

Редуцированная вариационная постановка для моделирования гармонического электромагнитного поля в областях с малыми проводящими включениями

Э. П. ШУРИНА^{1,2,3,*}, Д. В. ДОБРОЛЮБОВА^{1,2,3}, Е. И. ШТАНЬКО^{1,3}

¹Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, Россия

³Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Россия

*Контактный e-mail: shurina@online.sinor.ru

При решении задач электромагнетизма в широком частотном диапазоне в областях с тонкими пластинами, оболочками и экранами численными методами возникает проблема резкого роста сеточной дискретизации вблизи внутренних структур с разномасштабными габаритными размерами. В работе предложена модификация вариационной постановки векторного метода конечных элементов, основанная на снижении размерности модели в окрестности тонких включений, которая позволяет преодолеть эту проблему за счет специфического учета таких структур на уровне вариационной постановки. Так как редуцирование модели обычно приводит к появлению ограничений на область ее применимости, выполнено исследование диапазона допустимых частот, контрастности электрофизических характеристик матрицы и включений, геометрических особенностей внутренней структуры, для которых предложенная модель позволяет получить корректные с точки зрения физики результаты.

Ключевые слова: векторный метод конечных элементов, редуцированные модели, среды с малыми включениями, электромагнитные экраны.

Введение

Тонкие пластины, обладающие свойствами геометрической и физической разномасштабности, встречаются во многих технических приложениях, таких как экранирование отдельных частей расчетных областей или аппаратных узлов от воздействия электромагнитного поля [1, 2], моделирование поведения электромагнитных полей в тонкослоистых структурах — композитах и метаматериалах [3, 4], решение инженерных задач в областях с тонкими оболочками — стенками резервуаров, внешними и внутренними оболочками устройств и т. д. [1]. Разномасштабность габаритных размеров пластин-включений означает необходимость построения адаптивных подробных сеточных разбиений, что приводит к значительному росту вычислительных затрат.

В настоящее время предлагается несколько основных подходов к редукации математических моделей для решения задач в областях, содержащих тонкие пластины. Среди них применение специальных постановок на основе асимптотических разложений

по малому параметру, в качестве которого выбирается толщина пластины [2, 5–9], введение на межфрагментарных границах вмещающая среда — тонкое включение импедансных или передающих условий (impedance boundary conditions или interface transmission conditions) [10–12]. Для решения данного класса задач используются также технологии плоского элемента (shell-элемента) [1, 13–16] и неконформные численные методы, такие как разрывный метод Галёркина [17–19].

В реализованном К. Schmidt и др. [2, 5–9] асимптотическом подходе к учету тонких пластин предполагается, что включение достаточно гладкое, а проводимость пластины обратно пропорциональна ее толщине. Введенные предположения позволяют на основе асимптотического разложения некоторых коэффициентов уравнений Максвелла по малому параметру (толщине пластины) вывести передающие условия на границах раздела сред для пластин разной проводимости. В работах [2, 7] выполнен анализ сходимости и устойчивости рассмотренной вычислительной схемы. К. Schmidt и соавторы рассматривают как двумерные [2], так и трехмерные постановки [7]. В [8] данный метод применяется для решения прикладной задачи о распределении электрического потенциала в расчетной области с криволинейным экраном, возникающей при моделировании физических процессов в скважинах с тонкой обсадкой.

Альтернативный подход основан на редуцировании модели путем замены тонкого включения эквивалентной поверхностью, на которой задаются специальные импедансные условия (impedance boundary conditions), которые также называют передающими условиями (interface transmission conditions) [10–12]. В данном случае тонкое проводящее включение заменяется поверхностью, либо проходящей через середину пластины [16], либо совпадающей с одной из ее продольных граней [12]. Импедансные условия задают поведение поля на границе раздела сред. В зависимости от решаемой задачи и сделанных авторами физических предположений импедансные условия могут быть сформулированы различным образом.

Концепция плоского элемента (shell-element) широко представлена в литературе [1, 13–16] и близка к методам на основе импедансных условий. Предполагается введение специальных элементов дискретизации, не имеющих объема и ассоциированных с поверхностью включения. Данный подход показывает высокую точность в случае, если скин-слой [20] пластины значительно превышает ее толщину [2].

Для получения численного решения для редуцированных моделей используют метод конечных элементов, как скалярный [5, 6, 10–12, 15], так и векторный [21], а также метод граничных элементов [7, 16] и метод интегральных уравнений [1]. Однако применение данных конформных методов, требующих согласованного сеточного разбиения во всей расчетной области и определенной гладкости решения, в силу особенностей внутренней геометрии рассматриваемых областей в классических постановках затруднительно.

Применение неконформных методов к решению данного класса задач получило развитие только в последние десятилетия [17–19]. Одним из таких методов является разрывный метода Галёркина, однако в приложении к задачам с тонкими пластинами требуется введение в вариационную постановку дополнительных условий на внутренних границах расчетной области, позволяющих учесть тонкую структуру без выполнения процедуры дискретизации ее объема [17, 18]. Данный метод, как и shell-элементы, показывает наибольшую эффективность в случае, когда толщина проводящей пластины меньше, чем скин-слой.

В данной работе предлагается подход, основанный на редуцировании геометрии включений для уравнения Гельмгольца в естественных переменных. Авторами вво-

дится специальная вариационная постановка векторного метода конечных элементов (ВМКЭ), позволяющая учитывать протяженные тонкие включения и протяженные пластины, выполняющие функцию экранов, как плоские, так и криволинейные, без учета их объема. Такое упрощение для ряда задач позволяет уменьшить размерность конечно-элементной дискретизации и сократить время моделирования.

Для предложенной специальной вариационной постановки в работе приведены исследования допустимого диапазона частот, контрастностей, положений включений в расчетной области относительно источника электромагнитного поля для пластин-включений, пластин-экранов и криволинейных тонких включений и экранов. Приведен анализ вычислительных затрат, позволяющий говорить о преимуществах предложенной вариационной постановки по сравнению с классическим векторным методом конечных элементов при дискретизации тонких включений как имеющих объем структур.

1. Постановка задачи

Поведение напряженности \mathbf{E} (В/м) электрического поля в гармоническом режиме описывается дифференциальным векторным уравнением Гельмгольца:

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J} \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

где $k^2 = i\omega\sigma - \omega^2\epsilon$; σ — электропроводность среды, См/м; ϵ — диэлектрическая проницаемость, Ф/м; $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота, Гц; μ — магнитная проницаемость, Гн/м; \mathbf{J} — плотность тока, А/м², причем $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Расчетная область $\Omega \in R^3$ ограничена непрерывной по Лишлицу внешней границей $\partial\Omega$ (рис. 1), на которой заданы условия непротекания электрического тока:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Границы раздела сред матрица — включения обозначим Γ_{incl} и определим следующим образом (рис. 1): $\Gamma_{incl} = \bigcup_i \Gamma_S^i$, где $\Gamma_S^i = \Gamma_{S^+}^i \cup \Gamma_{S^-}^i$.

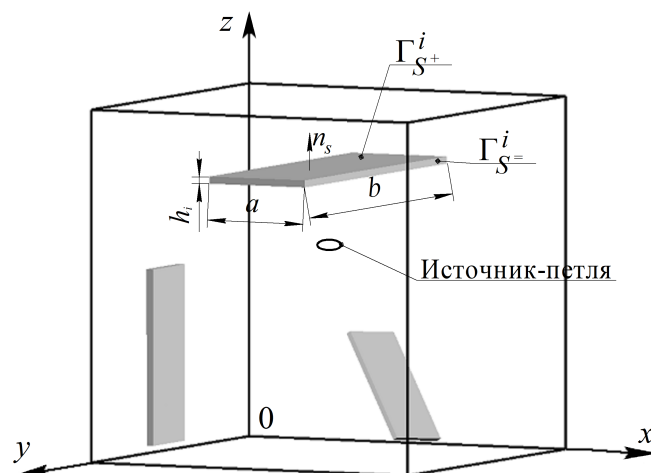


Рис. 1. Пример расчетной области с тонкими сильнопроводящими пластинами толщиной h_i

Предполагается, что в рассматриваемых средах матрица является слабопроводящей (либо диэлектрической), в то время как включения обладают высокой электропроводностью. Пластина, таким образом, рассматривается как идеальный проводник со следующими условиями на границе раздела сред:

$$\mathbf{n}^+ \times E^+ \Big|_{\Gamma_{incl}} - \mathbf{n}^- \times E^- \Big|_{\Gamma_{incl}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}^+ \times H^+ \Big|_{\Gamma_{incl}} - \mathbf{n}^- \times H^- \Big|_{\Gamma_{incl}} = \mathbf{j}_S, \quad (3)$$

где \mathbf{n}^+ , \mathbf{n}^- — внутренняя и внешняя нормали к поверхности, \mathbf{j}_S — плотность тока на поверхности пластины.

2. Вариационная постановка

Решение задачи (1), (2) выполняется векторным методом конечных элементов. Введем функциональные пространства с определенными в них нормой и скалярным произведением:

$$H(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega) : \nabla \times \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_0(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega) : \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Вариационная постановка стандартного ВМКЭ для уравнения Гельмгольца формулируется следующим образом: для $\mathbf{J} \in L^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ такое, что $\forall \mathbf{v} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ выполняется

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v} d\Omega + k^2 \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} d\Omega = -i\omega \int_L \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} dl. \quad (4)$$

В данной постановке тонкие включения учитываются как объемные пластины с определенными электрофизическими характеристиками. В редуцированной постановке учет тонких пластин осуществляется исходя из физически обоснованного предположения, что тангенциальная компонента напряженности магнитного поля \mathbf{H} на границе раздела сильно- и слабопроводящей сред претерпевает скачок, равный плотности поверхностного тока, сконцентрированного на границе раздела сред. Согласно векторной теореме Грина [22], выпишем вариационную постановку в следующем виде: для $\mathbf{J} \in L^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ такое, что $\forall \mathbf{v} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ выполняется

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v} d\Omega + k^2 \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Gamma_{incl}} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{n} \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dS = -i\omega \int_L \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} dl. \quad (5)$$

В силу малости толщины h пластины-включения, а также предположения об идеальном проводнике исходную пластину можно заменить эквивалентной усредненной поверхностью Γ , и тогда интеграл по поверхности в левой части выражения (5) может быть записан в виде

$$\int_{\Gamma_{incl}} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{n} \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dS = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{n}_S \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^+ - \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^-)) dS = \\ = -i\omega \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{n}_S \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)) dS,$$

где \mathbf{n}_S — единичная нормаль к поверхности Γ .

Условие (3) примет вид

$$\mathbf{n}_S \times \mathbf{H}^+ \Big|_{\Gamma_{incl}} - \mathbf{n}_S \times \mathbf{H}^- \Big|_{\Gamma_{incl}} = \mathbf{n}_S \times (\mathbf{n}_S \times \mathbf{j}_S), \quad (6)$$

$$\mathbf{j}_S = \int_h \mathbf{j} dl. \quad (7)$$

Так как $h \ll a$, $h \ll b$, интеграл в правой части выражения (7) можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки (x, y, z_0) , т. е. при $h = 0$

$$I(h) = I(0) + h \frac{\partial I(h)}{\partial h} (0) = \left(\int_{z_0}^{z_0+h} \mathbf{j} dl \right)_{h=0} + h \left(\frac{\partial}{\partial h} \int_{z_0}^{z_0+h} \mathbf{j} dl \right)_{h=0} = h \mathbf{j}.$$

Тогда выражение (6) примет вид

$$\mathbf{n}_S \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = \mathbf{n}_S \times (\mathbf{n}_S \times h \mathbf{j}) = \mathbf{n}_S \times (\mathbf{n}_S \times h \sigma_i \mathbf{E}).$$

Таким образом, вариационную формулировку (5) можно записать в следующем виде: для $\mathbf{J} \in L^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ такое, что $\forall \mathbf{v} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ выполняется

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v} d\Omega + k^2 \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} d\Omega + i\omega \sigma_i h \int_{\Gamma} (\mathbf{n}_S \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{n}_S \times \mathbf{v}) dS = -i\omega \int_L \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} dl. \quad (8)$$

Для среды с несколькими пластинами выражение (8) примет вид [23, 24]

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v} d\Omega + k^2 \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \\ & + i\omega \sum_k \left[\sigma_k h_k \int_{\Gamma_{s+}^k} (\mathbf{n}_{S_k} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{n}_{S_k} \times \mathbf{v}) dS \right] = -i\omega \int_L \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} dl, \end{aligned} \quad (9)$$

где \mathbf{n}_{S_k} — единичная нормаль к k -й тонкой пластине.

Дискретный аналог вариационных постановок (8) и (9) строится на нерегулярном адаптивном тетраэдральном конечно-элементном разбиении расчетной области Ω в дискретном подпространстве $H_0^h(\text{rot}, \Omega) \subset H_0(\text{rot}, \Omega)$. Для постановки (4) триангуляция расчетной области выполняется с учетом объема включений; для вариационной формулировки (9) включения дискретизируются как плоские поверхности.

Введенный в вариационную постановку дополнительный интеграл по поверхности включения на уровне дискретной вариационной постановки предлагается учитывать как добавочный член в глобальной матрице системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

3. Вычислительный эксперимент

3.1. Тонкие сильнопроводящие включения

Наличие тонких сильнопроводящих включений внутри слабопроводящей (или диэлектрической) вмещающей среды характерно для композитов и метаматериалов, в которых за счет периодической внутренней структуры, специфической формы включений и высокой контрастности входящих в состав материалов удается добиться совершенно новых электрофизических свойств всего образца в целом [25].

Приведенные в данной работе исследования позволяют ограничить допустимый диапазон частот, возможную контрастность электропроводности матрицы и включений, значения толщины пластин, для которых предложенная модифицированная вариационная постановка дает физически корректные результаты.

Численный эксперимент проводился в расчетной области с габаритными размерами $1 \times 1 \times 1$ м, содержащей три тонкие пластины-включения, ориентированные различным образом по отношению к возбуждающей поле генераторной петле диаметром 5 см (рис. 1). Сила тока в генераторной петле 1 А. Включения имеют следующие размеры: $0.7 \times 0.33 \times 0.016$ м; $0.02 \times 0.2 \times 0.5$ м; $0.3 \times 0.9 \times 0.02$ м. Электрофизические характеристики подобластей: для вмещающей среды $\epsilon = \epsilon_0$ (Ф/м), $\sigma = 0.1$ См/м, $\mu = \mu_0$ (Гн/м); для включений $\epsilon = \epsilon_0$ (Ф/м), $\sigma = 7.69 \cdot 10^6$ См/м, $\mu = \mu_0$ (Гн/м).

3.1.1. Допустимая контрастность коэффициента электропроводности

Электропроводность включений варьируется в пределах от 10 до 10^7 См/м. Частота 50 МГц.

На рис. 2 приведены результаты, полученные с применением стандартной постановки векторного метода конечных элементов и предложенной модифицированной постановки. Представлены действительная и мнимая части компоненты E_x напряженности электрического поля \mathbf{E} по профилю x , ($y = 0.2$ м, $z = 0.3$ м), проходящему через включения (см. рис. 1), для расчетной области с проводимостью включений 10^7 См/м. Здесь

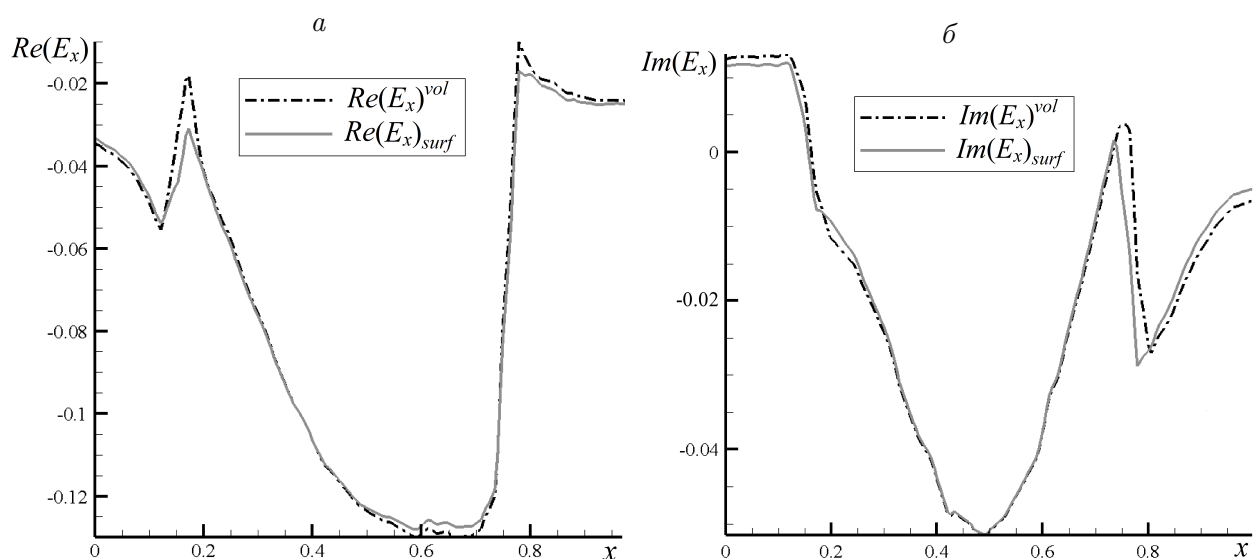


Рис. 2. Напряженность электрического поля \mathbf{E} по профилю x : a — действительная компонента $Re(E_x)$; b — мнимая компонента $Im(E_x)$

и далее на легенде графиков и в таблицах индекс *vol* соответствует решению, полученному с использованием стандартной постановки, когда тонкое включение учитывается как имеющее объем, индекс *surf* — решению, полученному с использованием модифицированной постановки, когда тонкое включение заменяется поверхностью.

Ниже в табличном виде приведены погрешности вычислений $\varepsilon = \frac{\|E^{vol} - E^{surf}\|}{\|E^{vol}\|}$ в норме пространства $H(\text{rot}, \Omega)$. За “точное” принимается решение, полученное классическим ВМКЭ. Обозначим β контрастность электропроводности включений относительно электропроводности вмещающей среды, введенную следующим образом: $\beta = \log(\sigma_i/\sigma_m)$, где σ_i — электропроводность включений, σ_m — электропроводность матрицы.

β , ед.	2	3	4	5	6	7	8
ε	1.08E-01	9.41E-02	7.96E-02	7.77E-02	7.45E-02	6.89E-02	6.88E-02

Из приведенных результатов видно, что при увеличении контрастности β точность аппроксимации возрастает, что полностью объясняется особенностями вывода модифицированной постановки и физическими предположениями, на основе которых выполнена редукция трехмерной модели.

3.1.2. Допустимый частотный диапазон

Моделирование электромагнитного поля выполнялось на трех частотах: 100 кГц, 5 и 100 МГц. На рассмотренных частотах при заданных выше электрофизических характеристиках в k^2 доминирует мнимая часть, т. е. преобладают токи проводимости и волновой процесс не формируется.

Ниже приведены погрешности вычислений в энергетической норме пространства $H(\text{rot}, \Omega)$.

f	100 кГц	5 МГц	100 МГц
ε	1.14E+01	8.13E-02	6.54E-02

Модифицированная постановка задачи приводит к некорректным результатам в случаях, когда для k^2 наблюдается значительное преобладание действительной компоненты над мнимой.

3.1.3. Применение модифицированной постановки в расчетных областях с нерегулярным расположением тонких пластин-включений

В средах, содержащих большое количество нерегулярно расположенных произвольно ориентированных тонких включений, применение модифицированной постановки позволяет значительно сократить вычислительные затраты, обеспечивая при этом приемлемую точность аппроксимации. Расчетные области (рис. 3) содержат по семь произвольно ориентированных и хаотично расположенных включений: прямых (рис. 3, а) и смесь прямых и изогнутых (рис. 3, б) тонких пластин размерами $0.1 \times 0.4 \times 0.01$ м. Электрофизические характеристики соответствуют приведенным ранее.

Электрическое поле возбуждается генераторной петлей диаметром 5 см, расположенной под углом α к плоскости xOy . Моделирование проводилось на частоте 50 МГц.

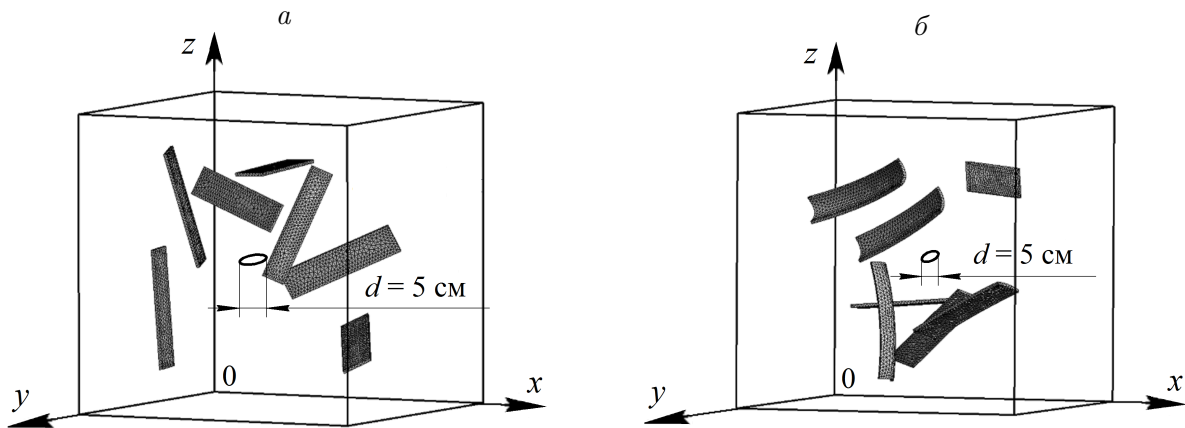


Рис. 3. Расчетные области с нерегулярным расположением включений. Габаритные размеры $1 \times 1 \times 1$ м: *a* — прямые произвольно ориентированные пластины; *б* — смесь прямых и изогнутых произвольно ориентированных пластин

На рис. 4, *a* показана действительная компонента напряженности электрического поля по профилю x ($y = 0.585$ м, $z = 0.52$ м), проходящему через включения, для расчетной области с прямыми произвольно ориентированными пластинами (см. рис. 3, *a*). На рис. 4, *б* приведена действительная компонента напряженности электрического поля в расчетной области со смесью прямых и изогнутых пластин (см. рис. 3, *б*) по профилю x ($y = 0.25$ м, $z = 0.74$ м), проходящему через включения.

Наличие в расчетной области криволинейных включений не оказывает существенного влияния на точность приближения. Соответственно, предложенная постановка может использоваться для моделирования в областях с тонкими проводящими криволинейными включениями.

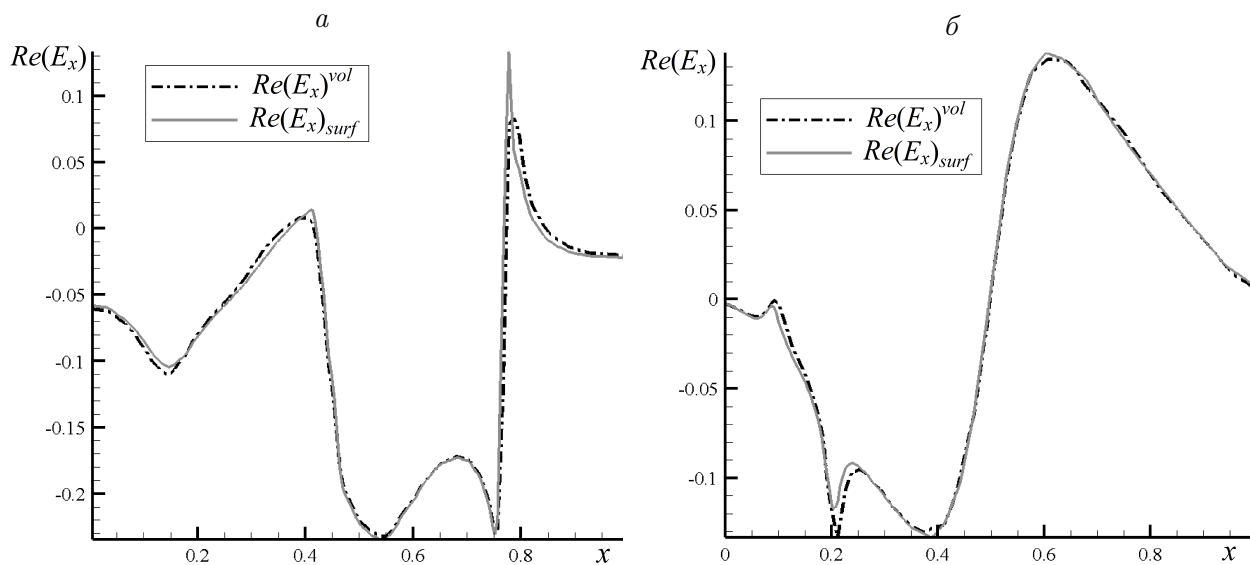


Рис. 4. Действительная компонента напряженности электрического поля $Re(E_x)$ по профилю x : *a* — расчетная область с прямыми пластинами; *б* — расчетная область со смесью прямых и изогнутых пластин

3.2. Тонкие сильнопроводящие экраны

Электромагнитными экранами называют конструкции, предназначенные для ослабления влияния электромагнитных полей, создаваемых какими-либо источниками в некоторой области пространства, не содержащей этих источников [26]. Электромагнитные экраны, применяющиеся для защиты от электрического поля, изготавливаются из металлов, таких как медь, алюминий, сталь. Для защиты от постоянных и низкочастотных магнитных полей используются экраны из ферритов. Необходимость выполнять моделирование в областях с тонкими протяженными проводящими оболочками и экранами возникает в широком круге прикладных и инженерных задач, среди которых можно выделить задачи геоэлектрики (моделирование обсаженных скважин и околоскважинного пространства [27]), электротехники (моделирование тонких конструкций, экранирующих отдельные части устройств [28, 29]) и других приложениях.

Поскольку поперечные и продольные габаритные размеры тонкого экрана могут значительно превышать его толщину, представляется оправданным применение предложенной модифицированной постановки. Далее приведены результаты исследований, позволяющие определить диапазон частот, допустимую контрастность экрана по отношению к вмещающей среде, а также его толщину, при которой модифицированная постановка дает физически корректные результаты.

3.2.1. Допустимый диапазон частот

Исследование диапазона частот проводилось на модельной задаче в расчетной области, представленной на рис. 5, *а*. Расчетная область содержит сильнопроводящую тонкую пластину, расположенную под генерирующей петлей и выступающую в качестве экрана. Размеры расчетной области $1 \times 1 \times 1$ м. Радиус петли $r = 0.025$ м. Сила тока в петле 1 А. Размеры включения $0.9 \times 0.9 \times 0.02$ м. Электрофизические параметры среды: для матрицы $\epsilon = 80\epsilon_0$ (Ф/м), $\sigma = 0.05$ См/м, $\mu = \mu_0$ (Гн/м); для экрана $\epsilon = \epsilon_0$ (Ф/м), $\sigma = 10^6$ См/м, $\mu = \mu_0$ (Гн/м), для включений $\mu_i = \mu_0$ (Гн/м), $\epsilon_i = 2\epsilon_0$ (Ф/м), $\sigma_i = 1000$ См/м. Моделирование проводилось в диапазоне частот от 100 кГц до 100 МГц.

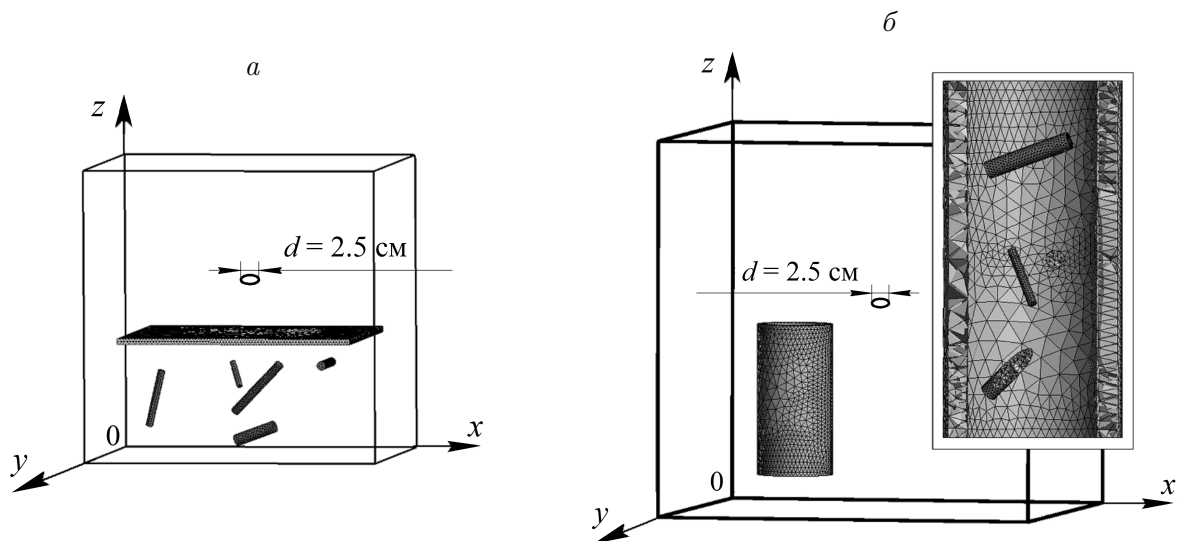


Рис. 5. Расчетные области с экранами: *а* — плоским; *б* — цилиндрическим

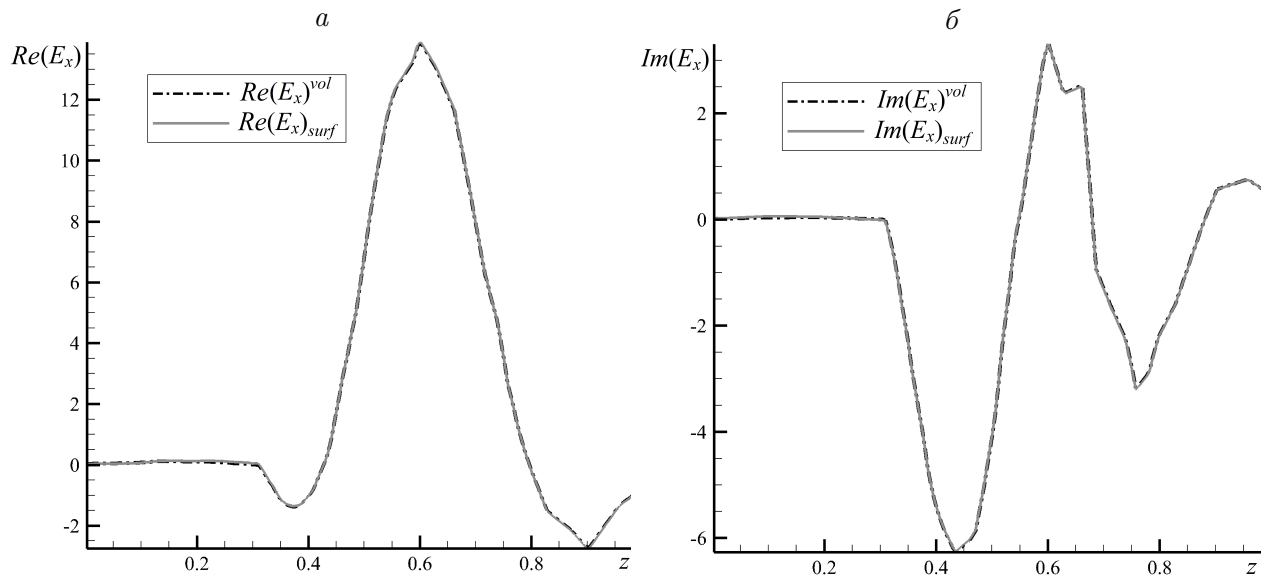


Рис. 6. Напряженность электрического поля \mathbf{E} по профилю z , проведенному через пластину-экран: a — действительная компонента $Re(E_x)$; b — мнимая компонента $Im(E_x)$

На рис. 6 представлены соответственно действительная и мнимая компоненты напряженности электрического поля по профилю z ($x = 0.3$ м, $y = 0.4$ м), проведенному через пластину, на частоте 100 МГц.

Ниже приведены относительные погрешности в норме пространства $H(\text{rot}, \Omega)$.

f	100 кГц	5 МГц	100 МГц
ε	2.34E+01	1.77E-03	9.23E-04

На низких частотах предложенная постановка дает нефизичные результаты за счет низкой точности аппроксимации действительных компонент поля. Мнимые компоненты на всех рассмотренных частотах аппроксимируются с более высокой точностью.

3.2.2. Допустимая контрастность электропроводности включений

Определение допустимых пределов контрастности электропроводности включений относительно вмещающей среды проводилось в расчетной области, представленной на рис. 5, a . Электрофизические характеристики вмещающей среды сохраняются. Электропроводность пластины варьируется в пределах от 10^3 до 10^7 См/м. Частота 5 МГц.

Т а б л и ц а 1. Относительная погрешность вычислений в нормах пространства $\|*\|_{H(\text{rot}, \Omega)}$ и $\|*\|_{L_2}$

Погрешность	β				
	5	6	7	8	9
$\varepsilon_{H(\text{rot}, \Omega)}$	7.58E-2	7.44E-3	8.38E-4	2.31E-4	2.15E-4
ε_{L_2}	2.59E-1	4.72E-2	6.25E-3	2.92E-3	2.86E-3

Компоненты напряженности электрического поля приведены в сечении расчетной области плоскостью yOz , $x = 0.6$ м, проходящей через включение. Контрастность электропроводности пластины относительно электропроводности среды обозначена β .

В табл. 1 приведены погрешности решения, полученного с использованием модифицированной вариационной постановки (E^{surf}) относительно решения, полученного при объемной дискретизации пластины (E^{vol}), для различных значений β .

Приведенные выше результаты согласуются с предположением о сильной проводимости тонкого включения по отношению к слабопроводящей вмещающей среде, использованном при выводе модифицированной постановки.

3.2.3. Ограничения на толщину пластин-экранов

Расчетная область представлена на рис. 5, а. Электрофизические характеристики матрицы сохраняются прежними. Электропроводность включения $\sigma = 10^7$ См/м. Толщина пластины-включения варьировалась от 0.005 до 0.3 м.

В табл. 2 приведены погрешности решения с использованием редуцированной вариационной постановки относительно решения, полученного при объемной дискретизации пластины и различных толщинах пластины h в соответствующих нормах.

При толщине пластины-экрана от 0.2 м и выше модифицированная постановка дает некорректный результат. Толщина скин-слоя во включении с приведенными электрофизическими характеристиками на частоте 5 МГц составляет $\delta = 0.16$ м. Толщина скин-слоя вычисляется по формуле $\delta = c \sqrt{2 \frac{\epsilon_0}{\omega \mu_m} \rho}$. То есть предложенная модифицированная постановка дает корректное с физической точки зрения решение при толщине пластины, которая меньше глубины скин-слоя, что совпадает с ограничениями других подходов к редукации модели, предлагаемых в литературе [2].

3.2.4. Цилиндрический экран

Предложенная модифицированная вариационная постановка рассматривалась применительно к областям, содержащим полые цилиндрические сильнопроводящие включения, которые на высоких частотах демонстрируют свойства экранов. На рис. 5, б представлена расчетная область размерами $1 \times 1 \times 1$ м, содержащая проводящие цилиндрические включения и полое сильнопроводящее цилиндрическое включение диаметром 20 см и высотой 40 см. Толщина полого цилиндрического включения 2 см.

Электрофизические характеристики расчетной области: для вмещающей среды $\mu_m = \mu_0$ (Гн/м), $\epsilon_m = 40\epsilon_0$ (Ф/м), $\sigma_m = 0.1$ См/м; для сильнопроводящего полого цилиндрического включения-экрана $\mu_s = \mu_0$ (Гн/м), $\sigma_s = 7.69 \cdot 10^6$ См/м; для проводящих цилиндрических включений $\mu_i = \mu_0$ (Гн/м), $\epsilon_i = 2\epsilon_0$ (Ф/м), $\sigma_i = 1000$ См/м.

Т а б л и ц а 2. Относительная погрешность вычислений в нормах пространства $\|*\|_{H(rot,\Omega)}$ и $\|*\|_{L_2}$

Погрешность	Толщина пластины h , м						
	0.005	0.02	0.04	0.08	0.1	0.2	0.3
$\epsilon_{H(rot,\Omega)}$	1.74E-04	2.15E-04	2.95E-04	4.74E-04	5.07E-04	9.52E-02	1.00E+00
ϵ_{L_2}	9.10E-04	2.86E-03	2.98E-03	5.75E-03	6,89E-03	1.16E+00	2.01E+01

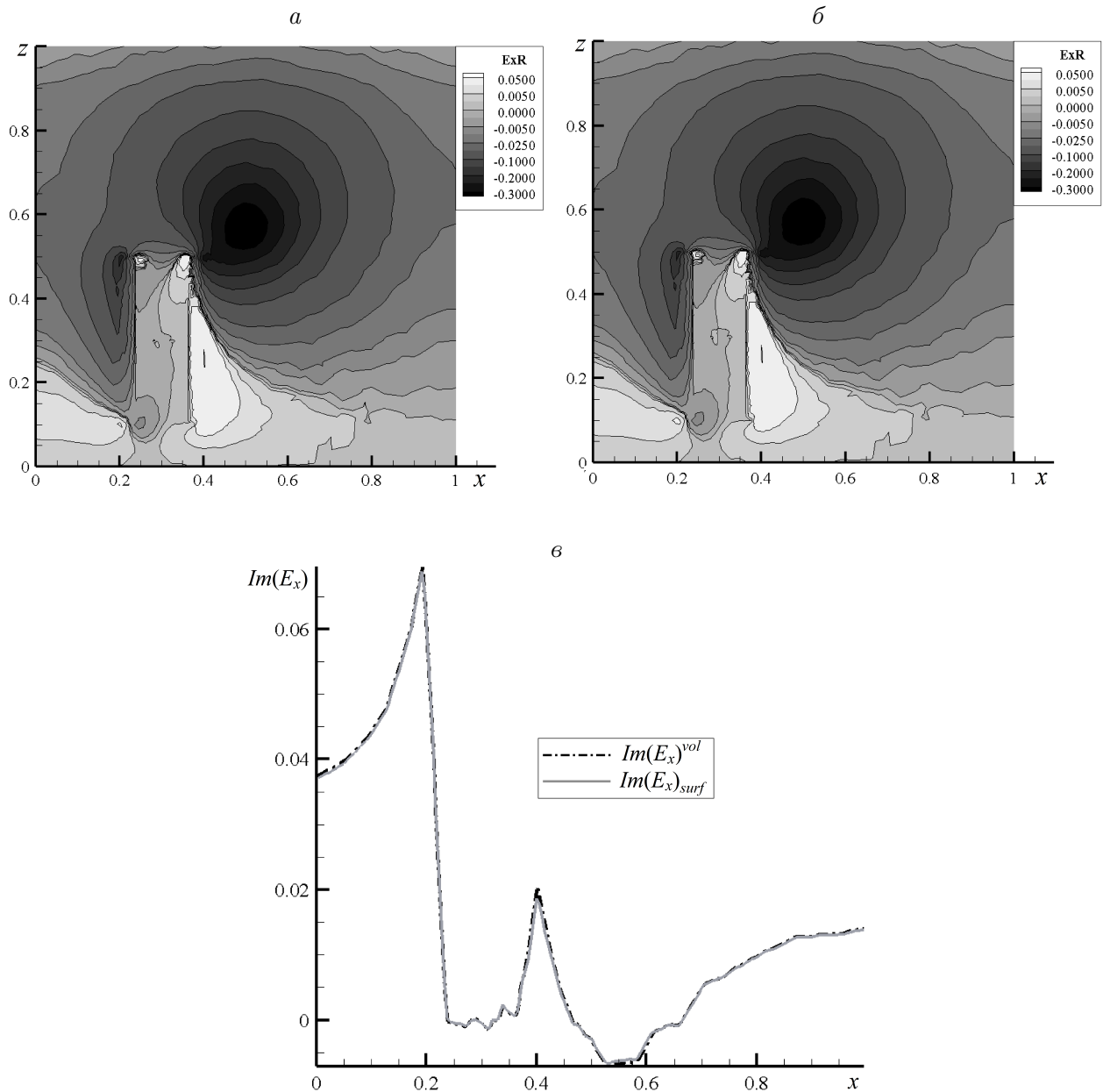


Рис. 7. Действительная компонента $Re(E_x)$ напряженности электрического поля в сечении расчетной области плоскостью $y = 0.4$ м: *a* — стандартная постановка; *б* — модифицированная постановка; *в* — вывод по профилю x

Электрическое поле возбуждается генераторной петлей диаметром 2.5 см. Моделирование проводилось на частотах от 5 кГц до 50 МГц. На рис. 7 приведены действительные части компоненты E_x напряженности электрического поля частотой 50 МГц, выведенные в сечении расчетной области плоскостью xOz , $y = 0.4$ м и по профилю x ($y = 0.4$ м, $z = 0.3$ м).

На низких частотах (от 5 до 50 кГц) действительная часть напряженности электрического поля близка к нулю и не аппроксимируется корректно при использовании модифицированной постановки. Мнимая часть напряженности электрического поля аппроксимируется достаточно хорошо во всем рассмотренном диапазоне частот.

Т а б л и ц а 3. Вычислительные затраты при решении СЛАУ в стандартной и модифицированной постановке

Постановка	Размерность СЛАУ	Время решения
<i>Расчетная область, содержащая 7 плоских пластин (рис. 3, а)</i>		
Стандартная	661 136	27 мин 20 с
Модифицированная	572 028	19 мин 23 с
<i>Расчетная область, содержащая 7 плоских и изогнутых пластин (рис. 3, б)</i>		
Стандартная	792 762	1 ч 07 мин 05 с
Модифицированная	613 126	34 мин 13 с
<i>Расчетная область с цилиндрическим экраном (рис. 5, б)</i>		
Стандартная	551 012	1 ч 02 мин 02 с
Модифицированная	448 518	33 мин 06 с

3.3. Оценка вычислительных затрат

Оценка вычислительных затрат (табл. 3) произведена для задач в расчетных областях, содержащих тонкие пластины-включения, и в расчетной области, содержащей цилиндрический экран. Вычислительные затраты получены с применением стандартной ВМКЭ-постановки и модифицированной вариационной постановки. Моделирование выполнялось на нерегулярном тетраэдральном разбиении расчетной области, на edge-элементах Неделека [30] второго типа. Полученные в результате конечно-элементной дискретизации СЛАУ являются несимметричными и комплекснозначными, в качестве итерационного метода решения СЛАУ используется BICGStab с выходом по невязке 10^{-9} . Вычисления выполнялись на ПК с процессором Intel® Core™ i5-4590 CPU 330GHz.

Использование модифицированной постановки значительно сокращает вычислительные затраты, при этом обеспечивает достаточно высокую точность аппроксимации тонких включений-пластин различной геометрии и расположения.

Заключение

Предложена модифицированная постановка векторного метода конечных элементов в функциональном пространстве $H(\text{rot}, \Omega)$, ориентированная на круг прикладных и инженерных задач моделирования электромагнитного поля в частотном диапазоне в расчетных областях с тонкими сильнопроводящими пластинами. Такая постановка позволяет получать корректное решение в средах с протяженными экранами и пластинами-включениями (прямолинейными, криволинейными и изогнутыми), значительно сократив вычислительные затраты в силу более грубой сеточной дискретизации. Однако так как данная модификация предполагает редукцию исходной физической модели, реализованная вычислительная схема имеет ряд ограничений на допустимый диапазон частот, минимальные контрастность “включение — среда” и толщину пластины.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН “Междисциплинарные интеграционные исследования” на 2018–2020 гг. по теме “Экспериментальные исследования и математическое моделирование нативных и инженерных объектов с фазоизменяемыми материалами” и программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 27 “Фундаментальные проблемы решения сложных практических задач с помощью суперкомпьютеров”.

Список литературы / References

- [1] **Le-Duc, T., Meunier, G., Chadebec, O. et al.** General integral formulation for the 3D thin shell modeling // *IEEE Transact. on Magnetics*. 2013. Vol. 49, No. 5. P. 1989–1992.
- [2] **Schmidt, K.** High-order numerical modelling of highly conductive thin sheets: Doctoral Thesis. Zurich, ETH, 2008. 189 p. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-005750560>
- [3] **Bardi, I., Peng, G., Petersson, L.E.R.** Modeling periodic layered structures by shell elements using the finite-element method // *IEEE Transact. on Magnetics*. 2016. Vol. 52, No. 3. P. 1–4.
- [4] **Bensaid, S., Trichet, D., Fouladgar, J.** Electromagnetic and thermal behaviors of multilayer anisotropic composite materials // *IEEE Transactions on Magnetics*. 2006. Vol. 42, No. 4. P. 995–998.
- [5] **Schmidt, K., Tordeux, S.** High order transmission conditions for thin conductive sheets in magneto-quasistatics // *ESAIM: Math. Modelling and Numer. Analysis*. 2011. Vol. 45, No. 6. P. 1115–1140.
- [6] **Schmidt, K., Chernov, A.** A unified analysis of transmission conditions for thin conducting sheets in the time-harmonic eddy current model // *SIAM J. on Appl. Mathematics*. 2013. Vol. 73, No. 6. P. 1980–2003.
- [7] **Schmidt, K., Hiptmair, R.** Asymptotic boundary element methods for thin conducting sheets // *Discrete Contin. Dynamical Syst. Ser. S*. 2015. Vol. 8, No. 3. P. 619–647.
- [8] **Erdozain, A., Péron, V.** Impedance Transmission Conditions for the Electric Potential across a Highly Conductive Casing // *Waves-2015*. Karlsruhe, Germany, 2015. 3 p.
- [9] **Peron, V., Schmidt, K., Durufle, M.** Equivalent transmission conditions for the time-harmonic Maxwell equations in 3D for a medium with a highly conductive thin sheet // *SIAM J. on Appl. Mathematics*. 2016. Vol. 76, No. 3. P. 1031–1052.
- [10] **Igarashi, H., Kost, A., Honma, T.** Impedance boundary condition for vector potentials on thin layers and its application to integral equations // *Europ. Phys. J. Appl. Physics*. 1998. No. 1. P. 103–109.
- [11] **Geuzaine, C.** High order hybrid finite element schemes for Maxwell’s equations taking thin structures and global quantities into account: Doctoral Thesis. Univ. of Liege, 2001. 174 p.
- [12] **Biro, O., Preis, K., Richter, K.R. et al.** FEM calculation of eddy current losses and forces in thin conducting sheets of test facilities for fusion reactor components // *IEEE Transactions on Magnetics*. 1992. Vol. 28, No. 2. P. 1509–1512.
- [13] **Nakata, T., Takahashi, N., Fujiwara, K., Shirak, Y.** 3D magnetic field analysis using special elements // *IEEE Transactions on Magnetics*. 1990. Vol. 26, No. 5. P. 2379–2381.
- [14] **Mayergoyz, I.D., Bedrosian, G.** On calculation of 3-D eddy currents in conducting and magnetic shells // *IEEE Transactions on Magnetics*. 1995. Vol. 31, No. 3. P. 1319–1324.

- [15] **Guerin, C., Maunier, G.** 3-D magnetic scalar potential finite element formulation for conducting shells coupled with an external circuit // *IEEE Transactions on Magnetics*. 2012. Vol. 48, No. 2. P. 823–826.
- [16] **Krahenbuhl, L., Muller, D.** Thin layers in electrical engineering. Example of shell models in analysing eddy-currents by boundary and finite element methods // *IEEE Transactions on Magnetics*. 1993. Vol. 29. P. 1450–1455.
- [17] **Boubekour, M., Kameni, A., Modave, A., Bernard, L., Pichon, L.** Modeling of weakly conducting thin sheets in the discontinuous Galerkin method for shielding effectiveness evaluation // *Appl. Comput. Electromagnetics Soc. J.* 2013. Vol. 28, No. 10. P. 931–937.
- [18] **Boubekour, M., Kameni, A., Bernard, L., Modave, A., Pichon, L.** 3D modeling of thin resistive sheets in the discontinuous Galerkin method for transient scattering analysis // *Proc. of the 19th Conf. on the Comput. of Electromagnetic Fields (COMPUMAG 2013)*, Budapest, Hungary, 2013. P. 5–7.
- [19] **Pebernet, L., Ferrieres, X., Pernet, S. et al.** Discontinuous Galerkin method applied to electromagnetic compatibility problems: introduction of thin wire and thin resistive material models // *IET Sci., Measurement & Technology*. 2008. Vol. 2, No. 6. P. 395–401.
- [20] **Сивухин Д.В.** Общий курс физики: Учеб. пособие для вузов. В 5 т. Т. III. 4-е изд. Электричество. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
Sivukhin, D.V. General Course of Physics. Vol. 3: Electricity. Moscow: FIZMATLIT, 2004. 560 p. (In Russ.)
- [21] **Ren, Z.** Degenerated whitney prism elements — general nodaland egde shell elements for field computation in thin structures // *IEEE Transact. on Magnetics*. 1998. Vol. 34, No. 5. P. 2547–2550.
- [22] **Баландин М.Ю., Шурина Э.П.** Векторный метод конечных элементов: Учеб. пособие. Новосибирск: НГТУ, 2001. 69 с.
Balandin, M.Y., Shurina, E.P. Vector finite-element method: Ucheb. posobie. Novosibirsk: NGTU, 2001. 69 p. (In Russ.)
- [23] **Шурина Э.П., Добролюбова Д.В., Штанько Е.И.** Модифицированная постановка векторного метода конечных элементов для областей с тонкими сильнопроводящими пластинами // *Сб. ст. VII Междунар. науч.-практ. конф. “Многоядерные процессоры, параллельное программирование, плис, системы обработки сигналов” (МППОС-2017)*. Россия, Барнаул, 10–11 марта 2017 г. С. 64–72.
Shurina, E.P., Dobrolyubova, D.V., Shtanko, E.I. The modified vector finite element method formulation for the media with thin highly conductive plates // *The Proc. of the Intern. Sci. and Pract. Conf. “Multi-core Processors, Parallel Programming, PLD, Signal Processing Systems”*. Russia, Barnaul, March 10–11, 2017. P. 64–72. (In Russ.)
- [24] **Шурина Э.П., Добролюбова Д.В., Михайлова Е.И.** Особенности конечно-элементного моделирования сред с тонкими проводящими пластинами // *Краевые задачи и матем. моделирование: Темат. сб. науч. тр. Новокузнецк*, 2017. С. 218–225.
Shurina, E.P., Dobrolyubova, D.V., Mikhaylova, E.I. Features of finite element modeling for the media with thin conductive plates // *Boundary Probl. and Math. Modelling: Sci. Works*. Novokuznetsk, 2017, P. 218–225. (In Russ.)
- [25] **Вендик И.Б., Вендик О.Г.** Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот: Обзор // *Журн. техн. физики*. 2013. Т. 83, №. 1. С. 3–28.
Vendik, I.B., Vendik, O.G. Metamaterials and their application in microwaves: A review // *Technical Physics. The Russ. J. of Appl. Physics*. 2013. Vol. 58, No. 1. P. 1–24.

- [26] **Шапиро Д.Н.** Основы теории электромагнитного экранирования. Л.: Энергия, 1975. 112 с.
Shapiro, D.N. Fundamentals of the theory of electromagnetic shielding. Leningrad: Energiya, 1975. 112 p. (In Russ.)
- [27] **Pardo, D., Torres-Verdin, C., Paszynski, M.** Simulations of 3D DC borehole resistivity measurements with a goal-oriented hp finite-element method. Pt II: Through-casing resistivity instruments // *Comput. Geosci.* 2008. Vol. 12, No. 1. P. 83–89.
- [28] **Wang, L.-B., Zhang, J.-W., See, K.Y., Svimonishvili, T.** Ultra-thin and flexible multi-band rejection EMI shield // *J. of Electromagnetic Analysis and Applications.* 2014. Vol. 6. P. 163–173.
- [29] **Unal, E., Gokcen, A., Kutlu, Y.** Effective electromagnetic shielding // *IEEE Microwave Magazine.* 2006. Vol. 7. P. 48–54.
- [30] **Webb, J.P.** Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements // *IEEE Transact. on Antennas and Propagat.* 1999. Vol. 47, No. 8. P. 1244–1253.

Поступила в редакцию 14 марта 2018 г.

A reduced formulation for modelling time-harmonic electromagnetic field in the media with thin highly conductive inclusions

SHURINA, ELLA P.^{1,2,3,*}, DOBROLYUBOVA, DARYA V.^{1,2,3}, SHTANKO, EKATERINA I.^{1,3}

¹Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

²Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 630087, Russia

³Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russia

*Corresponding author: Shurina, Ella P., e-mail: shurina@online.sinor.ru

Purpose. In this paper, we propose a reduced variational formulation for the Helmholtz equation for the electric field, in which thin highly conductive objects are approximated by surfaces with the equivalent surface current density. We conduct a study aimed at defining the range of application for the reduced variational formulation, focusing on highly contrasting thin objects of various geometrical shape and arrangement in a wide frequency range.

Methodology. The modelling is performed on unstructured tetrahedral meshes. Since the reduced variational formulation treats thin highly conductive objects as surfaces, no volume mesh is constructed inside of them. We compare the results obtained by the vector FEM using the proposed variational formulation with the results obtained using standard formulation.

Findings. Due to the fact that the proposed variational formulation does not require volume meshing of the thin objects, its computational cost is significantly lower. However, the reduced formulation yields correct results in a restricted frequency range. It also imposes some limitations on the minimal contrast and maximal thickness of the thin highly conductive objects.

Originality/value. The proposed reduced variational formulation can be applied to simulate the time-harmonic electric field in the media with thin highly conductive

inclusions of either regular or chaotic arrangement, as well as thin shielding plates or casings of various geometrical forms.

Keywords: vector finite element method, reduced models, media with thin inclusions, electromagnetic shielding.

Acknowledgements. This research was supported by the complex program of fundamental research of SB RAS “Interdisciplinary integrated research” for 2018–2020 on the subject of “Experimental research and mathematical modelling of native and engineered objects with the phase changing materials” and the Program of the Presidium RAS No. 27.

Received 14 March 2018