

## Исследование нелинейных колебаний в математической модели микрорезонатора

Д. О. ПИМАНОВ

Новосибирский государственный университет, Россия

Контактный e-mail: [pimanov-daniil@yandex.ru](mailto:pimanov-daniil@yandex.ru)

Исследуются нелинейные колебания материальной точки, описываемые дифференциальным уравнением второго порядка, под воздействием линейной упругой силы, силы трения и силы электростатического притяжения, меняющейся с заданным периодом. Рассматриваемое уравнение представляет математическую модель микрорезонатора, в котором недеформируемая платформа с заданной массой на пружине играет роль материальной точки. В связи с этим формулируется нелинейная краевая задача с условиями периодичности, которая используется для описания нелинейных колебаний платформы. Численное исследование краевой задачи проводится методом продолжения решения по параметру на основе дифференциальных прогонок метода множественной стрельбы. В результате установлены области параметров, в которых существуют периодические решения задачи Коши для рассматриваемого дифференциального уравнения с периодом внешнего воздействия с учетом их множественности и устойчивости. Приведены примеры, в которых периодические решения переходят в хаотические колебания по сценарию Фейгенбаума через удвоение периода.

*Ключевые слова:* нелинейные колебания, краевая задача, метод множественной стрельбы, продолжение по параметру, электростатическое притяжение, бифуркация удвоения периода, каскад Фейгенбаума.

### Введение

Работа посвящена численному исследованию свойств решения дифференциального уравнения, имеющего вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + \Omega y = \frac{q \cos^2 t}{(1-y)^2}, \quad (1)$$

где  $b$ ,  $\Omega$  и  $q$  — неотрицательные параметры. Уравнение (1) описывает в безразмерных переменных колебания материальной точки единичной массы, присоединенной к пружине с коэффициентом жесткости  $\Omega$ , в среде с коэффициентом сопротивления  $b$ . Вид правой части уравнения, где  $q$  — параметр, обусловлен тем, что на материальную точку воздействует электростатическая сила притяжения, периодически меняющаяся во времени по закону  $\cos^2 t$ .

В приложениях уравнение (1) моделирует работу микрорезонатора, в котором недеформируемая платформа на условной пружине играет роль подвижного электрода, отделенного микрораззором от неподвижного электрода. Как известно, в случае малости

зазора между электродами сила электростатического притяжения определяется из теории плоского конденсатора. В безразмерных переменных уравнения (1) сила электростатического притяжения обратно пропорциональна  $(1 - y)^2$  и прямо пропорциональна квадрату разности потенциалов. Под воздействием периодически меняющейся разности потенциалов возбуждаются колебания платформы в среде с сопротивлением [1, 2].

Отметим, что рассматриваемая схема микрорезонатора широко используется в современной микроэлектронике, а именно в области, получившей название “микроэлектромеханические системы” (МЭМС). Достижения современной технологии предоставляют возможность для конструирования приборов, работающих на этом принципе. В частности, к приборам класса МЭМС относятся микрорезонаторы с микронными зазорами и малыми массами подвижного электрода, что позволяет получать высокочастотные колебания подвижного электрода. Имеется множество публикаций с описанием работы микрорезонатора в рамках математической модели, представленной уравнением (1), при различных законах зависимости разности потенциалов от времени. В качестве примера сошлемся на монографию [3]. Приведенные в данной статье результаты численного анализа нелинейных колебаний, описываемых уравнением (1), существенно расширяют известные представления о возможных режимах работы микрорезонатора.

Из физической интерпретации модели следует ожидать, что в зависимости от соотношения электростатической силы притяжения с указанной нелинейной зависимостью от  $y$  и упругой силы, пропорциональной  $y$ , возможны два типа поведения задачи Коши для уравнения (1). А именно, решение задачи Коши существует при всех  $t > 0$ , описывая нелинейные колебания в микрорезонаторе, и решение существует на конечном интервале времени, на котором  $y$  стремится к единице. В этом случае нарушается работа резонатора из-за соударения электродов.

Будем искать периодическое решение  $y(t)$  уравнения (1) с тем же периодом, что и правая часть. Тогда функция  $y(t) = y(t + \pi)$  на отрезке  $[0, \pi]$  является решением нелинейной краевой задачи для уравнения (1) с условиями периодичности

$$\begin{aligned} t \in [0, \pi], \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + \Omega y &= \frac{q \cos^2 t}{(1 - y)^2}, \\ y(0) = y(\pi), \quad \frac{dy}{dt}(0) &= \frac{dy}{dt}(\pi). \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда следует, что задача Коши для уравнения (1)

$$\begin{aligned} t > 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + \Omega y &= \frac{q \cos^2 t}{(1 - y)^2}, \\ y(0) = \tilde{y}(0), \quad \frac{dy}{dt}(0) &= \frac{d\tilde{y}}{dt}(0), \end{aligned} \quad (3)$$

где начальные данные  $\tilde{y}(0)$ ,  $d\tilde{y}/dt(0)$  взяты из решения краевой задачи (2) при  $t = 0$ , определяет  $\pi$ -периодические колебания при  $t > 0$ .

К эффективным методам численного исследования нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на конечном отрезке относится вариант метода продолжения решения по параметру на основе дифференциальных прогонок метода множественной стрельбы [4, 5]. Отличительной особенностью этого варианта метода является учет множественности решений, возникающей в процессе построения зависимости решения нелинейной краевой задачи от параметра. В случае

краевой задачи (2) метод позволяет выявить множественность периодических решений уравнения (1) при одной и той же совокупности параметров модели.

Важно отметить, что применяемый в данной работе способ численного решения краевой задачи (2) никак не связан с устойчивостью по начальным данным решения задачи Коши (3). В случае устойчивости график решения задачи Коши будет совпадать с  $y(t)$  на каждом из отрезков  $[k\pi, (k+1)\pi]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Однако если решение неустойчиво, то численное решение задачи Коши будет описывать колебания, график которых отличен от  $y(t)$ . Более того, возможны случаи, когда численное решение задачи Коши будет стремиться к 1 на конечном интервале по времени, свидетельствуя об отсутствии ограниченных колебаний.

В результате численного анализа были определены области существования и множественности периодических решений уравнения (1) с характеристикой их устойчивости. Отметим, что области, где периодические решения устойчивы, являются областями работоспособности прибора.

Отдельное внимание в работе уделено явлениям резонанса и определению областей изменения параметров модели, в которых происходит бифуркация устойчивости решения с рождением цикла удвоенного периода. Приведен пример возникновения хаотических колебаний по сценарию Фейгенбаума после каскада бифуркаций удвоения периода.

## 1. Численное исследование нелинейной краевой задачи методом продолжения решения по параметру

Приведем краткое описание численного метода исследования зависимости от параметра решения нелинейной краевой задачи, имеющей более общую, чем (2), формулировку.

Рассмотрим на конечном отрезке  $[A, B]$  по  $t$  нелинейную краевую задачу для системы из  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями достаточно общего вида

$$t \in [A, B], \quad \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{w}, q), \quad \mathbf{g}(\mathbf{w}(A), \mathbf{w}(B), q) = \mathbf{0}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  — векторы с компонентами  $w_k$ ,  $f_k$  и  $g_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , соответственно,  $q$  — скалярный параметр. Вектор-функции  $\mathbf{f}(t, \mathbf{w}, q)$  и  $\mathbf{g}(\mathbf{w}(A), \mathbf{w}(B))$  определены как достаточно гладкие по совокупности аргументов. Предполагается, что при некотором значении параметра  $q$  краевая задача (4) хорошо обусловлена и имеет непрерывно дифференцируемое решение.

Заметим, что для поиска  $T$ -периодических решений уравнения

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{w}, q), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{w}, q) = \mathbf{f}(t + T, \mathbf{w}, q),$$

краевые условия задачи (4), называемые условиями периодичности, имеют вид  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}(T)$ . В частном случае, который следует из (2), получим

$$t \in [0, \pi], \quad \frac{dw_1}{dt} = w_2, \quad \frac{dw_2}{dt} = \frac{q \cos^2(t)}{(1 - w_1)^2} - \Omega w_1 - b w_2, \\ w_1(0) = w_1(\pi), \quad w_2(0) = w_2(\pi),$$

где  $w_1 = y$ ,  $w_2 = dy/dt$ .

Для организации продолжения решения по параметру краевая задача рассматривается совместно с краевой задачей, определяющей производную решения по параметру. Пусть  $\mathbf{w}(t, q)$  — решение задачи (4). При этом производная решения по параметру  $q$  определяется как решение линейной краевой задачи:

$$t \in [A, B], \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q}, \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{dt} = f_w(t, \mathbf{w}(t, q), q)\boldsymbol{\nu} + \mathbf{f}_q(t, \mathbf{w}(t, q), q),$$

$$g_{w(A)}\boldsymbol{\nu}(A) + g_{w(B)}\boldsymbol{\nu}(B) + \mathbf{g}_q = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Метод множественной стрельбы на основе дифференциальных прогонок по существу позволяет представить проблему в виде системы нелинейных уравнений относительно сеточных значений решения краевой задачи (4) на заданной сетке. Далее решение полученной системы нелинейных уравнений изучается в зависимости от параметра  $q$  методом продолжения по параметру.

Введем в рассмотрение сетку

$$A = t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = B, \quad h_i = t_{i+1} - t_i, \quad (6)$$

обозначив через  $\mathbf{p}^k$  решение краевой задачи в  $k$ -м узле сетки:  $\mathbf{p}^k = \mathbf{w}(t_k, q)$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ . Пусть  $\mathbf{w}(t, \mathbf{p}^k, q)$  — решение задачи Коши

$$t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{w}, q), \quad \mathbf{w}(t_k) = \mathbf{p}^k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Из непрерывности решения краевой задачи на отрезке  $[A, B]$ , а также с учетом краевого условия следует, что формально сеточные значения решения краевой задачи (4) можно рассматривать как решение системы нелинейных уравнений

$$k = 1, \dots, m, \quad \boldsymbol{\psi}_k = \mathbf{w}(t_{k+1}, \mathbf{p}^k, q) - \mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\psi}_{m+1} = \mathbf{g}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^{m+1}, q) = \mathbf{0}, \quad (8)$$

векторная запись которой имеет вид

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{P}, q) = \mathbf{0}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{P}$  и  $\boldsymbol{\Psi}$  — составные векторы, включающие компоненты векторов  $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \dots, \mathbf{p}^{m+1}$  и  $\boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{P}, q), \boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{P}, q), \dots, \boldsymbol{\psi}_{m+1}(\mathbf{P}, q)$  соответственно.

Обозначим через  $\Gamma$  пространственную кривую в пространстве  $(\mathbf{P}, q)$ , определяемую системой (9). Как известно [4–6], использование метода продолжения решения по параметру для построения  $\Gamma$  связано с вычислением матрицы  $G = [\Psi_P(\mathbf{P}, q), \Psi_q(\mathbf{P}, q)]$  размера  $mn \times mn + 1$  при выполнении условия, согласно которому ранг матрицы  $G$  равен  $mn$ . При этом кривая  $\Gamma$  может проходить через так называемые точки поворота, в которых  $\det[\Psi_P(\mathbf{P}, q)] = 0$ , что позволяет учесть множественность решений.

Отметим, что система (9) может определять несколько гладких пространственных кривых. Для построения каждой из них методом продолжения по параметру требуется задание стартового решения, что является неформализуемой проблемой.

Приведем описание серии задач Коши для вычисления элементов матрицы  $G$ .

Непосредственно из системы (8) и краевых условий задачи (4) следует, что матрица  $\Psi_P(\mathbf{P}, q)$  имеет вид

$$\Psi_P = \begin{bmatrix} W(t_2, \mathbf{p}^1, q) & -I & & & & \\ & W(t_3, \mathbf{p}^2, q) & -I & & & \\ & & W(t_4, \mathbf{p}^3, q) & -I & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & W(t_{m+1}, \mathbf{p}^m, q) & -I \\ g_{p^1}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^{m+1}, q) & & & & & g_{p^{m+1}}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^{m+1}, q) \end{bmatrix}.$$

Здесь  $W(t, \mathbf{p}^k, q) = d\mathbf{w}/d\mathbf{p}^k(t, \mathbf{p}^k, q)$  — фундаментальная матрица решений, определяемая задачей Коши на отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$  для однородного матричного уравнения с матричной функцией  $f_w(t, \mathbf{w}(t, \mathbf{p}^k, q), q)$ :  $k = 1, 2, \dots, m$ ,

$$t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \frac{dW}{dt} = f_w(t, \mathbf{w}(t, \mathbf{p}^k, q), q)W, \quad W(t_k, \mathbf{p}^k, q) = I.$$

Для определения столбца  $\Psi_q(\mathbf{P}, q)$  матрицы  $G$  воспользуемся тем же методом множественной стрельбы, применив его к краевой задаче (5). Обозначим через  $\mathbf{r}^k$  сеточное значение решения краевой задачи (5) в  $k$ -м узле сетки (6):  $k = 1, 2, \dots, m + 1$ ,  $\mathbf{r}^k = d\mathbf{p}^k/dq$ . Рассмотрим на отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$  задачу Коши для линейного уравнения

$$t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{dt} = f_w(t, \mathbf{w}(t, \mathbf{p}^k, q), q)\boldsymbol{\nu} + \mathbf{f}_q(t, \mathbf{w}(t, \mathbf{p}^k, q), q), \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\nu}(t_k) = \mathbf{r}^k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Пусть  $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(t, \mathbf{p}^k, q)$  — решение задачи Коши (10). Воспользуемся представлением решения в виде

$$\boldsymbol{\nu}(t, \mathbf{p}^k, q) = W(t, \mathbf{p}^k, q)\mathbf{r}^k + \boldsymbol{\nu}_0(t, \mathbf{p}^k, q),$$

где  $\boldsymbol{\nu}_0(t, \mathbf{p}^k, q)$  — решение задачи Коши для (10) с нулевым начальным условием.

Из непрерывности решения краевой задачи (5) на отрезке  $[A, B]$ , а также учета краевого условия следует, что формально сеточные значения решения этой задачи представляют решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\varphi_k = W(t_{k+1}, \mathbf{p}^k, q)\mathbf{r}^k - \mathbf{r}^{k+1} + \boldsymbol{\nu}_0(t_{k+1}, \mathbf{p}^k, q) = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\varphi_{m+1} = g_{p^1}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^{m+1}, q)\mathbf{r}^1 + g_{p^{m+1}}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^{m+1}, q)\mathbf{r}^{m+1} + \mathbf{g}_q(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^{m+1}, q) = \mathbf{0}$$

или с использованием векторной записи системы

$$\Psi_P(\mathbf{P}(q), q)\mathbf{P}_q + \Psi_q(\mathbf{P}(q), q) = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{P}_q$  и  $\Psi_q$  — составные векторы, включающие компоненты векторов  $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \dots, \mathbf{r}^{m+1}$  и  $\boldsymbol{\nu}_0(t_2, \mathbf{p}^1, q), \boldsymbol{\nu}_0(t_3, \mathbf{p}^2, q), \dots, \boldsymbol{\nu}_0(t_{m+1}, \mathbf{p}^m, q), \mathbf{g}_q(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{m+1}, q)$  соответственно.

На этом завершается описание численного исследования нелинейной краевой задачи (4) методом продолжения решения по параметру, в котором выражения для  $\Psi, \Psi_q$  и  $\Psi_P$  определяются на итерациях по Ньютону. Для вычисления решения краевой задачи в промежуточных точках сетки используется решение задачи Коши (7). Таким образом, если система уравнений (9) относительно сеточных значений краевой задачи имеет несколько решений в некоторой области изменения параметра  $q$ , то тем же свойством обладает и решение краевой задачи.

## 2. Периодическое решение задачи Коши, определяемое из решения краевой задачи с условиями периодичности

Пусть при некотором значении параметра  $q$  известно решение  $\mathbf{w}(t, q)$  краевой задачи (4) с условиями периодичности на отрезке  $[0, T]$ :

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{w}, q), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{w}, q) = \mathbf{f}(t + T, \mathbf{w}, q), \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}(T). \quad (11)$$

Тогда  $\mathbf{w}(t, q)$  описывает  $T$ -периодическое решение задачи Коши для уравнения

$$t > 0, \quad \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{w}, q), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{w}, q) = \mathbf{f}(t + T, \mathbf{w}, q), \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \quad (12)$$

если в качестве  $\mathbf{w}_0$  начального условия задачи Коши выбирается решение краевой задачи (11) при  $t = 0$ :  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}(0, q)$ . Кроме того, необходимо, чтобы решение задачи Коши было устойчиво по Ляпунову.

Для определения устойчивости периодического решения используются собственные числа матрицы монодромии — матрицанта однородного уравнения с матрицей  $f_w(t, \mathbf{w}(t, q), q)$ , вычисленного при  $t = T$ . Согласно теории Флоке—Ляпунова, если все собственные числа матрицы монодромии расположены в круге единичного радиуса комплексной плоскости, то имеет место устойчивость периодического решения задачи Коши (12). Периодическое решение неустойчиво, если модуль хотя бы одного собственного числа оказался больше единицы. В других случаях устойчивость определяется непосредственным интегрированием задачи Коши (12) [7].

Заметим, что в методе множественной стрельбы, основанном на дифференциальных прогонках, матрица монодромии вычисляется одновременно с прогонкой на последнем шаге.

Пример применения метода продолжения по параметру  $q$  приведен на рис. 1. Здесь представлена зависимость решения краевой задачи от параметра в виде графика  $y(0)$  от  $q$ , построенного при  $\Omega = 1.5$ ,  $b = 0$ . В области положительных значений параметра, расположенной левее точки поворота графика, краевая задача имеет два решения. Решения, относящиеся к верхней части графика (пунктир), определяют неустойчивые периодические решения задачи Коши (3). Кроме того, существует область изменения

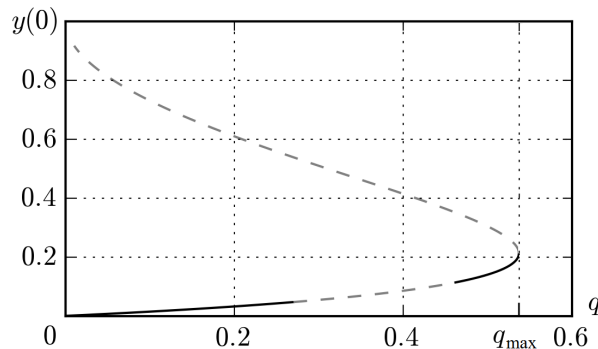


Рис. 1. Пример диаграммы множественности решений краевой задачи (2) при  $\Omega = 1.5$ ,  $b = 0$  в виде графика зависимости  $y(0)$  от параметра  $q$ : участки, представленные сплошной кривой, — устойчивые периодические решения задачи Коши (3), пунктир — неустойчивые

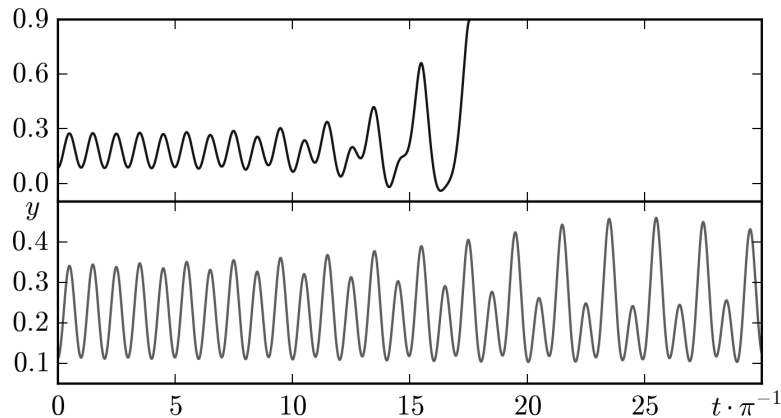


Рис. 2. Два типа потери устойчивости периодических решений задачи Коши (3) с начальными данными, взятыми из решения краевой задачи (2), диаграмма множественности которой представлена на рис. 1

параметра  $q$ , в которой периодические решения, представленные в нижней части графика, также неустойчивы. Точки на участке сплошной кривой соответствуют устойчивым периодическим решениям.

На рис. 2 приведены примеры потери устойчивости периодических решений задачи Коши (3) с начальными данными, взятыми из решений краевой задачи (2), которые соответствуют точкам на графике рис. 1. При  $q = 0.4$  (верхняя кривая) траектория стремится на ограниченном временном отрезке к точке, в которой  $y = 1$ . При  $q = 0.46$  (нижняя кривая) траектория описывает колебания, отличные от периодических, которые остаются ограниченными при  $t > 0$ .

### 3. Множественность решений и устойчивость при отсутствии сопротивления

Численное исследование зависимости  $\pi$ -периодических решений (1) при  $b = 0$  и различных значениях  $\Omega$  показывает, что качественное поведение зависимости решений краевой задачи (2) от параметра  $q$  на интервале  $0 < \Omega < 4$  одинаково. В этом случае, согласно диаграмме на рис. 1, краевая задача для каждого  $q$  имеет два решения в области  $q < q_{\max}$ , расположенной левее точки поворота, и не имеет решений в случае  $q > q_{\max}$ . При этом на интервале  $0 < \Omega < 1$  одно из решений краевой задачи определяет устойчивое периодическое решение, а второе — неустойчивое. Начиная со значения  $\Omega = 1$  возникают области изменения параметра  $q$ , в которых оба решения краевой задачи определяют неустойчивые периодические решения. Значение  $q_{\max}$ , определяющее положение точки поворота, возрастает с увеличением  $\Omega$  начиная от значения  $q_{\max} = 0$  при  $\Omega = 0$ .

При  $\Omega = 4$  происходит бифуркация качественного поведения зависимости решений краевой задачи от параметра  $q$ . На интервале  $4 < \Omega < 16$  определены области изменения  $q$ , в которых краевая задача имеет четыре решения, два решения или не имеет решений. В качестве примера на рис. 3 приведен график зависимости  $y(0)$  решения задачи (2) от параметра  $q$  при  $\Omega = 5$ . Начиная со значения  $\Omega = 9$ , как и в случае  $\Omega = 1$ , находят решения краевой задачи с малым значением  $y(0)$  при малом  $q$ , которые определяют неустойчивые периодические решения.

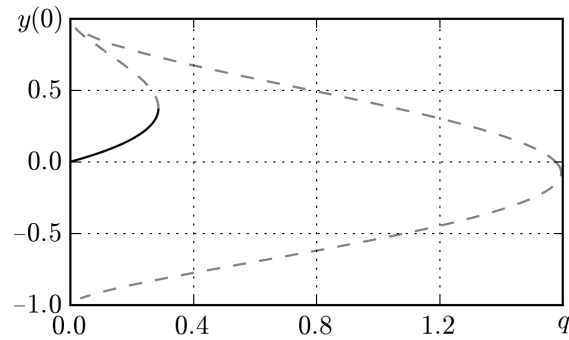


Рис. 3. Диаграмма множественности решений краевой задачи (2) при  $b = 0$ ,  $\Omega = 5$ , в виде двух веток графика зависимости значения  $y(0)$  от параметра  $q$ : участки, представленные сплошной кривой, — устойчивые периодические решения задачи Коши (3), пунктир — неустойчивые

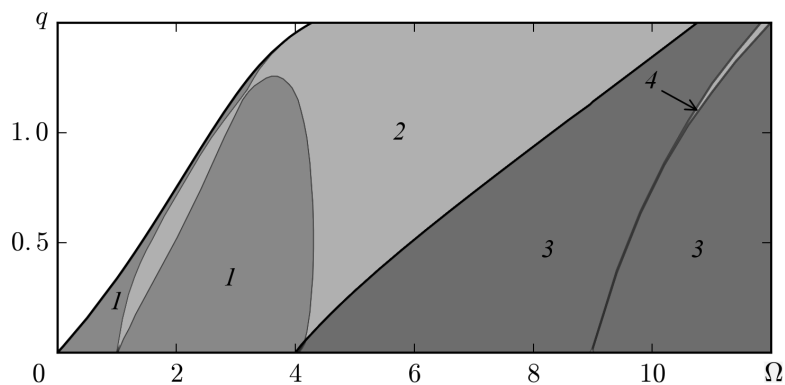


Рис. 4. Области с различным числом  $\pi$ -периодических решений уравнения (1) в плоскости параметров  $(\Omega, q)$  при  $b = 0$ : в области 1 — два решения, одно из которых устойчиво, в области 2 — два неустойчивых решения, в области 3 — четыре решения, одно из которых устойчиво, в области 4 — четыре неустойчивых решения

В итоговой диаграмме на рис. 4 в плоскости  $(\Omega, q)$  представлены области с различным числом  $\pi$ -периодических решений. В областях 1 и 2 лежат точки, соответствующие значениям параметров  $\Omega$  и  $q$ , при которых уравнение (1) имеет два  $\pi$ -периодических решения. В областях 3 и 4 найдено четыре  $\pi$ -периодических решения. В областях 1 и 3 одно из периодических решений устойчиво, а в областях 2 и 4 устойчивых периодических решений нет.

Отметим, что при малых значениях  $q$  линейризованное уравнение (1) имеет вид неоднородного уравнения Матгё:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + [(\Omega - q) - q \cos 2t]y = \frac{q}{2}(\cos 2t + 1).$$

При  $\Omega = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , области неустойчивости на диаграмме Айнса — Стретта выходят на ось  $q = 0$  [8]. Отсюда можно сделать предположение о качественном поведении решений краевой задачи в зависимости от параметров модели при  $\Omega > 12$ . В частности, численно подтверждается, что при переходе  $\Omega$  через значения  $\Omega = 4, 16, 36$  и  $64$  изменяется характер зависимости решений краевой задачи (2) от параметра  $q$ . В окрестности каждой из точек  $\Omega = 1, 9, 25, 49$ ,  $q = 0$  появляются области, в которых ни одно из множества решений краевой задачи не определяет устойчивых периодических колебаний.



#### 4. Множественность решений и устойчивость с учетом сопротивления среды

Пусть в некоторой области на плоскости  $(\Omega, q)$  существуют решения краевой задачи (2). Качественное отличие колебаний в среде с сопротивлением ( $b > 0$ ) — появление под-области  $0 < q < q^*$ , в которой как минимум одному из решений краевой задачи (2) соответствует устойчивое периодическое решение задачи Коши (3). При этом значение  $q^*$  возрастает с увеличением  $b$ .

Пример диаграммы, на которой изображены области с различным числом  $\pi$ -периодических решений уравнения (1) при  $b = 0.1$ , приведен на рис. 5. Здесь в областях 1 и 2 существует два решения краевой задачи (2), а в областях 3 и 4 — четыре решения. При этом в области 1 одному из решений краевой задачи соответствует устойчивое решение задачи Коши (3), а второму — неустойчивое. В области 2 оба решения неустойчивы. В области 3 из четырех решений краевой задачи два решения определяют устойчивые колебания, а два — неустойчивые. В области 4 только одно из четырех  $\pi$ -периодических решений уравнения (1) устойчиво.

#### 5. Резонансные кривые, удвоение периода и хаос

Пусть  $\tilde{y}(t)$  — устойчивое  $\pi$ -периодическое решение задачи Коши (3), совпадающее при  $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$  и  $d\tilde{y}/dt(0) = \tilde{y}'_0$  с решением краевой задачи (2) на периоде. Как показывает вычислительный эксперимент, при учете сопротивления решение задачи Коши (3) с начальными данными, взятыми в некоторой окрестности  $\tilde{y}_0, \tilde{y}'_0$ , с ростом  $t$  стремится к  $\tilde{y}(t)$ . При этом амплитуда колебаний  $a$  может быть найдена из решения краевой задачи (2). Применение метода продолжения решения краевой задачи (2) по параметру  $\Omega$  позволяет построить зависимость амплитуды  $a$  от параметра  $\Omega$ , соответствующего “безразмерной” частоте собственных колебаний.

На рис. 6 приведены резонансные кривые задачи Коши при  $b = 0.1$  с начальными данными из окрестности решения краевой задачи при  $t = 0$ : кривая 1 построена при  $q = 0.15$ , кривые 2 и 3 — при  $q = 0.25$ . Кривые 2 и 3 определяются с учетом пересечения прямой  $q = 0.25$  с устойчивыми дугами на диаграмме рис. 5.

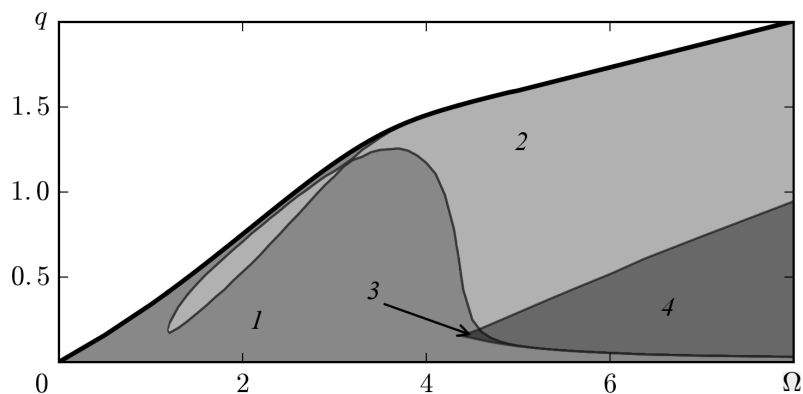


Рис. 5. Области с различным числом  $\pi$ -периодических решений уравнения (1) в плоскости параметров  $(\Omega, q)$ ,  $b = 0.1$

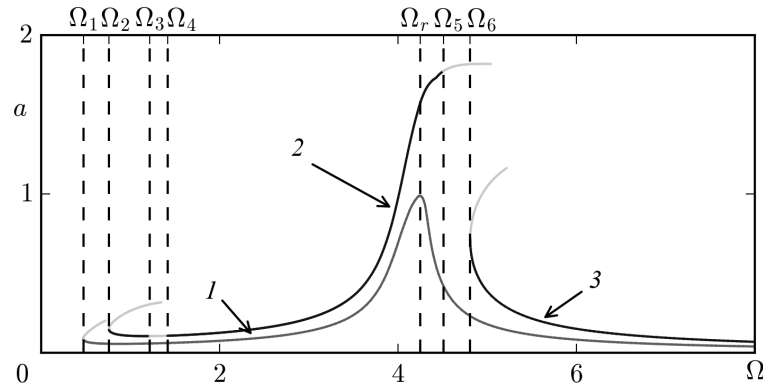


Рис. 6. Примеры резонансных кривых задачи Коши с начальными данными из окрестности решения краевой задачи при  $t = 0$ ,  $b = 0.1$ : кривая 1 построена при  $q = 0.15$ , кривые 2 и 3 — при  $q = 0.25$ ; различие кривых 2 и 3 соответствует чередованию устойчивости дуг на диаграмме рис. 5

Из графика 1 следует, что решение краевой задачи существует при  $\Omega > \Omega_1 = 0.476$ . Как показывают вычисления, периодические решения задачи Коши (3), определяемые из решения краевой задачи (2), устойчивы при всех  $\Omega > \Omega_1$ . Резонансное значение амплитуды колебаний достигается при  $\Omega = \Omega_r = 4.25$ .

Графики 2 и 3 показывают, что краевая задача имеет решения для  $\Omega$ , расположенных правее точки поворота при  $\Omega_2 = 0.763$ . Как оказалось, при  $1.22 = \Omega_3 < \Omega < \Omega_4 = 1.42$  и  $4.5 = \Omega_5 < \Omega < \Omega_6 = 4.81$  решения краевой задачи (2) определяют только неустойчивые периодические решения (3). Таким образом, в точках  $\Omega_3$ ,  $\Omega_4$ ,  $\Omega_5$  и  $\Omega_6$  происходит бифуркация устойчивости  $\pi$ -периодических решений. Отметим, что на интервале  $\Omega \in (\Omega_4, \Omega_5)$  амплитуда устойчивых периодических решений возрастает. Затем при  $\Omega > \Omega_5$  периодические решения теряют устойчивость, а решение задачи Коши стремится к значению  $y = 1$  на конечном интервале времени. Правее точки поворота при  $\Omega = \Omega_6$  краевая задача имеет решение, которое определяет устойчивые колебания при всех  $\Omega > \Omega_6$ .

Дальнейшее исследование периодических решений, принадлежащих кривой 2, показывает, что на интервале  $\Omega \in (\Omega_3, \Omega_4)$  имеет место каскад бифуркаций удвоения периода. В точке  $\Omega = \Omega_3$  рождается устойчивое периодическое решение задачи Коши (3) с периодом  $2\pi$ . При дальнейшем увеличении параметра  $\Omega$  в точке  $\Omega = 1.37293$  возникает решение задачи Коши с периодом  $4\pi$ . Эту последовательность точек бифуркации можно продолжить.

Полученный в численном эксперименте каскад бифуркаций удвоения периода на диаграмме, представленной на рис. 7, иллюстрирует переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума [9]. В таблице приведены численные оценки для первых шести значений  $\Omega^i$  последовательности Фейгенбаума и соответствующие значения  $\delta_i$ ,

$$\delta_i = \frac{\Omega^i - \Omega^{i-1}}{\Omega^{i+1} - \Omega^i}, \quad (13)$$

характеризующие скорость стремления  $\Omega^i$  к предельному значению. Значение  $\delta_i$  совпадает с постоянной Фейгенбаума  $\delta \approx 4.6692016$  с точностью до  $10^{-2}$  уже после шести удвоений периода.

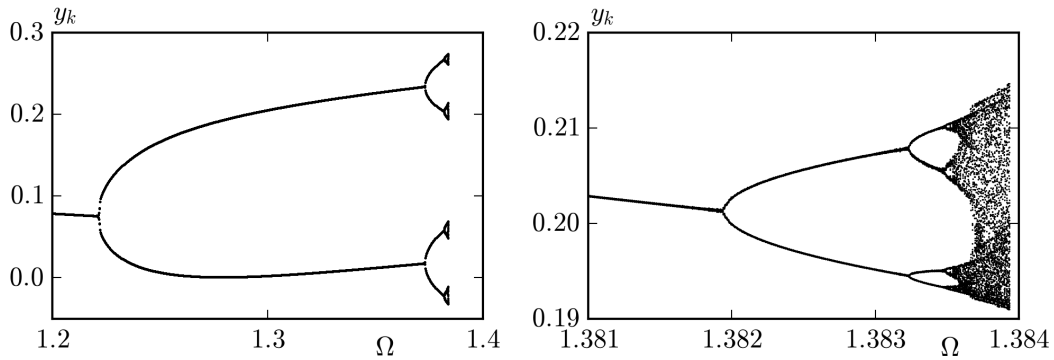


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма уравнения (1) при  $q = 0.25$ ,  $b = 0.1$  (слева), значениям  $y_k$  соответствует выборка  $y(t)$  с помощью сечения Пуанкаре:  $y_k = y(\pi k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 256$ ; фрагмент бифуркационной диаграммы в указанной области (справа)

$i$	$\Omega^i$	$\delta_i$
1	1.21905	—
2	1.37293	17.098
3	1.38194	7.087
4	1.38321	4.704
5	1.38348	4.655
6	1.383537	—

Таким образом, ограниченные колебания в среде с сопротивлением со временем могут стремиться к периодическим колебаниям с периодом  $2^n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , или порождать хаотические колебания. Кроме того, возможно возникновение периодических колебаний с периодом, отличным от  $2^n\pi$ . В частности, численно подтверждается существование колебаний с периодом  $3 \cdot 2^n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$

## Заключение

Используемый в работе вариант метода продолжения по параметру позволил подробно изучить свойства решений уравнения (1), описывающих нелинейные колебания подвижного электрода в рамках математической модели микрорезонатора.

Рассмотрены примеры с построением областей в плоскости параметров модели с различным числом периодических решений и характеристикой их устойчивости. Результаты представлены в виде диаграмм, на которых учтено влияние сопротивления среды.

Численное построение резонансных кривых показывает, что рост амплитуды нелинейных колебаний, описываемых уравнением (1) в среде с сопротивлением, может осуществляться за счет приближения параметра  $\Omega$  к некоторой резонансной частоте, значение которого зависит от параметров  $b$  и  $q$ . Применяемый в данной работе способ исследования периодических решений также позволил обнаружить примеры возрастания амплитуды за счет бифуркации устойчивости  $\pi$ -периодического решения и рождения колебаний с кратными периодами.

Показана возможность возникновения хаотических колебаний по сценарию Фейгенбаума через каскад бифуркаций удвоения периода.

Отметим, что предложенный вариант метода продолжения по параметру для решения нелинейных краевых задач может быть эффективно использован при исследовании нелинейных колебаний в математических моделях МЭМС, подобных уравнению (1), где

электростатические силы притяжения в правой части уравнения обусловлены различным характером внешних воздействий.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН “Междисциплинарные интеграционные исследования” на 2018–2020 гг. (проект № 273).

Автор выражает благодарность С.И. Фадееву и Э.Г. Косцову за ценные советы при планировании исследования и участие в постановке задачи.

## Список литературы / References

- [1] **Косцов Э.Г., Фадеев С.И.** Новые микроэлектромеханические резонаторы для гигагерцовых частот // Автометрия. 2013. Т. 49, № 2. С. 115–122.  
**Kostsov, E.G., Fadeev, S.I.** New microelectromechanical cavities for gigahertz frequencies // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2013. Vol. 49, No. 2. P. 204–210.
- [2] **Takamatsu, H., Sugiura, T.** Nonlinear vibration of electrostatic MEMS under DC and AC applied voltage // Proc. of the 2005 Intern. Conf. on MEMS, NANO and Smart Systems, ICMENS 2005. Banff, Alberta, Canada, 2005. P. 423–424.
- [3] **Younis, M.I.** MEMS linear and nonlinear statics and dynamics // Springer US. Series: Microsystems. 2011. Vol. 20, No. XVI. 456 p.
- [4] **Фадеев С.И., Когай В.В.** Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 2012. 278 с.  
**Fadeev, S.I., Kogay, V.V.** Boundary value problems for systems of ordinary differential equations. Novosibirsk: NGU, 2012. 278 p. (In Russ.)
- [5] **Когай В.В., Фадеев С.И.** Применение продолжения по параметру на основе метода множественной стрельбы для численного исследования нелинейных краевых задач // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. Т. 4, № 1(7). С. 83–101.  
**Kogay, V.V., Fadeev, S.I.** Application of parameter continuation based on the multiple shooting method for the numerical investigation of nonlinear boundary value problems // Sib. Zh. Ind. Mat. 2001. Vol. 4, No. 1(7). P. 83–101. (In Russ.)
- [6] Методы анализа нелинейных динамических моделей / М. Холодниок, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек. М.: Мир, 1991. 368 с.  
Methods of the analysis for nonlinear dynamic models / M. Holodniok, A. Klich, M. Kubichek, M. Marek. Moscow: Mir, 1991. 368 p. (In Russ.)
- [7] **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.  
**Demidovich, B.P.** Lectures on the mathematical theory of stability. Moscow: Nauka, 1967. 472 p. (In Russ.)
- [8] **Меркин Д.Р.** Введение в теорию устойчивости движения: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1987. 304 с.  
**Merkin, D.R.** Introduction to the theory of stability. N.Y.: Springer, 1997. 315 p.
- [9] **Мун Ф.** Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 312 с.  
**Moon, F.C.** Chaotic vibrations: An introduction for applied scientists and engineers. N.Y.: Wiley-VCH, 2004. 309 p.

*Поступила в редакцию 14 апреля 2017 г.,  
с доработки — 14 февраля 2018 г.*

## **Study of the nonlinear oscillations in a mathematical model of microresonator**

PIMANOV, DANIL O.

Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russia

Corresponding author: Pimanov, Daniil O., e-mail: [pimanov-daniil@yandex.ru](mailto:pimanov-daniil@yandex.ru)

**Purpose.** Study of a second order non-autonomous non-linear differential equation that describes oscillations of a material point under the action of linear elastic force, frictional force and the force of electrostatic attraction which varies in time with a given frequency. The problem appears in applications of a mathematical model to MEMS resonator where a non-deformable platform with given mass attached to a spring is considered as a material point.

**Methodology.** In connection with the periodicity of external influence, the nonlinear boundary value problem with periodicity conditions is formulated and investigated numerically by the parameter continuation on the basis of the multiple shooting method. The stability of the obtained periodic solutions is determined using the spectrum of the monodromy matrix.

**Findings.** The regions of existence for model parameters in which the periodic solutions of the equation with the period of external forcing are defined taking into account their multiplicity and stability. Numerical integration has shown that the nonlinear oscillations can also exist as stable periodic oscillations with a multiple period. Furthermore, for appropriate values of parameters the chaotic oscillations appear by the Feigenbaum scenario.

**Originality.** The proposed method of numerical investigation allows one to effectively study nonlinear properties of the model, such as multistability, nonlinear resonance and the appearance of chaos.

*Keywords:* nonlinear vibration, boundary value problem, multiple shooting method, parameter continuation, electrostatic attraction, period doubling bifurcation, Feigenbaum cascade.

*Received 14 April 2017*

*Received in revised form 14 February 2018*