

Математическое моделирование процесса переноса тепла в прямоугольном канале в задаче о течении Пуазейля с зеркально-диффузными граничными условиями

О. В. ГЕРМИДЕР, В. Н. ПОПОВ*

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
Архангельск, Россия

*Контактный e-mail: v.porov@narfu.ru

Рассматривается процесс теплопереноса в канале прямоугольного сечения в случае зеркально-диффузной модели отражения молекул газа от стенок канала. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовано уравнение Вильямса. В предположении, что в канале поддерживается постоянный градиент давления, получены значения потока тепла через поперечное сечение канала в зависимости от коэффициента аккомодации тангенциального импульса и отношения линейных размеров этого сечения в широком диапазоне изменения числа Кнудсена. Проведено сравнение с аналогичными результатами, представленными в открытой печати.

Ключевые слова: зеркально-диффузная модель отражения, разреженный газ, коэффициент аккомодации тангенциального импульса

Введение

Основным параметром динамики разреженного газа является число Кнудсена Kn , которое характеризует разреженность газа. Число Кнудсена определяется как отношение [1]

$$Kn = \frac{l_g}{L},$$

где l_g — средняя длина свободного пробега молекул, L — характерный размер течения. В случае моделирования процессов тепло- и массопереноса в длинном прямоугольном канале роль характерного размера выполняет высота или ширина канала [2]. В зависимости от значений числа Кнудсена можно выделить три режима течения газа. Режим, при котором отсутствует влияние столкновений молекул газа между собой на функцию распределения (а следовательно, и на процессы течения, теплообмена), называется свободномолекулярным. Этот режим реализуется при $Kn \gg 1$. При малых числах Кнудсена ($Kn \ll 1$) газ может рассматриваться как сплошная среда, которая описывается уравнениями Навье — Стокса — Фурье, и режим течения соответствует гидродинамическому режиму. Когда число Кнудсена имеет некоторое промежуточное значение, режим течения называется переходным (промежуточным). Для промежуточного режима течения концепции континуума Навье — Стокса или свободномолекулярного течения

становятся не применимы и решения задач о тепло- и массопереносе в канале в этом случае могут быть найдены в результате интегрирования уравнения Больцмана или модельного кинетического уравнения при соответствующих начальных и граничных условиях.

С развитием современных технологий особое значение приобретают исследования течений газа в микро- и наноканалах [3]. Уменьшение размеров канала приводит к увеличению числа Кнудсена и возрастанию роли поверхностных взаимодействий. Наиболее известной моделью граничных условий является зеркально-диффузное отражение Максвелла. В модели Максвелла функция распределения молекул газа, отраженных от стенок канала, имеет вид [1]

$$f^+(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}) = (1 - \alpha)f^-(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})) + \alpha f_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}\mathbf{n} > 0, \quad (1)$$

где \mathbf{r}'_s — радиус-вектор точек стенок канала; α — коэффициент аккомодации тангенциального импульса; $f^-(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v}))$ — функция распределения падающих молекул на стенки канала; $f_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v})$ — локально-равновесная функция распределения с параметрами, заданными на стенках; \mathbf{n} — вектор нормали к стенке канала, направленный в сторону газа,

$$f_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}) = n(z') \left(\frac{m}{2\pi k_B T(z')} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T(z')} \mathbf{v}^2 \right). \quad (2)$$

Коэффициент аккомодации тангенциального импульса в модели зеркально-диффузного отражения Максвелла определяет вероятность того, что молекула отразится от стенки диффузно. В случае зеркального отражения, когда коэффициент аккомодации тангенциального импульса имеет нулевое значение, скорость молекулы после отражения однозначно определяется ее скоростью падения. Если коэффициент аккомодации тангенциального импульса равен единице, то происходит диффузное отражение и вектор скорости отраженной молекулы не зависит в этом случае от скорости ее падения. Согласно граничным условиям Максвелла, тангенциальный импульс отраженных молекул зависит частично от скорости и температуры стенки и частично от импульса молекул налетающего потока [4].

Другой моделью, описывающей взаимодействие молекул газа с поверхностью, является модель Черчиньяни — Лэмпис (Cercignani — Lampis, CL), которая предусматривает введение двух параметров: коэффициента аккомодации тангенциального импульса α_τ и коэффициента аккомодации кинетической энергии α_n , связанной с компонентой скорости v_n , направленной по нормали к поверхности. В модели CL функция распределения молекул газа, отраженных от стенок канала, определяется ядром рассеяния $R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ [5]:

$$f^+(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}) = \frac{1}{|v_n|} \int_{v'_n < 0} |v'_n| R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) f^-(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}') d\mathbf{v}',$$

$$R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \frac{m^2 v_n}{4\pi^2 \alpha_n \alpha_\tau (2 - \alpha_\tau) (k_B T)^2} \int_0^{2\pi} \exp \left(\frac{\sqrt{1 - \alpha_n} m v_n v'_n \cos \phi}{k_B T \alpha_n} \right) d\phi \times$$

$$\times \exp \left(\frac{m (v_n^2 + (1 - \alpha_n) v_n'^2)}{2k_B T \alpha_n} - \frac{m (\mathbf{v}_\tau + (1 - \alpha_\tau) \mathbf{v}'_\tau)^2}{2k_B T \alpha_\tau (2 - \alpha_\tau)} \right),$$

где \mathbf{v}' , \mathbf{v} — векторы скорости падающих и отраженных молекул газа от стенок канала. В случае $\alpha_\tau = 0$ и $\alpha_n = 0$ отражение соответствует зеркальному. При $\alpha_\tau = 1$ и $\alpha_n = 1$ отражение молекул на стенках канала становится диффузным.

В рамках модели зеркально-диффузного отражения Максвелла в работах [6–8] исследовалось влияние коэффициента аккомодации тангенциального импульса на тепловой и массовый потоки в канале, образованном двумя бесконечными параллельными пластинами. Полученные в [9, 10] значения коэффициента аккомодации тангенциального импульса показали, что для легких газов, таких как азот, аргон и гелий, коэффициент аккомодации может отличаться от единицы, тогда как для тяжелых газов, например криптона и ксенона, коэффициенты близки к единице [8]. Для загрязненной поверхности взаимодействие газ — поверхность ближе к диффузному рассеянию, чем взаимодействие в случае специально обработанной гладкой поверхности. Химическая чистка поверхности увеличивает отклонение коэффициента аккомодации от единицы. Если же рассматривается взаимодействие молекул достаточно тяжелого газа с обычной макроскопически гладкой поверхностью, то можно допускать полную аккомодацию газа на поверхности. В частности, диффузная модель отражения была использована в работах [2, 11, 12] для получения значений потока массы в прямоугольном канале, в [13] — в канале треугольного сечения, в [14–16] — в цилиндрическом канале, в [17] — в канале эллиптического сечения. В [18] получено аналитическое решение задачи о тепловом крипе в свободномолекулярном режиме, построены профили вектора потока тепла при различных отношениях размеров сечения канала. В [2, 11, 12] вычислен массовый поток в задачах о тепловом крипе и течении Пуазейля в промежуточном режиме на основе S-модели кинетического уравнения с применением численных методов. Моделирование процесса массопереноса с граничными условиями Черчиньяни — Лэмпис в прямоугольном канале осуществлялось в [19].

В представленной работе в отличие от [2, 11, 12, 18, 19] получено выражение для потока тепла в канале прямоугольного сечения в задаче о течении Пуазейля при использовании зеркально-диффузной модели отражения. В широком диапазоне изменения числа Кнудсена найдены значения потока тепла в зависимости от коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул на стенках канала и отношения размеров сечения.

1. Постановка задачи. Математическая модель

Рассмотрим прямоугольный канал со сторонами сечения a' и b' , стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm a'/2$ и $y' = \pm b'/2$. Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент давления, направленный вдоль оси канала z' . Кинетику процесса будем описывать на основе уравнения Вильямса, которое в выбранной системе координат записывается в виде [4]

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g} (f_* - f), \quad (3)$$

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \right).$$

Здесь $f = f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ — функция распределения молекул газа по координатам и скоростям; \mathbf{r}' , \mathbf{v} — радиус-вектор и скорость молекул газа соответственно; x' , y' , z' — прямоугольные

декартовы координаты \mathbf{r}' в конфигурационном пространстве; v_x, v_y, v_z — проекции \mathbf{v} на координатные оси; $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ — массовая скорость газа; $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$ — средняя длина свободного пробега молекул газа; η_g и p — давление и коэффициент динамической вязкости газа; $\beta = m/(2k_B T_0)$, m — масса молекулы газа, k_B — постоянная Больцмана, T_0 — температура газа в начале координат; $\gamma = 5\sqrt{\pi}/4$. Параметры n_* , T_* и \mathbf{u}_* подбираем из того факта, что модельный интеграл столкновений в уравнении (3) должен удовлетворять законам сохранения числа частиц, импульса и энергии [4]:

$$\int \omega M_j f_* d^3 \mathbf{v} = \int \omega M_j f d^3 \mathbf{v}, \quad j = \overline{0, 4}, \quad (4)$$

где $M_0 = 1$, $M_1 = mv_x$, $M_2 = mv_y$, $M_3 = mv_z$, $M_4 = mv^2/2$.

В качестве граничного условия на стенках канала используем модель зеркально-диффузного отражения Максвелла (1).

Рассмотрим установившееся движение газа в канале. Будем полагать, что температура стенок канала постоянна и равна T_0 , а изменение давления является малым

$$G_p = \frac{b' dp}{p_0 dz'}, \quad G_p \ll 1. \quad (5)$$

В этом случае, раскладывая в ряд по градиенту давления G_p выражение (2) и ограничиваясь линейными членами в разложении, получим

$$f_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}) = f_0(C) (1 + G_p z). \quad (6)$$

Здесь $f_0(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$ — абсолютный максвеллиан; n_0 — концентрация молекул газа в начале координат; $\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$ — безразмерная скорость молекул газа; $\mathbf{r} = \mathbf{r}'/b'$ — безразмерный радиус-вектор молекул газа.

Функции $f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ и $f_*(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ линеаризуем относительно локально-равновесной функции распределения $f_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v})$. Принимая во внимание равенство (6), получим

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_0(C)(1 + G_p z + h(\mathbf{r}, \mathbf{C})), \quad (7)$$

$$f_*(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_0(C)(1 + G_p z + h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C})), \quad (8)$$

$$h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = \frac{\delta n_*}{n(z)} + 2\mathbf{C}\mathbf{U}_* + \left(C^2 - \frac{3}{2}\right) \frac{\delta T_*}{T_0}. \quad (9)$$

Подставляя (7)–(9) в (3) и учитывая (4), для определения функции $h(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ имеем уравнение в безразмерных координатах:

$$\begin{aligned} & \left(C_x \frac{\partial h}{\partial x} + C_y \frac{\partial h}{\partial y} + C_z \left(G_p + \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right) \gamma \text{Kn} = \\ & = \frac{C}{2\pi} \int C' \exp(-C'^2) k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') h(\mathbf{r}, \mathbf{C}') d^3 \mathbf{C}' - C h(\mathbf{r}, \mathbf{C}), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\text{Kn} = l_g/b'$ — число Кнудсена; $k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + 3\mathbf{C}\mathbf{C}'/2 + (C^2 - 2)(C'^2 - 2)/2$ — ядро интегрального уравнения. Принимая во внимание, что отношение левой и правой частей уравнения (10) равно γKn , находим

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = C_z G_p \gamma \text{Kn} Z_0(x, y, C_x, C_y). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), приходим к уравнению относительно $Z_0(x, y, C_x, C_y)$:

$$\begin{aligned} \left(C_x \frac{\partial Z_0}{\partial x} + C_y \frac{\partial Z_0}{\partial y} \right) \gamma \text{Kn} + C Z_0(x, y, C_x, C_y) + 1 = \\ = \frac{3C}{4\pi} \int C' \exp(-C'^2) C_z'^2 Z_0(x, y, C_x', C_y') d^3 \mathbf{C}' \end{aligned} \quad (12)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} Z_0(\pm a/2, y, C_x, C_y) &= (1 - \alpha) Z_0(\pm a/2, y, -C_x, C_y), \quad \pm C_x < 0, \\ Z_0(x, \pm 1/2, C_x, C_y) &= (1 - \alpha) Z_0(x, \pm 1/2, C_x, -C_y), \quad \pm C_y < 0, \quad a = a'/b'. \end{aligned}$$

Для нахождения решения уравнения (1) на множестве функций, зависящих от модуля молекулярной скорости, образуем скалярное произведение весом $g(C) = C^5 \exp(-C^2)$:

$$(f_1, f_2) = \int_0^{+\infty} g(C) f_1(C) f_2(C) dC.$$

Обозначим $\mu_1 = \cos \varphi \sin \theta$, $\mu_2 = \sin \varphi \sin \theta$ и перейдем в пространстве скоростей к сферической системе координат $C_x = C\mu_1$, $C_y = C\mu_2$, $C_z = C \cos \theta$, где углы φ и θ отсчитываются от положительных направлений осей C_x и C_z соответственно. Раскладывая $Z_0(x, y, C_x, C_y)$ по ортогональным функциям $e_1 = 1$, $e_2 = 1/C - 3\sqrt{\pi}/8$, получим

$$Z_0(x, y, C_x, C_y) = Z_1(x, y, \mu_1, \mu_2) + \left(\frac{1}{C} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \right) Z_2(x, y, \mu_1, \mu_2). \quad (13)$$

Подставляя (13) в (1), в силу ортогональности функций e_1 , e_2 приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \left(\mu_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial Z_1}{\partial y} \right) \gamma \text{Kn} + Z_1(x, y, \mu_1, \mu_2) + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} = \\ = \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} Z_1(x, y, \mu_1', \mu_2') d\varphi', \\ \left(\mu_1 \frac{\partial Z_2}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial Z_2}{\partial y} \right) \gamma \text{Kn} + Z_2(x, y, \mu_1, \mu_2) + 1 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

с граничными условиями

$$Z_i(\pm a/2, y, \mu_1, \mu_2) = (1 - \alpha) Z_i(\pm a/2, y, -\mu_1, \mu_2), \quad \pm \mu_1 < 0, \quad (15)$$

$$Z_i(x, \pm 1/2, \mu_1, \mu_2) = (1 - \alpha) Z_i(x, \pm 1/2, \mu_1, -\mu_2), \quad \pm \mu_2 < 0, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Исходя из статистического смысла функции распределения, отличная от нуля компонента вектора потока тепла определяется выражением [1]

$$q'_z(x', y') = \frac{m}{2} \int (v_z - u_z(x', y')) |\mathbf{v} - \mathbf{u}(x', y')|^2 f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} = \frac{p_0}{\beta^{1/2}} q_z(x, y), \quad (17)$$

где безразмерная компонента вектора потока тепла

$$\begin{aligned} q_z(x, y) &= \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) d^3\mathbf{C} = \\ &= -\frac{G_p \gamma \text{Kn}}{4\pi^{3/2}} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Z_2(x, y, \mu_1, \mu_2) d\varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) следует, что функция $Z_1(x, y, \mu_1, \mu_2)$ не вносит вклада в вектор потока тепла. Следовательно, решение задачи сводится к отысканию функции $Z_2(x, y, \mu_1, \mu_2)$ из уравнения (14) с граничными условиями (15), (16).

Решение уравнения (14) с граничными условиями (15) и (16) находим методом характеристик [20]. Система уравнений характеристик для (1) имеет вид

$$\frac{dx}{\gamma \text{Kn} \mu_1} = \frac{dy}{\gamma \text{Kn} \mu_2} = -\frac{dZ_2}{Z_2(x, y, \mu_1, \mu_2) + 1} = dt. \quad (19)$$

Интегрируя уравнения системы (19), получаем

$$Z_2(x, y, \mu_1, \mu_2) = W(x, y, \mu_1, \mu_2) - 1, \quad (20)$$

где при отражении молекул от правой стенки $W = W_1$

$$W_1(x, y, \mu_1, \mu_2) = \alpha \exp\left(-\frac{x}{\gamma \text{Kn} \mu_1}\right) \left(\frac{H_+(-\mu_1)}{w(a/2, \mu_1)} + \frac{H_+(\mu_1)}{w(-a/2, \mu_1)} \right), \quad (21)$$

$$\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{2y+1}{2x-a} + \pi, \quad \varphi_1 = \arctg \frac{2y-1}{2x-a} + \pi,$$

при отражении молекул от верхней стенки $W = W_2$

$$W_2(x, y, \mu_1, \mu_2) = \alpha \exp\left(-\frac{y}{\gamma \text{Kn} \mu_2}\right) \left(\frac{H_+(-\mu_2)}{w(1/2, \mu_2)} + \frac{H_+(\mu_2)}{w(-1/2, \mu_2)} \right), \quad (22)$$

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{2y-1}{2x+a} + 2\pi,$$

при отражении молекул от левой стенки $W = W_3$

$$W_3(x, y, \mu_1, \mu_2) = \alpha \exp\left(-\frac{x}{\gamma \text{Kn} \mu_1}\right) \left(\frac{H_+(-\mu_1)}{w(a/2, \mu_1)} + \frac{H_+(\mu_1)}{w(-a/2, \mu_1)} \right), \quad (23)$$

$$\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3, \quad \varphi_3 = \arctg \frac{2y+1}{2x+a} + 2\pi,$$

при отражении молекул от нижней стенки $W = W_4$

$$W_4(x, y, \mu_1, \mu_2) = \alpha \exp\left(-\frac{y}{\gamma \text{Kn} \mu_2}\right) \left(\frac{H_+(-\mu_2)}{w(1/2, \mu_2)} + \frac{H_+(\mu_2)}{w(-1/2, \mu_2)} \right), \quad (24)$$

$$\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4, \quad \varphi_4 = \arctg \frac{2y+1}{2x-a} + 3\pi,$$

$$w(\xi_1, \xi_2) = \exp\left(-\frac{\xi_1}{\gamma \text{Kn} \xi_2}\right) - (1 - \alpha) \exp\left(\frac{\xi_1}{\gamma \text{Kn} \xi_2}\right).$$

Здесь $H_+(\xi)$ — ступенчатая функция Хэвисайда. Подставляя функцию $Z_2(x, y, \mu_1, \mu_2)$, определяемую выражениями (20)–(24), в (1), находим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла:

$$q_z(x, y) = \frac{G_p \gamma \text{Kn}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} W_k(x, y, \mu_1, \mu_2) d\varphi \right). \quad (25)$$

Приведенный поток тепла находим согласно [8] как

$$J_Q = \frac{2\beta^{1/2}}{a'b'p_0} \int_{-b'/2}^{b'/2} \int_{-a'/2}^{a'/2} q'_z(x', y') dx' dy'.$$

Используя выражение (17) для вектора потока тепла $q'_z(x', y')$, получим

$$J_Q = \frac{8}{a} \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} q_z(x, y) dx dy. \quad (26)$$

Значения J_Q/G_p вычислены согласно (26) при различных значениях коэффициента аккомодации тангенциального импульса α и отношениях размеров сечения канала с применением системы компьютерной алгебры Maple 17 на основе алгоритма, приведенного в [21], для $0.5 \leq \text{Kn} \leq 100$ и методом Монте-Карло для $10^{-4} \leq \text{Kn} \leq 0.5$. Результаты вычислений представлены на рис. 1 для $\alpha = 1, 0.9, 0.5$. Кривые 1–5 соответствуют $a = 1, 2, 5, 10$ и 50 .

2. Анализ результатов

В широком диапазоне изменения значений числа Кнудсена анализ данных, представленных на рис. 1, показал, что приведенный поток тепла существенно зависит от коэффициента аккомодации тангенциального импульса, причем наибольшее отклонение значений потока тепла от полученных значений для диффузной модели отражения наблюдается при приближении к свободномолекулярному режиму. Для прямоугольных каналов с одним и тем же отношением размеров сечения уменьшение коэффициента аккомодации тангенциального импульса приводит к монотонному возрастанию потока тепла через поперечное сечение канала. При фиксированном значении числа Кнудсена приведенный поток тепла увеличивается в случае роста отношения сторон сечения канала для каждого из представленных на рис. 1 значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса.

При режиме течения, близком к свободномолекулярному ($\text{Kn} \gg 1$), выражение (26) для J_Q может быть представлено в виде ряда по малому параметру $1/\text{Kn}$. В этом случае, ограничиваясь линейными членами разложения, получим

$$J_Q = \frac{G_p(3-2\alpha)}{2\alpha\sqrt{\pi}} \left(\ln(\sqrt{a^2+1}+a) + a \ln\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}+1} + \frac{1}{a}\right) - \frac{a}{3(1+\sqrt{a^2+1})} - \frac{a}{3(a+\sqrt{a^2+1})} \right). \quad (27)$$

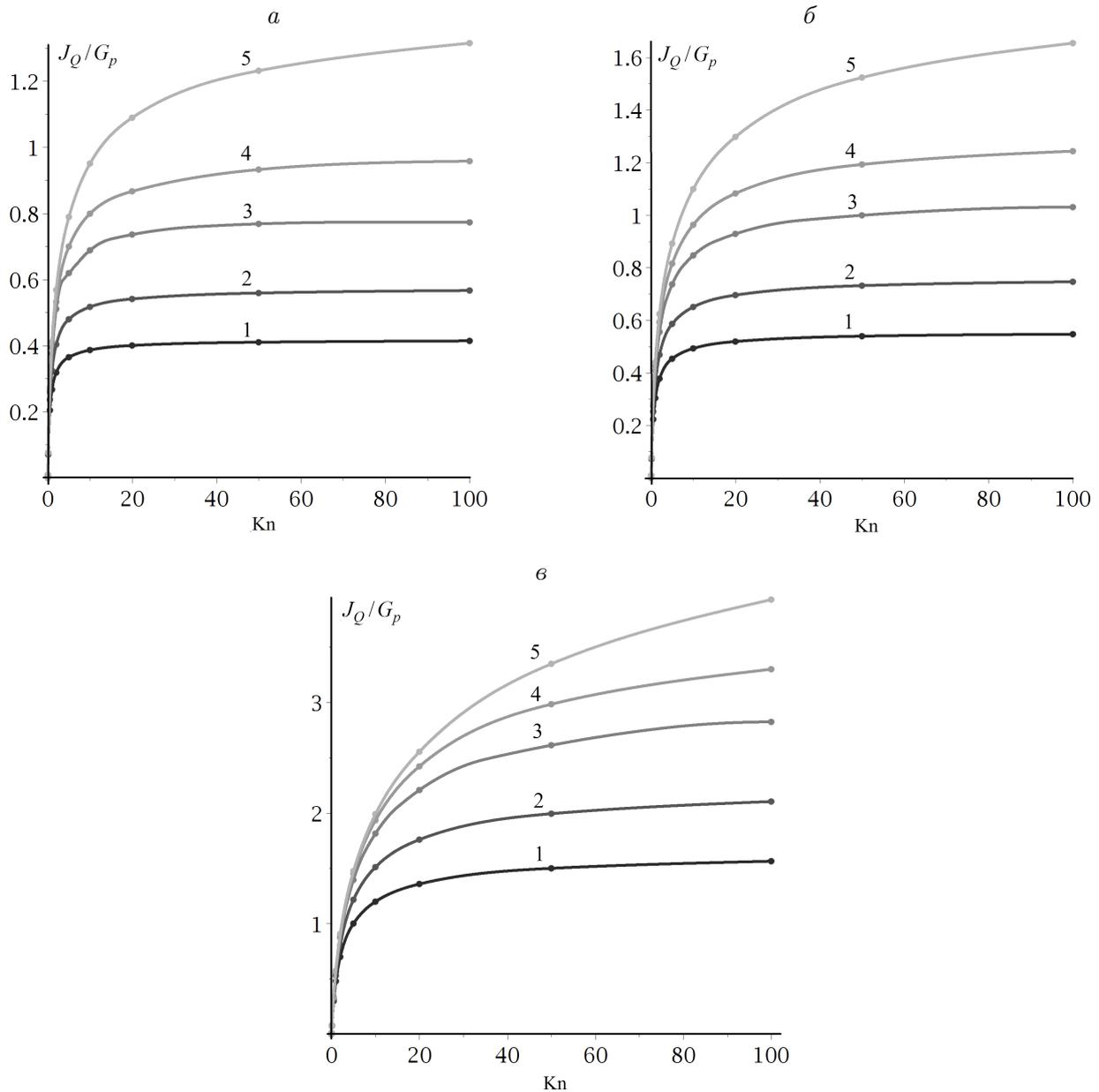


Рис. 1. Приведенный поток тепла J_Q/G_p через поперечное сечение канала для $\alpha = 1$ (а), $\alpha = 0.9$ (б), $\alpha = 0.5$ (в); кривые 1–5 соответствуют $a = 1, 2, 5, 10$ и 50

Выражение (27) определяет приведенный поток тепла через поперечное сечение прямоугольного канала под действием постоянного градиента давления в свободномолекулярном режиме и тождественно совпадает при $\alpha = 1$ с выражением в [11] при использовании диффузной модели отражения молекул газа от стенок канала. При этом для $a \gg 1$ выражение (27) имеет логарифмическую особенность

$$J_Q = \frac{G_p(3 - 2\alpha)}{2\alpha\sqrt{\pi}} \left(\ln(2a) + \frac{1}{2} \right), \quad (28)$$

что также совпадает при $\alpha = 1$ с аналогичными результатами, приведенными в [11] для прямоугольного канала, в котором один из линейных размеров сечения значитель-

но превосходит другой, и для каналов с бесконечными параллельными стенками в [8] в свободномолекулярном режиме.

Для режимов течения, близких к гидродинамическому ($\text{Kn} \ll 1$), в (25) можно пренебречь вторым слагаемым, стоящим в скобках, в силу того, что функции $W_k(x, y, \mu_1, \mu_2)$ экспоненциально убывают с уменьшением значения числа Кнудсена ($k = \overline{1, 4}$). В этом случае, подставляя $q_z(x, y) = G_p \gamma \text{Kn} / (3\sqrt{\pi})$ в (26), приходим к следующему результату:

$$J_Q = \frac{5G_p \text{Kn}}{6}. \tag{29}$$

Таким образом, для режимов, близких к гидродинамическому, значение приведенного потока тепла не зависит от размеров сечения канала и коэффициента аккомодации тангенциального импульса. Последнее утверждение подтверждается результатами, приведенными на рис. 1. Согласно [8] в гидродинамическом режиме ($\text{Kn} = 0$) поток тепла через поперечное сечение равен нулю, что также следует из (29) и анализа значений J_Q/G_p , представленных на рис. 1. Принимая во внимание соотношения Онзагера для потоков массы и тепла в задачах о теплом крипе и течении Пуазейля [8], получаем значение коэффициента теплового скольжения из (29) равным $5/6$, которое совпадает со значением, найденным в [22].

Значения J_Q/G_p , вычисленные согласно (26) и полученные в [11], приведены в таблице в случае диффузного отражения молекул газа от стенок канала ($\alpha = 1$). Отличие приведенных значений потока тепла от [11] обусловлено тем фактом, что значения макропараметров в задаче Пуазейля существенно зависят от выбора модели интеграла столкновений [8].

Профили распределения вектора потока тепла $q_z(x, y)/G_p$ по сечению канала, вычисленные по формуле (25) при значениях коэффициента аккомодации 0.5, 0.9, 1 и отношения сторон $a = 1$, $a = 10$ в свободномолекулярном режиме, приведены на рис. 2. Для канала квадратного сечения форма профиля вектора потока тепла на рис. 2, а представляет собой эллиптический параболоид при полной аккомодации молекул газа на стенках канала. Уменьшение коэффициента аккомодации тангенциального импульса приводит увеличению значений профиля $q_z(x, y)/G_p$ в целом. В случае $\alpha = 0.9$ распределение вектора потока тепла на рис. 2, б имеет локальный максимум в центре канала и максимумы на его стенках. На рис. 2, в и рис. 3, б в профиль вектора потока тепла приближается к плоскости, перпендикулярной оси канала, отклонение от которой имеет место на стенках канала. Профиль вектора потока тепла принимает форму, близкую

Значения J_Q/G_p при $a = a'/b'$ для случая $\alpha = 1$

1/Kn	J_Q/G_p			
	$a = 1$		$a = 10$	
	[11]	(26)	[11]	(26)
0.001	0.4181	0.4186	0.9839	0.9898
0.01	0.4110	0.4142	0.9165	0.9579
0.1	0.3637	0.3866	0.6763	0.7990
0.5	0.2953	0.3182	0.3182	0.5323
1	0.2545	0.2669	0.3553	0.3949
10	0.0868	0.0705	0.0956	0.0758

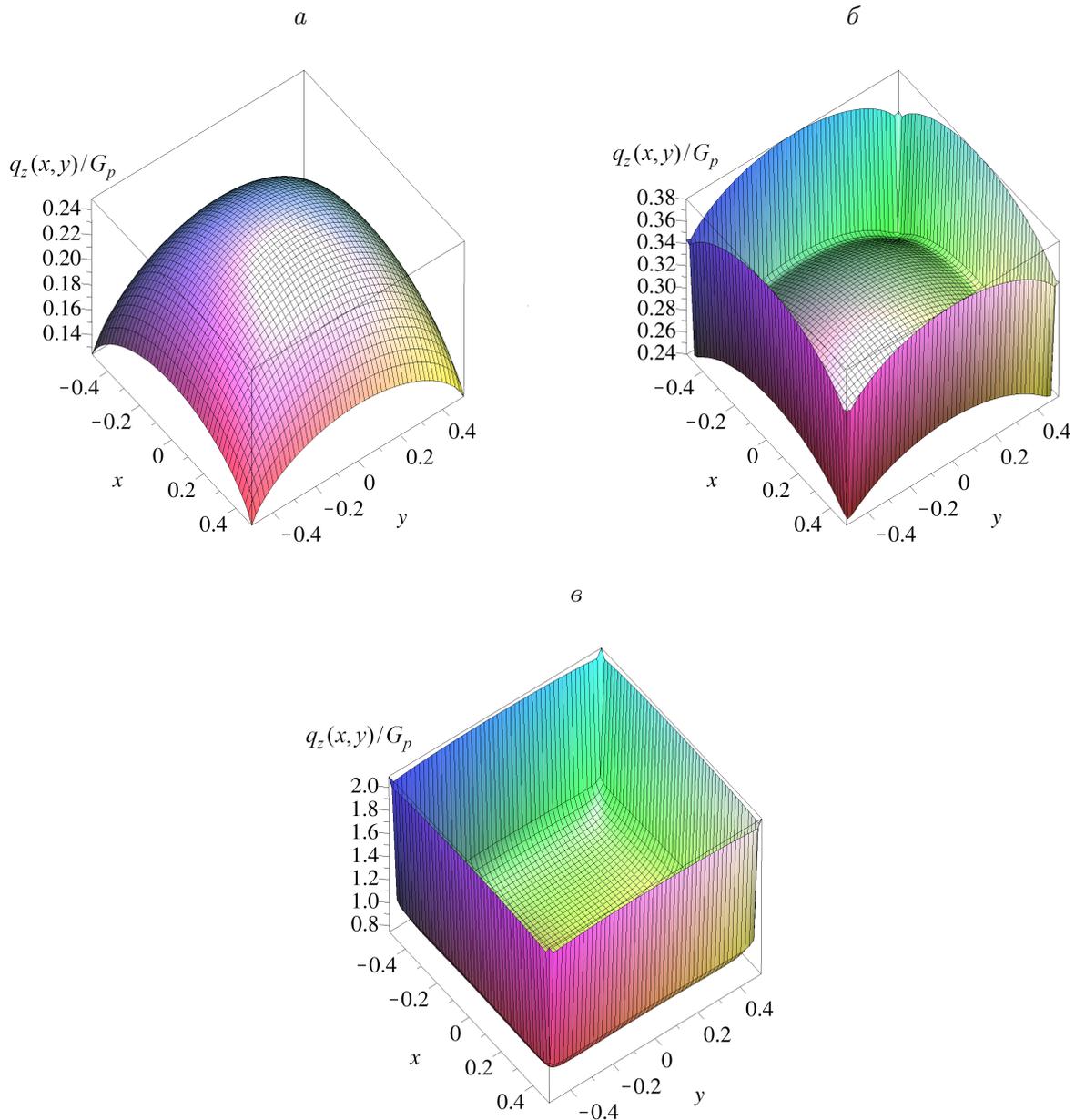


Рис. 2. Профиль компоненты вектора потока тепла $q_z(x, y)/G_p$ в канале при $a = 1$, $\text{Kn} = 10^4$:
 а — $\alpha = 1$, б — $\alpha = 0.9$, в — $\alpha = 0.5$

к параболическому цилиндру на рис. 3, а, когда $\alpha = 1$ и $a = 10$, что имеет место для каналов, стенки которых образованы двумя бесконечными параллельными плоскостями, в рамках диффузной модели отражения.

Заключение

В рамках кинетического подхода найдено аналитическое решение задачи о переносе тепла в канале прямоугольного сечения под действием постоянного градиента давления при использовании диффузно-зеркальной модели отражения Максвелла. Выявлена зависимость потока тепла через поперечное сечение канала от коэффициента аккомодации.

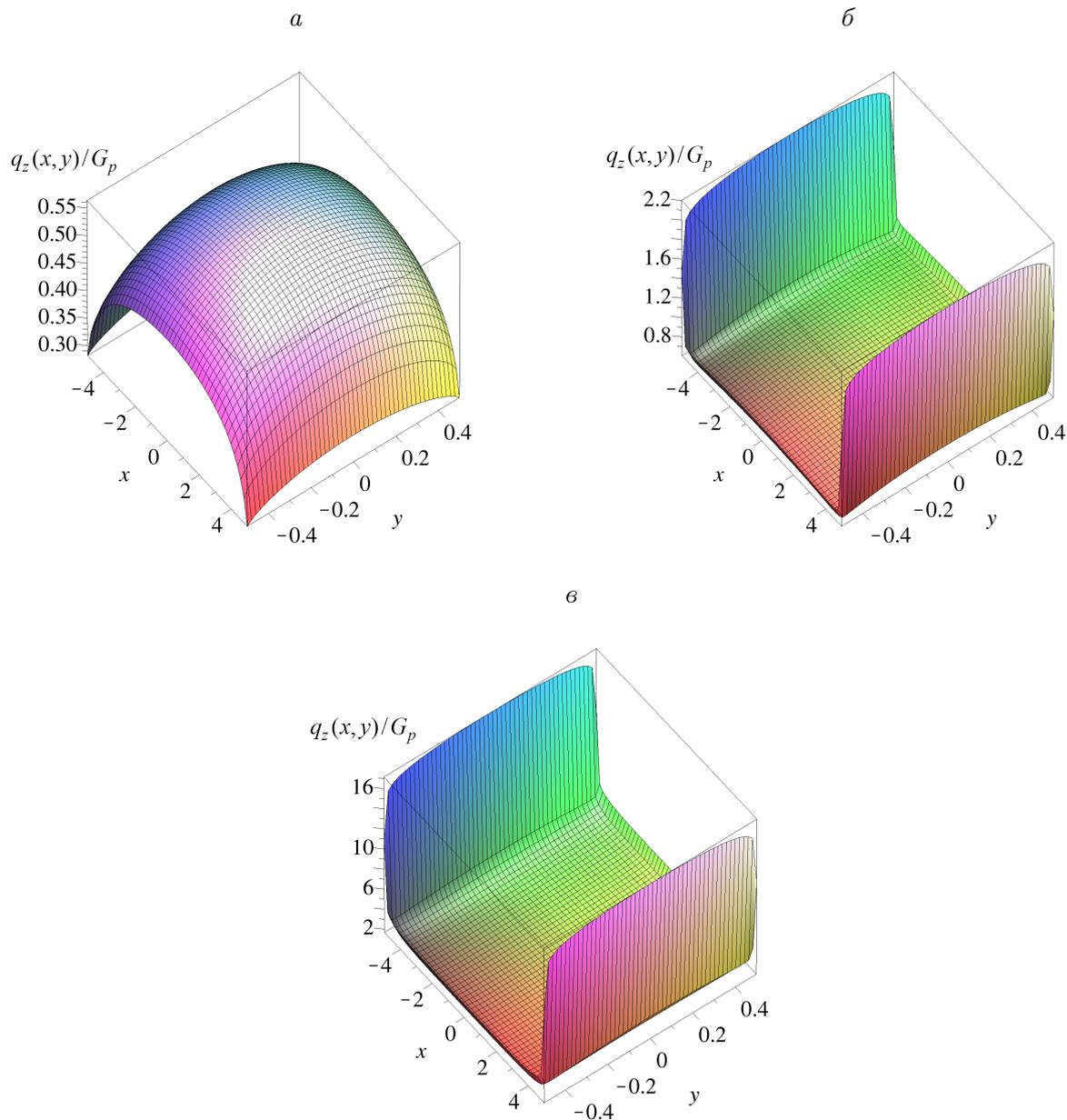


Рис. 3. Профиль компоненты вектора потока тепла $q_z(x, y)/G_p$ в канале при $a = 10$, $Kn = 10^4$:
 $a - \alpha = 1$, $б - \alpha = 0.9$, $в - \alpha = 0.5$

ции тангенциального импульса молекул газа от стенок канала. Полученные результаты позволяют заключить, что наибольшее отклонение значений потока тепла при неполной аккомодации молекул газа на стенках от соответствующих значений для диффузной модели отражения наблюдается при приближении к свободномолекулярному режиму. Для различных значений отношений сторон этого сечения построен профиль вектора потока тепла в зависимости от коэффициента аккомодации тангенциального импульса. Проведено сравнение с аналогичными результатами при полной аккомодации молекул на стенках канала. Показано, что для каналов с одним и тем же отношением размеров сечения уменьшение коэффициента аккомодации тангенциального импульса приводит к монотонному возрастанию потока тепла через поперечное сечение канала. В предель-

ных случаях, когда $\text{Kn} \ll 1$ и $\text{Kn} \gg 1$, полученные в работе результаты переходят в аналогичные для гидродинамического и свободномолекулярного режимов соответственно. Представленный анализ и результаты могут быть использованы для сравнения с эмпирическими данными при разработке и оптимизации микроэлектронных систем и нанотехнологий. Рассмотренный метод построения решения модельного уравнения Вильямса может быть применен к каналам с другой конфигурацией сечения.

Благодарности. Работа выполнена при финансировании в рамках Государственного задания “Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач” (проект № 3628).

Список литературы / References

- [1] **Kogan, M.N.** Rarefied gas dynamics. N.Y.: Plenum Press, 1969. 515 p.
- [2] **Graur, I., Но, М.Т.** Rarefied gas flow through a long rectangular channel of variable cross section // Vacuum. 2014. Vol. 101. P. 328–332.
- [3] **Kim, J., Frijns, A.J.H., Nedea, S.V., Anton, A.A.** Geometry effects on rarefied nanochannel flows // Microfluidics and Nanofluidics. 2013. Vol. 15. P. 661–673.
- [4] **Cercignani, C.** Mathematical methods in kinetic theory. N.Y.: Plenum Press, 1969. 227 p.
- [5] **Cercignani, C., Lampis, M.** Kinetic model for gas-surface interaction // Transport theory statist. Phys. 1971. Vol. 1. P. 101–114.
- [6] **Gulakova, S.V., Попов, V.N.** Analytic solution to the Williams equation in the Poiseuille flow problem using mirror–diffuse model of interaction of gas molecules with the channel walls // Technical Physics. 2015. Vol. 60, No. 4. P. 477–482.
- [7] **Siewert, С.Е.** The linearized Boltzmann equation: concise and accurate solutions to basic flow problems // Z. Angew. Math. Phys. 2003. Vol. 54. P. 273–203.
- [8] **Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д.** Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. 230 с.
Sharipov, F.M., Seleznev, V.D. Motion of rarefied gases in channels and microchannels. Ekaterinburg: UrO RAN, 2008. 230 p. (In Russ.)
- [9] **Ewart, T., Graur, I., Perrier, P., Meolans, J.G.** Tangential momentum accommodation in microtube // Microfluidics and Nanofluidics. 2007. Vol. 26, No. 6. P. 689–695.
- [10] **Silva, E., Rojas-Cardenas, M., Deschamps, C.J.** Experimental analysis of velocity slip at the wall for gas flows of nitrogen, R134a, and R600a through a metallic microtube // Intern. J. of Refrigeration. 2016. Vol. 66. P. 121–132.
- [11] **Sharipov, F.M.** Rarefied gas flow through a long rectangular channel // J. of Vacuum Sci. and Technology. A. 1999. Vol. 17, No. 5. P. 3062–3066.
- [12] **Titarev, V.A., Shakhov, E.M.** Kinetic analysis of an isothermal flow in a long microchannel with rectangular cross section // Comput. Mathematics and Math. Physics. 2010. Vol. 50, No. 7. P. 1221–1237.
- [13] **Naris, S., Valougeorgis, D.** Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice // Europ. J. Mech. — B/Fluids. 2008. Vol. 27. P. 810–822.
- [14] **Germider, O.V., Попов, V.N., Yushkanov, A.A.** Computation of the heat flux in a cylindrical duct within the framework of the kinetic approach // J. Eng. Phys. and Thermophysics. 2016. Vol. 89, No. 5. P. 1338–1343.

- [15] **Kamphorst, C.H., Rodrigues, P., Barichello, L.B.** A closed-form solution of a kinetic integral equation for rarefied gas flow in a cylindrical duct // *Applied Mathematics*. 2014. Vol. 5. P. 1516–1527.
- [16] **Siewert, C.E., Valougeorgis, D.** An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube // *J. Quant. Spectroscopy & Radiat. Transfer*. 2002 Vol. 72. P. 531–550.
- [17] **Graur, I., Sharipov, F.** Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction // *Europ. J. Mech. — B/Fluids*. 2008. Vol. 27. P. 335–345.
- [18] **Germider, O.V., Popov, V.N., Yushkanov, A.A.** Computation of the gas mass and heat fluxes in a rectangular channel in the free molecular regime // *Technical Physics*. 2016. Vol. 61, No. 6. P. 835–840.
- [19] **Pantazis, S., Varoutis, S., Hauer, V., Day, C., Valougeorgis, D.** Gas-surface scattering effect on vacuum gas flows through rectangular channels // *Vacuum*. 2011. Vol. 85. P. 1161–1164.
- [20] **Courant, P.** *Partial Differential Equations*. N.Y.; London: Intersci. Publ., 1962. 830 p.
- [21] **Bernsten, J., Espelid, T.O. Genz, A.** Algorithm 698: DCUHRE: an adaptive multidimensional integration routine for a vector of integrals // *ACM Transactions on Mathematical Software*. 1991. Vol. 17. P. 452–456.
- [22] **Латышев А.В., Юшканов А.А.** Аналитическое решение граничных задач для кинетических уравнений. М.: МГОУ, 2004. 286 с.
Latyshev, A.V., Yushkanov, A.A. Analytic solution of boundary value problems for kinetic equations. Moscow: MGOU, 2004. 286 p. (In Russ.)

Поступила в редакцию 16 января 2017 г.

Mathematical modelling of heat transfer process in a rectangular channel in the problem on the Poiseuille flow with diffuse-specular boundary conditions

GERMIDER, OKSANA V., POPOV, VASILY N.*

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, 163002, Russia

*Corresponding author: Popov, Vasily N., e-mail: v.popov@narfu.ru

The process of heat transfer in a channel of rectangular cross section in the case of mirror-diffuse reflection of gas molecules from the walls of the channel model is considered. As the basic equation describing the kinetics of the process, the equation of Williams is used. It is assumed that in the channel a constant pressure gradient is maintained. The pressure gradient is assumed small in magnitude and direction along the axis of symmetry of the channel. In this case, the deviation of the state of a rarefied gas from the equilibrium state is small. This circumstance made it possible to construct a solution of the Williams kinetic equation in the linearized form. The linearization is carried out with respect to locally equilibrium distribution function with parameters set on the channel walls. From the statistical sense of the distribution function of molecules of a gas on coordinates and velocity components the expression for the heat flux vector,

depending on the accommodation coefficient of tangential momentum of gas molecules from the walls of the channel is obtained.

The results obtained in this work show, that the greatest deviation of the values of heat flux obtained for a partial accommodation of gas molecules on the walls from the corresponding values, obtained for a diffuse reflection model, is observed approaching the free molecular regime. Moreover, for other flow regimes the heat flow values also increase with a decrease in the coefficient of accommodation of the tangential momentum, but more slowly, reaching an asymptotic limit in hydrodynamic flow regime.

For different values of the coefficient of accommodation of the tangential momentum and the relations section sides the heat flux vector profile of the channel is built. A comparison with similar results in complete accommodation of the molecules at the channel walls is done. It is shown that for the channels with the same reduction ratio of sectional sizes of the accommodation coefficient of tangential momentum profile increases the heat flux vector in general. It is shown that for the channels with the same reduction ratio of sectional sizes the decrease of the accommodation coefficient of tangential momentum leads to an increase of heat flux profile vectors in general. The present analysis and the results can be used for comparison with empirical data in the development and optimization of microelectronic systems and nanotechnology. Considered method of constructing solutions of Williams's model equation can also be applied to the channels of the other sectional configuration.

Keywords: diffuse-specular reflection model, a rarefied gas, accommodation coefficient of tangential momentum.

Acknowledgements. This research was partly supported by state project "Development of Computational Infrastructure for Solving Science-intensive Applied Problems" (project No. 3628).

Received 16 January 2017