langle \frac{\delta(cr - s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} \frac{\delta(cr + s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}}, \varphi \right\rangle = \lim_{\lambda \rightarrow -1} \left\langle (\lambda + 1)^2 \frac{(c^2 r^2 - s^2)_-^\lambda}{r^{p-1} s^{q-1}}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{c^{p-1} \pi^{\frac{n}{2}} \delta(x)}{\Gamma(\frac{p}{2}) \Gamma(\frac{q}{2})}, \varphi \right\rangle.$$

It follows that

$$\frac{\delta(cr - s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} \frac{\delta(cr + s)}{r^{\frac{p-1}{2}} s^{\frac{q-1}{2}}} = c^{p-1} \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \delta(x)}{\Gamma(\frac{p}{2}) \Gamma(\frac{q}{2})}.$$

for  $p > 1$  and  $q > 1$  with  $p + q = n$ .

In particular, with the same process as before, we obtain the formula in (see [2], p. 158, eq. (4.4))  $p = 1, c = 1$ . Then it follows that  $q = n - 1, r = x_1$  and  $s = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{p+q}^2}$ , that is

$$\frac{\delta(x_1 - s)}{s^{\frac{n-2}{2}}} \frac{\delta(x_1 + s)}{s^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \delta(x)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}. \quad (5.2)$$

If  $n = 4$ , from (5.2) we obtain

$$\frac{\delta(x_1 - s)}{s} \frac{\delta(x_1 + s)}{s} = \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \frac{\delta(x)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \delta(x)}{\frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \frac{\delta(x)}{\pi^{\frac{1}{2}}} = \pi \delta(x)$$

or

$$\frac{\delta(x_1 - s) \delta(x_1 + s)}{s^2} = \pi \delta(x) \quad (5.3)$$

where

$$s = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}.$$

The formula (5.3) is used for a perturbative calculation of Green function in quantum field theories (see [2], p. 160, and [3]).

## References

- [1] GELFAND I. M., SHILOV G. E. *Generalized Functions*, vol. 1, Academic Press, New York and London.
- [2] TELLEZ M. AGUIRRE The multiplication product  $\frac{\delta(x_0 - |x|)}{|x|^{\frac{(n-2)}{2}}} \frac{\delta(x_0 + |x|)}{|x|^{\frac{(n-2)}{2}}}$ . *J. of Math. Chem.*, **22**, 1997, 149–160.
- [3] BOLLINI C., ROCCA M. Convolution of ultradistribution. *Preprint*, La Plata, 1997, to appear.