

Численная реализация итерационной схемы решения обратных задач термоупругости для неоднородных тел с покрытиями

А. О. ВАТУЛЯН^{1,*}, С. А. НЕСТЕРОВ²

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия

*Контактный e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Рассмотрена динамическая обратная задача термоупругости для неоднородного слоя с функционально-градиентным покрытием. Обратная задача состоит в определении термомеханических характеристик слоя с учетом наличия точки разрыва первого рода на границе покрытия и подложки. Схема решения основана на сведении задачи с помощью преобразования Фурье к двум более простым одномерным несвязанным задачам относительно усредненных характеристик. Прямая задача термоупругости после применения преобразования Лапласа решается методом сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода и обращения решений на основе теории вычетов. Для решения обратной задачи построен итерационный процесс, на каждом этапе которого находятся поправки восстанавливаемых характеристик путем решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, термоупругость, неоднородные тела с покрытиями.

Введение

Во многих отраслях промышленности для повышения коррозионной стойкости изделий, устойчивости к износу и растрескиванию, а также способности функционировать в широком диапазоне температур используются функционально-градиентные покрытия — композиционные материалы с переменными по глубине термомеханическими характеристиками [1, 2]. К термомеханическим относятся теплофизические характеристики — коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость, коэффициент температурного напряжения и механические характеристики — модули упругости, плотность материала.

Исследование задачи термоупругости для неоднородных тел с покрытиями приводит к решению краевых задач для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. Часто при решении задач термомеханики для неоднородных тел ограничиваются степенными и экспоненциальными законами изменения термомеханических характеристик [3–5]. В случае произвольных законов неоднородности основными вычислительными технологиями выступают методы конечных элементов и конечных разностей.

Производство материалов с функционально-градиентными покрытиями — сложный технологический процесс. В силу многоступенчатости технологических операций в конечном изделии могут присутствовать отклонения от установленных норм. В случае функционально-градиентных покрытий прямые измерения термомеханических характеристик невозможны, поскольку они представляют собой некоторые функции координат. В связи с этим требуется разработка эффективной технологии контроля качества неоднородных материалов с покрытиями на основе решения коэффициентных обратных задач (КОЗ) термоупругости по некоторой информации о следах решений (дополнительной информации). Исследования в области КОЗ термоупругости посвящены в основном слоистым материалам [6], слабо неоднородным материалам [7] или идентификации характеристик полубесконечной вертикально-неоднородной термоупругой среды [8].

Если дополнительную информацию можно получить только на границе тела, то обратная задача существенно нелинейна. Задачи такого типа решаются только на основе построения итерационного процесса, на каждом этапе которого решается линейная задача. В работах [9–12] представлено решение обратной задачи термоупругости для стержня [9, 10], слоя [11] и цилиндра [12]. При этом восстанавливалась только одна из термомеханических характеристик при известных остальных. Каждая из теплофизических характеристик восстанавливалась исходя из данных эксперимента с тепловым способом нагружения, а в качестве дополнительной информации выступала температура, измеренная на границе тела. Механические характеристики восстанавливались из эксперимента с механическим способом нагружения, а в качестве дополнительной информации было принято смещение, измеренное на границе тела.

Для решения КОЗ термоупругости построен итерационный процесс, на каждом шаге которого для нахождения поправок восстанавливаемых коэффициентов решались линеаризованные интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Однако обычно на практике неизвестными являются несколько термомеханических характеристик тела. Если при решении КОЗ необходимо определить несколько независимых функций, то для обеспечения их эффективной реконструкции необходимо провести ряд экспериментов с различными типами нагружения и снять дополнительную информацию в каждом эксперименте. Так, в [13] представлен подход к решению обратной задачи теплопроводности об одновременной идентификации коэффициента теплопроводности и удельной объемной теплоемкости функционально-градиентного стержня. В качестве входной информации выступали данные измерений температуры и потоков тепла на торце стержня, снятые в ходе двух теплофизических экспериментов. Задача одновременной идентификации теплофизических характеристик сводилась к итерационному процессу, на каждом этапе которого решалась система интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В работах [9–13] исследовались задачи восстановления термомеханических характеристик, имеющих вид непрерывных функций. При этом неизученным остался вопрос об идентификации термомеханических характеристик, представленных функциями, имеющими точку разрыва первого рода. Решению этой задачи и посвящена данная работа.

В работе слой с покрытием моделируется в виде термоупругого слоя с неоднородными по глубине термомеханическими свойствами. Функции, характеризующие неоднородность, имеют точки разрыва первого рода на границе соприкосновения покрытия с подложкой. Схема решения основана на предварительном сведении с помощью преобразования Фурье к двум более простым и одномерным несвязанным задачам относительно

усредненных характеристик, каждая из которых сводится к известной КОЗ, что позволяет использовать ранее построенные в [9–11] итерационные схемы и регуляризующие алгоритмы. Задача для слоя в трансформантах решается на основе метода сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В вычислительных экспериментах восстанавливалась одна из термомеханических характеристик при известных остальных. В ходе вычислительных экспериментов проведен анализ влияния жесткости и относительной толщины покрытия на результаты реконструкции неоднородных термомеханических характеристик. Даны практические рекомендации по выбору наиболее информативных временных интервалов для измерения входной информации.

1. Постановка задачи термоупругости для слоя

Рассмотрим задачу о неустановившихся колебаниях изотропного термоупругого слоя с функционально-градиентным покрытием, занимающего область $(x_1 \in (-\infty, \infty), x_2 \in (-\infty, \infty), x_3 \in [0, h])$ в условиях плоской деформации. Нижняя грань слоя $x_3 = h$ жестко закреплена и поддерживается при нулевой температуре, а на верхней грани ($x_3 = 0$) приложены механические и тепловые нагрузки. Слой с функционально-градиентным покрытием моделируется в виде термоупругого слоя с неоднородными по координате x_3 термомеханическими характеристиками, функции которых имеют точку разрыва первого рода на границе покрытие — подложка. При заданных граничных условиях и геометрии задачи в случае плоской деформации температура и смещения не зависят от координаты x_2 . Начально-краевая задача термоупругости для слоя при нулевых начальных условиях имеет вид [11]

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \gamma \theta, \quad \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \gamma \theta, \quad \sigma_{13} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right) = c \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right),$$

$$\sigma_{13}(x_1, 0, t) = F_2(x_1, t), \quad \sigma_{33}(x_1, 0, t) = F_1(x_1, t), \quad q(x_1, 0, t) = F_3(x_1, t),$$

$$u_1(x_1, h, t) = u_3(x_1, h, t) = \theta(x_1, h, t) = 0,$$

$$u_1(x_1, x_3, 0) = u_3(x_1, x_3, 0) = \theta(x_1, x_3, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_1, x_3, 0) = \frac{\partial u_3}{\partial t}(x_1, x_3, 0) = 0. \quad (1)$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, q — тепловой поток; u_i — компоненты вектора перемещения; $\theta = T - T_0$ — приращение температуры T от естественного состояния с температурой T_0 ; λ и μ — коэффициенты Ламе; ρ — плотность; c — удельная объемная теплоемкость при постоянном тензоре деформации; γ — коэффициент температурного напряжения; k — коэффициент теплопроводности. Введенные материальные функции имеют точку разрыва первого рода на границе покрытие — подложка.

Упростим задачу (1). Применяя к ней преобразование Фурье по координате x_1 , получим систему дифференциальных уравнений относительно трансформант компонент

полей смещений и температуры. Положив параметр преобразования Фурье равным нулю, т. е. осредняя введенные в задаче (1) функции по переменной x_1 , получим, что задача распадается на две более простые несвязанные задачи относительно усредненных по x_1 компонент полей.

Задача 1

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_3} \right) = \rho \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial t^2},$$

$$\hat{\sigma}_{13}(0, t) = \hat{F}_2(t), \quad \hat{u}_1(h, t) = 0, \quad \hat{u}_1(x_3, 0) = \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t}(x_3, 0) = 0. \quad (2)$$

Задача 2

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} (\gamma \hat{\theta}) = \rho \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial t^2},$$

$$c \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_3} \right) + T_0 \gamma \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial x_3 \partial t} = 0, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_3} - \gamma \hat{\theta}|_{x_3=0} = \hat{F}_1(t),$$

$$-k(x_3) \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_3} |_{x_3=0} = \hat{F}_3(t), \quad \hat{u}_3(h, t) = \hat{\theta}(h, t) = 0,$$

$$\hat{\theta}(x_3, 0) = \hat{u}_3(x, 0) = \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t}(x_3, 0) = 0. \quad (3)$$

Здесь символы с крышкой обозначают трансформанту, получающуюся в результате применения преобразования Фурье по координате x_1 к соответствующей функции.

Подробно исследуем вторую задачу. Обезразмерим задачу (3), введя следующие параметры и функции:

$$z = \frac{x_3}{h}, \quad U = \frac{\hat{u}_3}{h}, \quad s = \lambda + 2\mu,$$

$$\bar{s}(z) = \frac{s(x_3)}{s_0}, \quad W = \frac{\gamma_0 \hat{\theta}}{s_0}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{s_0}{\rho_0}},$$

$$t_1 = \frac{h}{v_2}, \quad t_2 = \frac{h^2 c_0}{k_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_2},$$

$$\bar{k}(z) = \frac{k(x_3)}{k_0}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\rho(x_3)}{\rho_0}, \quad \bar{c}(z) = \frac{c(x_3)}{c_0},$$

$$\bar{\gamma}(z) = \frac{\gamma(x_3)}{\gamma_0}, \quad \varepsilon = \frac{t_2}{t_1}, \quad \delta_0 = \frac{\gamma_0 T_0}{s_0 c_0},$$

$$f_1(\tau) = \frac{\hat{F}_1(t)}{s_0}, \quad f_3(\tau_2) = \frac{\hat{F}_3(t)}{k_0 s_0} h \gamma_0, \quad k_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} k(x_3), \quad c_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} c(x_3),$$

$$\gamma_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} \gamma(x_3), \quad \rho_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} \rho(x_3), \quad s_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} s(x_3).$$

После обезразмеривания задача (3) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{s}(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\gamma}(z) W) = \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \delta_0 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau},$$

$$\bar{s}(z) \frac{\partial U}{\partial z} - \bar{\gamma} W|_{z=0} = f_1(\tau), \quad -\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z}|_{z=0} = f_3(\tau), \quad U(1, \tau) = W(1, \tau) = 0,$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, 0) = 0. \quad (4)$$

Прямая задача термоупругости заключается в определении функций $U(z, \tau)$ и $W(z, \tau)$ из (4) при известных термомеханических характеристиках $\bar{k}(z)$, $\bar{c}(z)$, $\bar{\gamma}(z)$, $\bar{s}(z)$, $\bar{\rho}(z)$. Задача, подобная (4), возникает при описании продольных колебаний неоднородного по длине термоупругого стержня. Для произвольных законов изменения термомеханических характеристик эта задача после преобразования Лапласа может быть решена лишь численно, например, с привлечением аппарата интегральных уравнений Фредгольма второго рода и теории вычетов [9, 10].

В обратной задаче термоупругости требуется одновременно определить термомеханические характеристики $\bar{k}(z)$, $\bar{c}(z)$, $\bar{\gamma}(z)$, $\bar{s}(z)$, $\bar{\rho}(z)$ из (4) по дополнительной информации на верхней грани слоя. В качестве дополнительной информации служат данные о смещении g_1 , измеренные на информативном временном отрезке $[a_1, b_1]$

$$U(0, \tau) = g_1(\tau), \quad \tau \in [a_1, b_1], \quad (5)$$

или данные о приращении температуры g_2 , измеренные на информативном временном отрезке $[a_2, b_2]$

$$W(0, \tau) = g_2(\tau), \quad \tau \in [a_2, b_2]. \quad (6)$$

Решение обратной задачи приводит к нелинейной проблеме, которая может быть решена на основе итерационного процесса. Стоит отметить, что задачи реконструкции термомеханических величин, характеризующихся непрерывными функциями, решены в [9–13]. В данной работе на основе алгоритма, построенного в [11], восстанавливаются функции, имеющие точку разрыва первого рода на границе соприкосновения покрытия с подложкой.

2. Итерационный процесс

Итерационный процесс по восстановлению термомеханических характеристик слоя с покрытием подобно описанному в [11] построен путем последовательного решения интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода, он состоит из нескольких этапов.

Этап 1. Решение прямой задачи термоупругости для $n - 1$ -приближения

Из решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода в трансформантах Лапласа по известным $n - 1$ -приближениям функций $\bar{s}^{(n-1)}(z)$, $\bar{\rho}^{(n-1)}(z)$, $\bar{k}^{(n-1)}(z)$, $\bar{c}^{(n-1)}(z)$, $\bar{\gamma}^{(n-1)}(z)$ определяем функции $\tilde{W}^{(n-1)}$, $\tilde{\Omega}^{(n-1)}$ [9–11]:

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{(n-1)}(z, p) &= \int_0^1 K_1^{(n-1)}(z, \xi, p) \tilde{W}^{(n-1)}(\xi, p) d\xi + \\ &+ \int_0^1 K_2^{(n-1)}(z, \xi, p) \tilde{\Omega}^{(n-1)}(\xi, p) d\xi + d^{(n-1)}(z, p), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\tilde{\Omega}^{(n-1)}(z, p) = \int_0^1 K_3^{(n-1)}(z, \xi, p) \tilde{W}^{(n-1)}(\xi, p) d\xi + \int_0^1 K_4^{(n-1)}(z, \xi, p) \tilde{\Omega}^{(n-1)}(\xi, p) d\xi, \quad (8)$$

где

$$K_1^{(n-1)}(z, \xi, p) = -p \left(\bar{c}^{(n-1)}(\xi) + \delta_0 \frac{(\bar{\gamma}^{(n-1)})^2(\xi)}{\bar{s}^{(n-1)}(\xi)} \right) \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}^{(n-1)}(\eta)},$$

$$K_2^{(n-1)}(z, \xi, p) = -p \delta_0 \frac{\bar{\gamma}^{(n-1)}(\xi)}{\bar{s}^{(n-1)}(\xi)} \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}^{(n-1)}(\eta)},$$

$$K_3(z, \xi, p) = -p^2 \frac{\bar{\gamma}^{(n-1)}(\xi)}{\bar{s}^{(n-1)}(\xi)} \int_{\min\{z, \eta\}}^1 \bar{\rho}^{(n-1)}(\eta) d\eta,$$

$$K_4^{(n-1)}(z, \xi, p) = p^2 \frac{1}{\bar{s}^{(n-1)}(\eta)} \int_{\min\{z, \eta\}}^1 \bar{\rho}^{(n-1)}(\eta) d\eta,$$

$$d^{(n-1)}(z, p) = \tilde{f}_1(p) + \tilde{f}_3(p) \int_0^z \frac{d\xi}{\bar{k}^{(n-1)}(\xi)}.$$

В формулах верхний индекс означает номер итерации. Система уравнений (7), (8) решается численно на основе метода коллокаций. При этом интегральные операторы аппроксимируются конечномерными и задача сводится к решению алгебраической системы относительно узловых неизвестных.

Этап 2. Нахождение поправок к восстанавливаемым функциям

Поправки термомеханических характеристик $\delta \bar{s}^{(n-1)}(z)$, $\delta \bar{\rho}^{(n-1)}(z)$, $\delta \bar{k}^{(n-1)}(z)$, $\delta \bar{c}^{(n-1)}(z)$, $\delta \bar{\gamma}^{(n-1)}(z)$ должны удовлетворять двум интегральным уравнениям Фредгольма первого рода в трансформантах Лапласа, полученных в [9–11].

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta \bar{s}^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p^2 \int_0^1 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} (\tilde{U}^{(n-1)})^2 dz + \\ & + \int_0^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}^{(n-1)} dz = \tilde{f}_1(p) (\tilde{g}_1(p) - \tilde{U}^{(n-1)}(0, p)), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} (W^{(n-1)})^2 dz + \\ & + \delta_0 p \int_0^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}^{(n-1)} dz = \tilde{f}_3(p) (\tilde{g}_2(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(0, p)). \end{aligned} \quad (10)$$

При решении обратной задачи термоупругости на конечном временном интервале к уравнениям в трансформантах (9), (10) применяют теоремы операционного исчисления о свертке и дифференцировании оригинала. Тогда операторные уравнения в оригиналах будут иметь вид

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta \bar{s}^{(n-1)} M_1(z, \tau) dz + \int_0^1 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} M_2(z, \tau) dz + \int_0^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} M_3(z, \tau) dz = \\ & = \int_0^\tau f_1(\tau - \tau_1)(g_1(\tau_1) - U^{(n-1)}(0, \tau_1)) d\tau_1, \quad \tau \in [a_1, b_1], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} M_4(z, \tau) dz + \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} M_5(z, \tau) dz + \int_0^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} M_6(z, \tau) dz = \\ & = \int_0^\tau f_3(\tau - \tau_1)(g_2(\tau_1) - W^{(n-1)}(0, \tau_1)) d\tau_1, \quad \tau \in [a_2, b_2], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} M_1(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial U^{(n-1)}(z, \tau)}{\partial z} \frac{\partial U^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial z} d\tau_1, \\ M_2(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial U^{(n-1)}(z, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial U^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial \tau} d\tau_1, \\ M_3(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial U^{(n-1)}(z, \tau)}{\partial z} W^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1) d\tau_1, \\ M_4(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial W^{(n-1)}(z, \tau)}{\partial z} \frac{\partial W^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial z} d\tau_1, \\ M_5(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial W^{(n-1)}(z, \tau)}{\partial \tau} W^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1) d\tau_1, \\ M_6(z, \tau) &= \int_0^\tau \frac{\partial U^{(n-1)}(z, \tau)}{\partial z} \frac{\partial W^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial \tau} d\tau_1. \end{aligned}$$

Поскольку неизвестны сразу все термомеханические характеристики слоя, решение обратной задачи сопряжено со значительными математическими трудностями. Поэтому для изучения проблем, которые возникают при решении обратных задач термоупругости для тел с неоднородными покрытиями, целесообразно провести исследование, где неизвестной является только одна из характеристик при известных остальных. Случаю восстановления одной непрерывной функции при известных остальных в итерационном процессе посвящены работы [9–11]. В данной работе восстанавливается одна

из термомеханических функций, имеющая точку разрыва первого рода при известных остальных. При этом в итерационном процессе используются формулы (11), (12), вид которых в случае восстановления только одной функции значительно упрощается. Так, для нахождения поправок $\delta\bar{k}$ и $\delta\bar{c}$ используется интегральное уравнение (12), в котором ненулевыми являются: в первом случае ядро $M_4(z, \tau)$, а во втором — ядро $M_5(z, \tau)$. Для нахождения поправок $\delta\bar{s}$ используется интегральное уравнение (11), в котором ненулевым является ядро $M_1(z, \tau)$.

Нахождение поправок из решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода является некорректной задачей и требует регуляризации. В работе применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова. С этой целью осуществлена дискретизация интегральных уравнений, основанная на методе коллокаций с применением квадратурной формулы трапеций. Согласно методу Тихонова [14] решение обратной задачи сводится к решению регуляризованной системы алгебраических уравнений с выбором параметра регуляризации по обобщенной невязке.

После нахождения поправок получают скорректированные функции $\bar{s}^{(n)}(z) = \bar{s}^{(n-1)}(z) + \delta\bar{s}^{(n-1)}(z)$, $\bar{\rho}^{(n)}(z) = \bar{\rho}^{(n-1)}(z) + \delta\bar{\rho}^{(n-1)}(z)$, $\bar{k}^{(n)}(z) = \bar{k}^{(n-1)}(z) + \delta\bar{k}^{(n-1)}(z)$, $\bar{c}^{(n)}(z) = \bar{c}^{(n-1)}(z) + \delta\bar{c}^{(n-1)}(z)$, $\bar{\gamma}^{(n)}(z) = \bar{\gamma}^{(n-1)}(z) + \delta\bar{\gamma}^{(n-1)}(z)$.

Этап 3. Проверка условия выхода

В результате реализации итерационного процесса получим функции $\bar{s}^{(n)}(z)$, $\bar{\rho}^{(n)}(z)$, $\bar{k}^{(n)}(z)$, $\bar{c}^{(n)}(z)$, $\bar{\gamma}^{(n)}(z)$, которые дают приближенное решение КОЗ (1)–(6) при удовлетворении условия выхода. В противном случае нужно скорректировать ядра соответствующих интегральных операторов для построения решения на следующей итерации.

В качестве условий выхода приняты

$$n \geq N, \quad (13)$$

$$J_1^{(n-1)} = \int_{a_1}^{b_1} (g_1(\tau) - U^{(n-1)}(0, \tau))^2 dz < \varepsilon, \quad (14)$$

$$J_2^{(n-1)} = \int_{a_2}^{b_2} (g_2(\tau) - W^{(n-1)}(0, \tau))^2 dz < \varepsilon. \quad (15)$$

Здесь N — максимально допустимое количество итераций.

Необходимо отметить, что первый этап итерационного процесса требует знания начального приближения. Начальное приближение термомеханических характеристик для покрытия определяется среди ограниченных линейных функций из условия минимума соответствующего функционала невязки (14), (15).

3. Вычислительные эксперименты

При проведении вычислительных экспериментов принято: $f_1(\tau) = H(\tau)$, $f_3(\tau) = H(\tau)$, $\delta_0 = 0.05$. Предполагаются известными толщина покрытия и подложки, а также термомеханические характеристики подложки.

При решении обратных задач важно, чтобы изменение восстанавливаемых функций влекло за собой существенное изменение измеряемой в эксперименте дополнительной

информации. Вычислительные эксперименты проведены для того, чтобы узнать, какие из термомеханических характеристик покрытия оказывают существенное влияние на снимаемую на верхней грани слоя дополнительную информацию. Каждая из термомеханических характеристик покрытия принималась в два раза большей по величине, чем характеристика подложки. Вычислялись: 1) температура на верхней грани слоя при тепловом нагружении; 2) смещение на верхней грани слоя при механическом нагружении. Вычисления показали, что существенное влияние на изменение температуры оказывало изменение теплофизических характеристик покрытия — коэффициента теплопроводности \bar{k} и удельной теплоемкости \bar{c} , а на смещение — изменение модуля упругости \bar{s} . Эти факты объясняются малостью параметра связанности δ_0 , входящего в ядра системы интегральных уравнений (7), (8).

На рис. 1 представлен график зависимости температуры от времени на верхней грани слоя при тепловом способе нагружения. Сплошная кривая — для слоя без покрытия, штриховая — для слоя с коэффициентом теплопроводности покрытия, который в два раза больше теплопроводности подложки, значки — для слоя с удельной теплоемкостью покрытия, которая в два раза больше теплоемкости подложки. Из рис. 1 видно, что изменение коэффициента теплопроводности в покрытии влияет на предельное значение измеряемой температуры, а изменение удельной теплоемкости в покрытии — на скорость изменения температуры.

Далее приведены результаты вычислительных экспериментов по реконструкции безразмерных термомеханических характеристик покрытия (\bar{k} , \bar{c} , и \bar{s}), изменение которых оказывает существенное влияние на дополнительную информацию. Выход из итерационного процесса во всех экспериментах проводился либо по условию (13) при $N = 20$, либо по условиям (14), (15) при $\varepsilon = 10^{-4}$.

В ходе анализа дополнительной информации выявлены наиболее информативные с точки зрения идентификации временные интервалы. Для идентификации с высокой точностью исследователю важно знать дополнительную информацию лишь в небольшом числе точек — в тех точках временного диапазона, где дополнительная инфор-

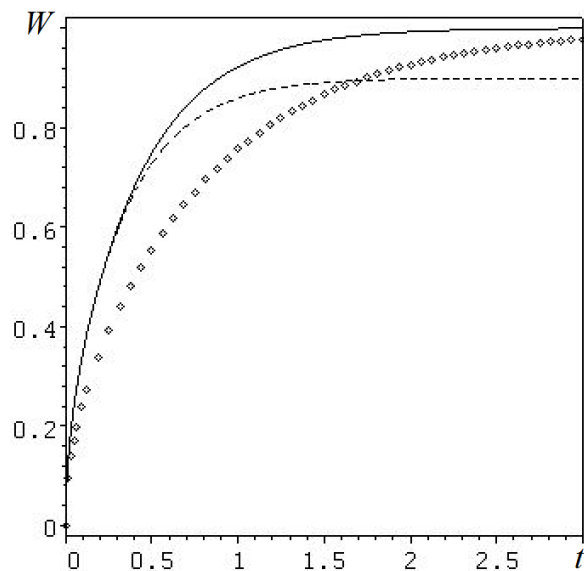


Рис. 1. Изменение температуры на верхней грани слоя

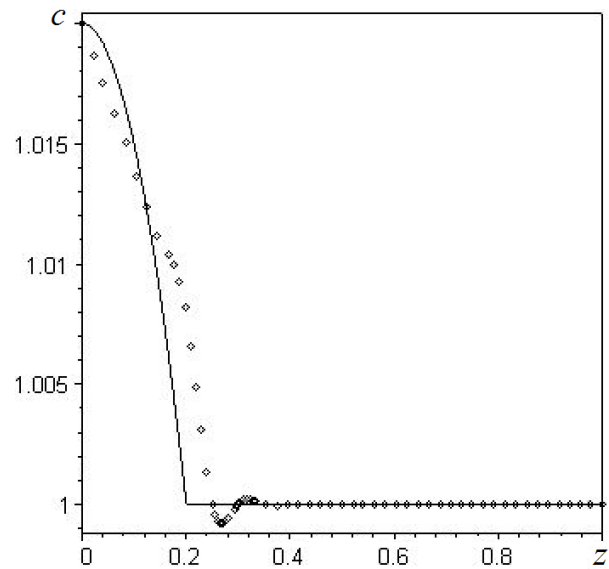


Рис. 2. Результат восстановления удельной теплоемкости

мация наиболее быстро меняется. Это связано с тем, что при регуляризации системы алгебраических уравнений, получаемых после дискретизации интегральных уравнений Фредгольма первого рода, применяется метод А.Н. Тихонова, который позволяет решать как недоопределенные, так и переопределенные системы уравнений. В качестве входной информации при восстановлении коэффициента теплопроводности \bar{k} и удельной теплоемкости \bar{c} принята температура $W(1, \tau)$, измеренная на верхней грани слоя на временном интервале $[a_2, b_2] = [0.8]$ в четырех точках. В качестве входной информации при восстановлении упругого модуля \bar{s} принято смещение $U(1, \tau)$, измеренное на верхней грани слоя на временном интервале $[a_1, b_1] = [0.2]$ в пяти точках. При количестве точек наблюдения по времени от 6 до 8 значительно возрастают затраты машинного времени, а точность восстановления практически не улучшается. При количестве точек наблюдения больше восьми результаты реконструкции ухудшаются. Это связано с тем, что при росте размерности системы алгебраических уравнений ухудшается обусловленность соответствующей матрицы.

На рис. 2–4 представлены результаты реконструкции термомеханических характеристик слоя с покрытием, сплошной линией показан график исходной функции, значками — восстановленной. На рис. 2 приведен результат восстановления удельной теплоемкости, которая моделировалась функцией: в покрытии $\bar{c}(z) = 0.02 + \cos(z)$, $0 < z < 0.2$, в подложке $\bar{c}(z) = 1$, $0.2 < z < 1$. Для достижения условия выхода (15) потребовалось 12 итераций.

На рис. 3 показан результат восстановления коэффициента теплопроводности, который для покрытия имеет вид $\bar{k}(z) = 0.2 + z^2$, а для подложки — 1. Коэффициент теплопроводности покрытия имел значения, которые во много раз меньше коэффициента теплопроводности подложки, что соответствует моделированию задачи тепловой защиты [1]. Относительная толщина покрытия варьировалась, но общая безразмерная толщина полагалась равной 1. Для достижения условия выхода (15) потребовалось 10 итераций.

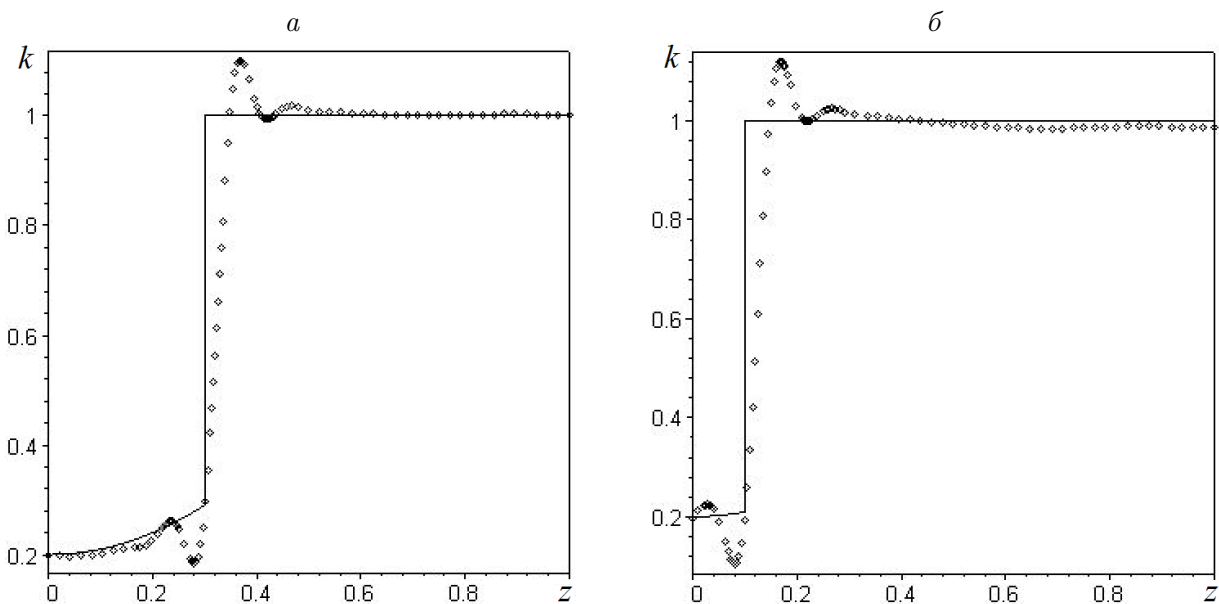


Рис. 3. Результат восстановления коэффициента теплопроводности при толщине покрытия, равной 0.3 (а) и 0.1 (б)

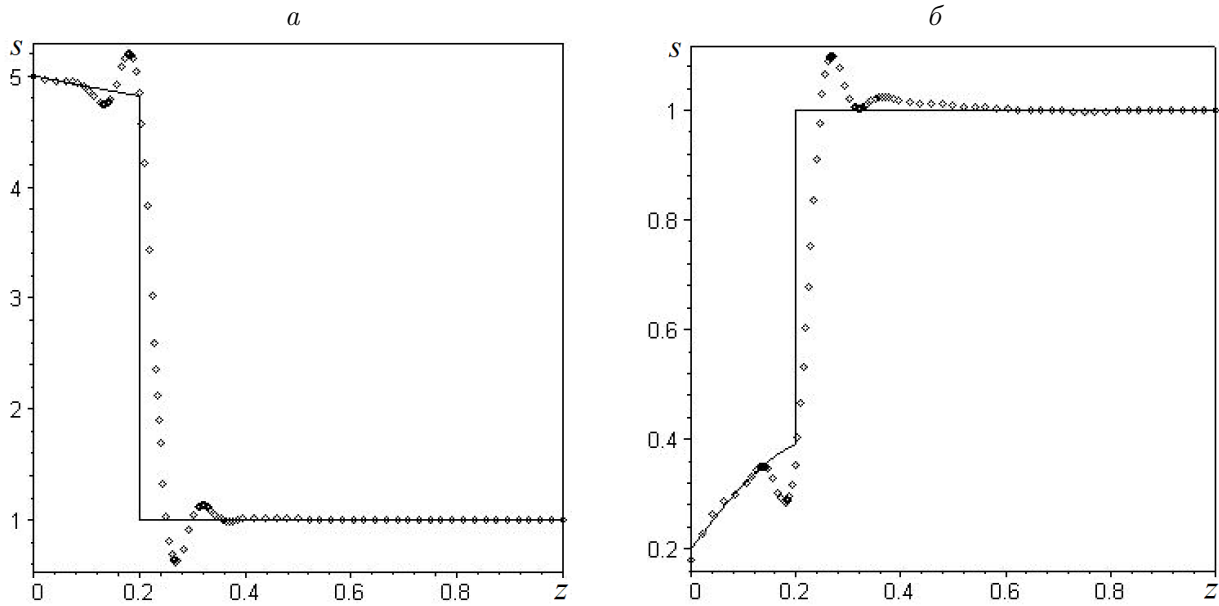


Рис. 4. Результат восстановления модуля упругости жесткого (а) и мягкого (б) покрытия

На рис. 4 показан результат восстановления упругого модуля слоя с покрытием: жестким (высокомодульным) $\bar{s}(z) = 4e^{-z}$ и мягким (низкомодульным) $s(z) = 0.2(1 + \sin(2\pi z))$. Упругий модуль подложки полагался равным 1. Для достижения условия выхода (14) потребовалось 14 итераций.

В результате вычислительных экспериментов установлено, что для достижения условий выхода из итерационного процесса (14), (15) требовалось не более 14 итераций, наибольшая погрешность реконструкции возникала в окрестностях точек разрыва функции (до 12%), а в остальных точках не превышала 7%. На результаты реконструкции влияет толщина слоев: чем толще слой, тем результат реконструкции лучше. Результаты реконструкции не зависят от соотношения модулей покрытия и подложки.

Заключение

Представлен способ определения термомеханических характеристик неоднородного слоя с покрытием. С помощью интегрального преобразования Фурье двумерная задача сводится к двум одномерным. Решение обратной задачи термоупругости построено на основе итерационного процесса, на каждом шаге которого определяются поправки путем решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению коэффициента теплопроводности, удельной теплоемкости, модуля упругости слоя с функционально-градиентным покрытием. На результаты реконструкции влияет толщина слоев: чем толще слой, тем результат реконструкции лучше. Результаты реконструкции не зависят от соотношения модулей покрытия и подложки.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН “Фундаментальные проблемы математического моделирования” (грант № 114072870112).

Список литературы / References

- [1] Lee, W.Y., Stinton, D.P., Bernardt, C.C., Erdogan, F., Lee, Y.D., Mutasin, Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications // J. of American Ceramic Soc. 1996. Vol. 19. P. 3003–3012.
- [2] Wetherhold, R.C., Seelman, S., Wang, J. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // Composites Sci. and Technology. 1996. No. 56. P. 1099–1104.
- [3] Мао, J.-J., Ке, L.-L., Wang, Y.-S. Thermoelastic instability of a functionally graded layer interacting with homogeneous layer // Intern. J. Mech. Sci. 2015. Vol. 99. P. 218–227.
- [4] Kulchytsky-Zhyhailo, R., Bajkowski, A. Analytical and numerical methods of solution of three-dimensional problem of elasticity for functionally graded coated half-space // Intern. J. Mech. Sci. 2012. Vol. 54, No. 1. P. 105–112.
- [5] Wang, X., Pan, E., Roy A. Three-dimensional Green's functions for a steady point heat source in a functionally graded half-space and some related problems // Intern. J. Eng. Sci. 2007. Vol. 45. P. 939–950.
- [6] Lukasiewicz, S.A., Babaei, R., Qian, R.E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // J. of Thermal Stresses. 2003. Vol. 26, No. 1. P. 13–23.
- [7] Ломазов, В.А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел: ОрелГТУ, 2002. 168 с.
Lomazov, V.A. The problems for identification of inhomogeneous thermoelastic bodies. Orel: OrelGTU, 2002. 168 p. (In Russ.)
- [8] Апбасов, С.О., Яхно, В.Г. Обратная задача динамической несвязанной термоупругости // Некоторые вопросы дифференциальных уравнений и дискретной математики. Новосибирск: НГУ, 1986. С. 63–70.
Arbasov, S.O., Yakhno, V.G. Inverse problems of dynamic unbounded thermoelasticity // Some questions on differential equations and discrete mathematics. Novosibirsk: NSU, 1986. P. 63–70. (In Russ.)
- [9] Nedin, R., Nesterov, S., Vatulyan, A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // Intern. J. of Solids and Structures. 2014. Vol. 51, No. 3. P. 767–773.
- [10] Ватульян, А.О., Нестеров, С.А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // Инж.-физ. журн. 2014. Т. 87, № 1. С. 217–224.
Vatulyan, A.O., Nesterov, S.A. A method of identifying thermoelastic characteristics for inhomogeneous bodies // J. of Eng. Phys. and Thermophys. 2014. Vol. 87, No. 1. P. 225–232.
- [11] Ватульян, А.О., Нестеров, С.А. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для функционально-градиентных материалов // Пробл. прочности и пластичности. 2014. Т. 76, № 4. С. 335–342.
Vatulyan, A.O., Nesterov, S.A. Coefficient inverse problems of thermoelasticity for functionally graded materials // J. Problems of Strength and Plasticity. 2014. Vol. 76, No. 4. P. 335–342. (In Russ.)
- [12] Ватульян, А.О., Нестеров, С.А. К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы // Инж.-физ. журн. 2015. Т. 88, № 4. С. 951–959.
Vatulyan, A.O., Nesterov, S.A. On determination of inhomogeneous thermomechanical characteristics of a pipe // J. of Eng. Phys. and Thermophys. 2015. Vol. 88, No. 4. P. 984–993.
- [13] Nedin, R., Nesterov, S., Vatulyan, A. Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded materials // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 102. P. 213–218.

- [14] Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, Я.Г. Ягола. М.: Наука, 1990. 230 с.
Numerical methods for the solving of incorrect problems / A.N. Tichonov, A.V. Goncharkii, V.V. Stepanov, Ya.G. Yagola. Moscow: Nauka, 1990. 230 p. (In Russ.)

*Поступила в редакцию 17 мая 2017 г.,
с доработки — 10 июля 2017 г.*

Numerical realization of the iterative scheme for solving inverse thermoelasticity problems for inhomogeneous bodies with coatings

VATULYAN, ALEXANDER O.^{1,*}, NESTEROV, SERGEY A.²

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344090, Russia

²Southern Mathematical Institute of the VSC of the RAS, Vladikavkaz, 362027, Russia

*Corresponding author: Vatulyan, Alexander O., e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Bodies with coatings are a widespread class of modern materials. In this paper, we consider a dynamic problem for an inhomogeneous thermoelastic layer with a functional gradient covering. Functions characterizing the inhomogeneity have breakpoints of the first kind at the interface of the coating with the substrate. The solution scheme is based on the preliminary reduction of the problem by means of the Fourier transform to two simpler one-dimensional unrelated problems with respect to the averaged characteristics.

The inverse problem consists in determining the thermomechanical characteristics that allows the existence of a discontinuity point of the first kind at the boundary physical fields. After applying the Laplace transform the direct problem of thermoelasticity is solved on the basis of the method of reduction to the system of integral Fredholm equations of the second kind and the inversion of solutions on the basis of the theory of residues. To solve the inverse problem, an iterative process is constructed, at each stage of which there are corrections of the reconstructed characteristics by solving the Fredholm integral equation of the first kind.

During the computational experiments, analysis of the effect of the coating stiffness was performed. The relative thickness of the coating on the results of reconstruction of inhomogeneous thermomechanical characteristics was investigated. Practical recommendations on the selection of the most informative time intervals for measuring the input information are given.

Keywords: coefficient inverse problem, thermoelasticity, inhomogeneous bodies with coatings.

Acknowledgements. This research was partly supported by the program of the Presidium of the RAS “Fundamental Problems of Mathematical Modeling” (grant No. 114072870112).

Received 17 May 2017

Received in revised form 10 July 2017