

Зависимость структуры отраженных от берега длинных волн от формы начального двумерного возмущения*

А. Ю. АНИКИН^{1,2}, С. Ю. ДОБРОХОТОВ^{1,2,†}

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

²Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская область, Россия

[†]Контактный e-mail: doobr@ipmnet.ru

Изучаются асимптотические решения двумерного волнового уравнения с переменной скоростью и вырождением на границе области (берега). Рассматривается задача Коши с локализованными начальными данными, отвечающая поршневой модели цунами. Приведена асимптотическая формула для решения, работающая в малой окрестности берега. Исследуется вопрос о симметрии набегающей и отраженной волн. Этот же вопрос изучается для волнового уравнения с правой частью, отвечающей распределенному по времени источнику.

Ключевые слова: волновое уравнение, набег волн на берег, асимптотическое решение, канонический оператор Маслова.

Библиографическая ссылка: Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю. Зависимость структуры отраженных от берега длинных волн от формы начального двумерного возмущения // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, № 1. С. 42–54.

DOI: 10.25743/ICT.2019.24.1.004.

Введение

Вопросам распространения и набега на берег длинных волн в океане — волн цунами, в частности, посвящено большое количество публикаций, мы ограничимся здесь упоминанием монографий [1, 2], где можно найти ссылки на другие работы. Понятно, что полная модель должна основываться на задачах со свободной границей для уравнения Навье—Стокса, что делает задачу исключительно сложной [3] и практически невозможной для прямого аналитического исследования. В настоящей работе сделан некоторый шаг в приближенном аналитическом исследовании, причем аккуратные математические результаты получены пока лишь для линейной ситуации (в случае двух горизонтальных переменных) и приведенные во введении нестрогие рассуждения нужно рассматривать как мотивацию, почему линейное приближение является разумным шагом в исследовании и нелинейной задачи.

Мы рассматриваем такие длинные волны в океане, распространение которых может быть достаточно удовлетворительно описано двумерной системой уравнений мелкой воды над переменным дном, задаваемым уравнением $z = D(x)$, $x = (x_1, x_2)$. При этом

*Title translation and abstract in English can be found on page 54.

© ИВТ СО РАН, 2019.

предполагаем, что источник волн находится достаточно далеко от берега, так что, следуя Е. Пелиновскому и Р. Мазовой [4], в открытом океане можно ограничиться линейным приближением, а нелинейные эффекты начинают играть некоторую роль в окрестности береговой линии. Соответствующая двумерно-пространственная задача с переменным дном по-прежнему оказывается очень сложной для аналитического исследования, и здесь можно воспользоваться соображениями, которые мы пока высказываем на физическом уровне строгости. А именно, при подходе волны к берегу локально фронт волны можно считать прямолинейным отрезком, а дно — наклонной плоскостью. Тогда локально-двумерную систему уравнений мелкой воды можно заменить на одномерную систему уравнений мелкой воды над плоским дном $D = \gamma x$ для превышения свободной поверхности $\eta(x, t)$ и нормальной к берегу компоненты скорости $v(x, t)$:

$$\eta_t + \frac{\partial}{\partial x}[v(\eta + D)] = 0, \quad v_t + vv_x + \mathbf{g}\eta_x = 0, \quad (1)$$

здесь \mathbf{g} — ускорение свободного падения и $\gamma = \partial D / \partial x$ — угол наклона плоскости дна. Береговая линия определяется равенством $x = 0$. Карриер и Гринспан в своей замечательной работе [5] фактически обнаружили очень простую связь между решениями этой системы и соответствующей “наивно линеаризованной” системой мелкой воды для функций $N(y, \tau)$, $V(y, \tau)$, записанной в переменных y, τ и сводящейся к двумерному волновому уравнению с изменяющей знак при $y = 0$ скоростью:

$$N_\tau + \gamma \frac{\partial}{\partial y}(yU) = 0, \quad U_\tau + \mathbf{g}N_y = 0 \iff N_{\tau\tau} - \gamma \mathbf{g} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial}{\partial y} N \right) = 0, \quad (2)$$

при этом N и U определены лишь на полуоси $y \geq 0$ и предполагаются ограниченными. Связь между $N(y, \tau)$, $V(y, \tau)$ и $\eta(x, t)$, $v(x, t)$ определяется следующим образом [4, 6]. Пусть $N(y, \tau)$, $V(y, \tau)$ — решение системы (2), а $y(x, t)$ и $\tau(x, t)$ (однозначно) определены из системы уравнений

$$x = \frac{1}{\gamma}y - \frac{1}{\gamma}N(y, \tau) + \frac{1}{2\mathbf{g}}U^2(y, \tau), \quad t = \tau + \frac{1}{\mathbf{g}}U(y, \tau). \quad (3)$$

Тогда

$$\eta = \frac{N}{\gamma} - \frac{1}{2\mathbf{g}}U^2|_{\tau=\tau(x,t), y=y(x,t)}, \quad v = U|_{y=y(x,t), \tau=\tau(x,t)} \quad (4)$$

есть решение системы (1). Условие однозначной разрешимости системы (3) предполагает необращение в нуль соответствующего якобиана. Если последнее условие выполнено, то (3), (4) задают решение (без обрушения) системы (1) фактически в параметрической форме.

Таким образом, из замены Карриера — Гринспана можно сделать следующий вывод. В некотором (достаточно грубом) приближении распространение длинных волн вдали от берега можно находить из линейного приближения, и это же приближение сначала следует использовать в окрестности береговой линии, а волновое поле вблизи берега восстанавливается по уже найденному решению линейной задачи по формулам (3), (4). Заметим, что, например, размер заплеска волны можно определить исходя только из линейного решения [4, 7]

$$x_{\text{upr}} = -\frac{1}{\gamma} \max_{\tau} N(0, \tau).$$

Аккуратный переход от двумерных нелинейных уравнений к одномерным в окрестности берега требует нетривиальных исследований и еще не завершен, и в этой работе мы ограничимся только первым шагом решения полной задачи — линейным случаем. Мы также ограничимся изучением уравнения и его решения для возвышения свободной поверхности, которую переобозначим через η . Для скорости v можно получить формулы аналогичного вида.

Нахождение волновых (невихревых) решений линеаризованных уравнений мелкой воды сводится к двумерному волновому уравнению, для которого запишем задачу Коши

$$\eta_{tt} = \nabla_x c^2(x) \nabla_x \eta, \quad \eta|_{t=0} = V \left(\frac{x - x^0}{\mu} \right), \quad \eta_t|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Это уравнение рассматривается в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Скорость распространения волны связана с функцией глубины водоема $D(x)$ формулой $c(x) = \sqrt{gD(x)}$. Предполагаем, что функция $D(x)$ гладкая, положительная внутри области Ω и равная нулю на $\partial\Omega$, при этом $\nabla_x D(x) \neq 0$ на $\partial\Omega$. Задача Коши (5) отвечает так называемой поршневой модели цунами. Здесь $\mu \ll 1$ — малый параметр, по которому пишутся асимптотики (и которому в физической постановке отвечает отношение характерной длины волны к характерному размеру области океана, а при переходе к размерным переменным он является характерным размером источника). Начальное условие представляет собой локализованную функцию в окрестности точки $x^0 \in \Omega$ (начальное возмущение свободной поверхности). Функция $V(x)$ может быть произвольной, гладкой и достаточно быстро убывающей на бесконечности. Для особой эффективности наших формул можно рассматривать так называемый простой источник [8, 9]:

$$V(x) = \frac{A}{\left(1 + \frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} \right)^{3/2}}. \quad (6)$$

Укажем также на следующее обстоятельство: хотя область Ω имеет границу $\partial\Omega$, тем не менее задавать стандартные краевые условия (например, условия Дирихле или Неймана) на $\partial\Omega$ не нужно и даже нельзя, а следует потребовать выполнения условия самосопряженности соответствующего оператора $\nabla_x c^2(x) \nabla_x$ [10]. Дифференциальному выражению $\nabla_x c^2(x) \nabla_x$ соответствуют различные самосопряженные расширения, в теории волн на воде естественно выбрать самосопряженное расширение по Фридрихсу, что соответствует ограниченности интеграла энергии [11]. Приводимые ниже асимптотики удовлетворяют этому условию.

Асимптотические формулы для решения поставленной двумерной задачи Коши изучались во многих работах (см., например, [11–16] и ссылки в них). В их основе лежат методы, известные в различных областях физики и механики как лучевые разложения, квазиклассическое приближение, геометрические асимптотики, и наиболее прагматичный и алгоритмизуемый метод, основанный на каноническом операторе Маслова [17] и его обобщениях. Построение соответствующего волнового поля опирается на траектории подходящей гамильтоновой системы в фазовом пространстве, образующие волновые фронты и лагранжевы многообразия, также заданные в фазовом пространстве. Сингулярности проектирования волновых фронтов и лагранжевых многообразий в физическое (конфигурационное) пространство представляют собой объекты, известные в геометрической оптике как каустики, фокальные точки, лагранжевы сингулярности и т. д. Асимптотика волнового поля в их окрестности отличается от стандартных

лучевых или ВКБ-асимптотик (Вентцеля — Крамера — Бриллюэна) и имеет большую амплитуду, чем в “регулярных” точках, и по этой причине представляет значительный интерес.

Можно сказать, что в рассматриваемой ситуации имеется три типа каустики и фокальных точек: 1) это “сильная” фокальная точка $x = x^0$, в окрестности которой локализовано начальное возмущение, 2) “стандартные” пространственно-временные каустики, 3) береговая линия (“нестандартная каустика”). Про первые два типа особенностей, формулы для решения в их окрестности и связанные с ними эффекты написано, в частности, в обзоре [18], там же приведена подробная библиография. Построение асимптотик в случае 3 сильно отличается от построения асимптотик в окрестности “стандартных” каустик и является нетривиальным с математической точки зрения, поскольку в окрестности берега характеристики становятся нестандартными (импульсы уходят на бесконечность). Это приводит и к серьезным техническим трудностям. Метод построения таких асимптотик, основанный на квантовании Фока [19] канонических преобразований, изложен в [11] (см. также библиографию в обзоре [18]). Основной результат работы [11] состоит в существенном упрощении асимптотических формул, приведенных в указанных статьях.

Важно, что оперирование с конечными формулами и их анализ сводятся к манипулированию с элементарными или специальными функциями, решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений и, в худшем случае, с однократным интегрированием. Работа с этими формулами уже не требует специальных знаний из геометрии, теории функций и численного анализа. Кроме того, она не сильно использует ресурс машинного времени. Таким образом, анализ решения в зависимости от различных параметров можно проделать на персональном компьютере с использованием программ типа Wolfram Mathematica, Maple и пр.

В нашем исследовании приведены формулы для асимптотики решения, работающие в окрестности волнового фронта и малой окрестности берега (размера $O(\mu)$). Общая формула содержит однократное интегрирование, а для случая простого источника она не содержит интегрирования вовсе. Анализ этой формулы позволяет сравнивать функцию профиля набегающей и отраженной волн. В частности, если преобразование Фурье функции источника \tilde{V} вещественно, то профили набегающей $\eta(x, T - t)$ и отраженной $\eta(x, T + t)$ ($t = T -$ момент прихода волнового фронта в данную точку берега) волн либо различаются знаком, либо совпадают (в зависимости от количества фокальных точек, которые волна встретила по пути, и количества ее отражений от берега). Это, в частности, верно для простого источника или гауссовой экспоненты. Профили набегающей и отраженной волн, таким образом, связаны друг с другом преобразованием Гильберта (в одномерном случае см. [4]). С точки зрения асимптотической теории этот факт связан со скачком индекса Маслова при пересечении “береговой каустики”. В нашем случае, в отличие от [4], изменения формы профиля не происходит, поскольку профиль близок к собственной функции преобразования Гильберта. На этот факт обратил наше внимание В.Е. Назайкинский. Ситуация изменяется, если \tilde{V} — комплексная функция, что может иметь место, если источник обладает другими симметриями по сравнению с простым источником или не имеет симметрий вовсе. В этом случае набегающая и отраженная волны могут значительно различаться. Они также будут различаться, если вместо поршневого модели, где источник “действует мгновенно”, рассмотреть модель с источником, “распределенным во времени” (в волновое уравнение надо добавить правую часть, содержащую производную от дельта-образной функции).

1. Характеристики и волновой фронт

Важную роль в асимптотических формулах играют решения $x = x(t)$, $p = p(t)$ системы уравнений Гамильтона в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{p,x}^4$, называемые характеристиками:

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x, \quad H(x_1, x_2, p_1, p_2) = c(x)\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \equiv c(x)|p|. \quad (7)$$

Рассмотрим семейство характеристик, являющихся решением системы (7) с начальными условиями

$$(x_1(0), x_2(0)) = x^0, \quad p_1(0) = \cos \psi, \quad p_2(0) = \sin \psi. \quad (8)$$

На кривых в качестве параметра удобно ввести не время t , а “эйконал” $\tau = c_0 t$ (здесь $c_0 = c(x^0)$). Таким образом, эти кривые задаются в виде $x = X(\tau, \psi)$, $p = P(\tau, \psi)$.

Зафиксируем $\tau = \tau_0$. Множество

$$\Gamma_{\tau_0} = \{x = X(\tau_0, \psi), \quad p = P(\tau_0, \psi) : \psi \in [0, 2\pi)\}$$

называется волновым фронтом в фазовом пространстве, а его проекция в физическое пространство $\gamma_{\tau_0} = \{x = X(\tau_0, \psi) : \psi \in [0, 2\pi)\}$ — волновым фронтом в физическом пространстве. Оказывается, решение $\eta(x, t)$ рассматриваемой задачи (5) локализовано в окрестности волнового фронта $x \in \gamma_{c_0 t}$. Сами характеристики подходят к границе области $\partial\Omega$ под прямым углом и формально не продолжают далее, поскольку импульс p уходит на бесконечность. Однако, несмотря на то что характеристики теряют смысл при попадании на границу, решение задачи (5) продолжает быть локализованным вблизи фронта и после этого момента при условии, что верно определено правило отражения от границы.

Чтобы сформулировать правило отражения характеристик от границы, для начала рассмотрим простейший частный случай линейного дна. Пусть $\Omega = \{x_1 > 0\}$, $D(x) = x_1$. Получаемая при этом гамильтонова система легко интегрируется. Она представляет собой геодезический поток метрики $\frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_1}$, и характеристики представляют собой циклоиды. (Этот факт был известен еще И. Бернулли при рассмотрении задачи о брахистохроне.) Приведем решение задачи Коши (7), (8), где $x^0 = (1, 0)$:

$$X_1(\tau, \psi) = \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2 \psi}, \quad X_2(\tau, \psi) = \frac{\tau}{2 \sin \psi} + \frac{\sin 2\psi - \sin 2\phi}{2 \sin^2 \psi}, \quad (9)$$

$$P_1(\tau, \psi) = \frac{\sin \psi}{\operatorname{tg} \phi}, \quad P_2(\tau, \psi) = \sin \psi. \quad (10)$$

Здесь $\phi = \psi + \frac{\tau \sin \psi}{2}$, $\tau = t$ [15]. Для этого частного случая правило отражения от границы состоит в переходе к следующей арке циклоиды. В общем случае, чтобы продолжить характеристику, необходимо ввести специальные канонические координаты в окрестности границы [11]. Пусть граница локально представляет собой график функции $x_1 = f(x_2)$, а сама область задается неравенством $x_1 > f(x_2)$. Введем локальные координаты q , y и канонически сопряженные импульсы θ , ξ :

$$q = p_1^{-1}, \quad y = x_2, \quad \theta = p_1^2(x_1 - f(x_2)), \quad \xi = p_2 + f'(x_2)p_1. \quad (11)$$

Эта каноническая замена переменных регуляризует границу ($p_1 = \infty$ превращается в $q = 0$) и позволяет продолжить характеристики после столкновения с границей. Отметим, что $q < 0$ отвечает точкам на характеристиках до столкновения с границей, а $q > 0$ — после столкновения. Для частного случая линейного дна формулы (9), (10) можно переписать в виде $q = Q(\tau, \psi)$, $\theta = \Theta(\tau, \psi)$, $y = Y(\tau, \psi)$, $\xi = \Xi(\tau, \psi)$, где

$$Q = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sin \psi}, \quad \Theta = \cos^2 \phi, \quad Y(\tau, \psi) = X_2, \quad \Xi(\tau, \psi) = P_2.$$

2. Общая формула для решения

Как сказано выше, все точки береговой линии $\partial\Omega$ являются фокальными, т. е. в них якобиан $\det \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(\tau, \psi)}$ обращается в нуль.

Рассмотрим так называемые регулярные особые точки берега $x \in \partial\Omega$. Это такие точки, где якобиан $\det \frac{\partial(Q, Y)}{\partial(\tau, \psi)}$ не обращается в нуль (это означает, что фокусировки лучей в точке границы не происходит). Напишем формулу для решения задачи Коши (5), работающую в окрестности берега, где все точки — регулярные. Для этого потребуется ввести некоторые дополнительные конструкции. Положим

$$\Sigma(\tau, \psi) = 2Q\sqrt{\Theta}, \quad J_{\sigma y}(\tau, \psi) = \det \frac{\partial(\Sigma, Y)}{\partial(\tau, \psi)}.$$

Легко видеть, что якобиан $J_{\sigma y}$ в интересующей нас окрестности берега отличен от нуля. Аналогично функции Q функция Σ отрицательна до момента столкновения, положительна после и равна нулю в момент столкновения. Решим в изучаемой окрестности уравнения $\sigma = \Sigma(\tau, y)$, $y = Y(\tau, y)$ относительно σ, τ ; получим $\tau = \tau(\sigma, y)$, $\psi = \psi(\sigma, y)$. Далее положим

$$\tau_{\text{ev}}(\sigma, y) = \frac{\tau(\sigma, y) + \tau(-\sigma, y)}{2}, \quad \tau_{\text{odd}}(\sigma, y) = \frac{\tau(\sigma, y) - \tau(-\sigma, y)}{2}.$$

Наконец, пусть $\mathbf{J}(z) = \mathbf{J}_0(z) + i\mathbf{J}_1(z)$, где $\mathbf{J}_0, \mathbf{J}_1$ — функции Бесселя первого рода, и преобразование Фурье функции источника $V(z)$

$$\tilde{V}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} e^{-ik \cdot z} V(z) dz.$$

Пусть целое число m — это индекс Морса траектории $x = X(\tau, \psi)$, т. е. количество фокальных точек на этой траектории.

В [16] показано, что главный член $\eta(x, t)$ при $\mu \rightarrow 0$ асимптотики решения задачи Коши (5) в достаточной близкой окрестности волнового фронта имеет вид

$$\eta(x, t) = \tilde{\eta}(2\sqrt{x_1 - f(x_2)}, x_2, t) + \tilde{\eta}(-2\sqrt{x_1 - f(x_2)}, x_2, t), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\sigma, y, t) = & \left\{ \left(\frac{\tau_{\text{odd}}}{2\sigma |J_{\sigma y}(\tau, \psi)|} \right)^{1/2} \times \right. \\ & \left. \times \operatorname{Re} \left[e^{-\frac{i\pi m}{2}} \int_0^{\infty} e^{\frac{i\rho}{\mu}(\tau_{\text{ev}} - c_0 t)} \mathbf{J} \left(\frac{\rho \tau_{\text{odd}}}{\mu} \right) \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi)) \rho d\rho \right] \right\} \Bigg|_{\substack{\tau_{\text{odd}} = \tau_{\text{odd}}(\sigma, y) \\ \tau_{\text{ev}} = \tau_{\text{ev}}(\sigma, y) \\ \tau = \tau(\sigma, y) \\ \psi = \psi(\sigma, y)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

В случае простого источника (6) формула(13) записывается как

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\sigma, y, t) = & Ab_1 b_2 \left(\frac{\tau_{\text{odd}}(\sigma, y)}{2\sigma |J_{\sigma y}(\tau(\sigma, y), \psi(\sigma, y))|} \right)^{1/2} \times \\ & \times \operatorname{Re} \left[e^{-\frac{i\pi m}{2}} \frac{\beta(\psi(\sigma, y)) + \frac{i}{\mu}(-\tau(-\sigma, y) + c_0 t)}{\left(\left(-\beta(\psi(\sigma, y)) + \frac{i}{\mu}(\tau_{\text{ev}}(\sigma, y) - c_0 t) \right)^2 + \frac{(\tau_{\text{odd}}(\sigma, y))^2}{\mu^2} \right)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\beta(\psi) = \sqrt{b_1^2 \cos^2 \psi + b_2^2 \sin^2 \psi}$.

3. Анализ решения в малой окрестности берега

Формулы (13) и (14) работают в достаточно малой, но конечной, т. е. не зависящей от μ , окрестности берега. Они существенно упрощаются, если взять окрестность размером порядка μ . Введем в этой окрестности координаты s, z , где s — натуральный параметр на кривой $\partial\Omega$, а z — координата по нормали к $\partial\Omega$. Пусть $T_0(s) = \frac{\tau(0, s)}{c_0}$ — время, за которое характеристика приходит из начальной точки x^0 в точку $\partial\Omega$, отвечающую координате s ; $\Gamma(s)$ — угол наклона дна к берегу в точке x . Положим также

$$\Psi_0(s) = \psi(\sigma, s)|_{\sigma=0}, \quad F_0(s) = \sqrt{\frac{2|\Psi_0'(s)|c_0^2}{\mathbf{g} \operatorname{tg} \Gamma(s)}}.$$

Теорема 1. При $z = O(\mu)$ формула для решения задачи Коши (5) принимает вид

$$\eta(s, z, t) = F_0(s) \operatorname{Re} \left[e^{-\frac{i\pi m}{2}} \int_0^{\infty} e^{\frac{i\rho c_0}{\mu}(T_0 - t)} \mathbf{J}_0 \left(\frac{2\rho\sqrt{z}c_0}{\mu\sqrt{\mathbf{g} \operatorname{tg} \Gamma(s)}} \right) \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\Psi_0(s))) \rho d\rho \right]. \quad (15)$$

В случае простого источника формула (15) записывается как

$$\eta(s, z, t) = Ab_1 b_2 F_0(s) \operatorname{Re} \left[e^{-\frac{i\pi m}{2}} \frac{\beta_0 + \frac{ic_0}{\mu}(t - T_0(s))}{\left(\left(\beta_0 + \frac{ic_0}{\mu}(t - T_0(s)) \right)^2 + \frac{4zc_0^2}{\mathbf{g} \operatorname{tg} \Gamma(s)\mu^2} \right)^{3/2}} \right], \quad (16)$$

где $\beta_0 = \beta(\Psi_0(s))$.

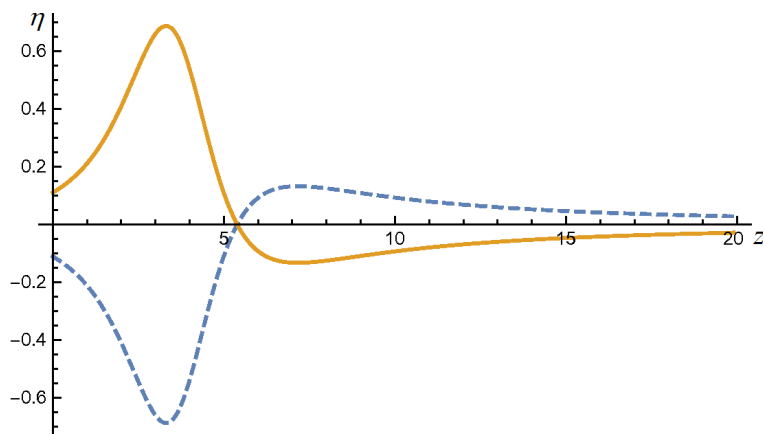


Рис. 1. Набегающая $\eta(s, z, T - t)$ (сплошная кривая) и отраженная $\eta(s, z, T + t)$ (штриховая) волны как функции от z . Поршневая модель

Аккуратный вывод формул (15), (16) будет приведен в отдельной работе.

Отметим, что хотя формулы (12)–(14) являются более общими по сравнению с (15), (16), последние формулы более эффективны, поскольку в них входят такие геометрические величины, как ускорение свободного падения, угол наклона дна к берегу, начальная скорость c^0 , связанная с глубиной океана в точке x^0 . Они содержат две величины, связанные с гамильтоновой системой: время прихода характеристики $T_0(s)$ и угол, под которым необходимо запустить характеристику $\Psi(s)$, вычисление которых нужно производить только на границе $\partial\Omega$, а не в ее окрестности.

Теорема 2. Если функция \tilde{V} вещественна, то

$$\eta(s, z, 2T_0 - t) = (-1)^m \eta(s, z, t).$$

Доказательство. В самом деле, подынтегральное выражение в (15) при замене $t \rightarrow 2T_0 - t$ преобразуется в комплексно-сопряженное. Таким образом, его действительная часть остается без изменения, а мнимая часть меняет знак. \square

В частности, если рассматривать случай, когда характеристика в первый раз приходит на $\partial\Omega$, то $m = 1$ и волна после отражения “переворачивается”. Таким образом, утверждение теоремы верно как для простого, так и для гауссова источника. График $\eta(s, z, t)$ от z при фиксированных s, t для случая простого источника приведен на рис. 1.

Отметим, что наш результат согласуется с [20], где решение строилось с использованием приближения постоянного дна на глубине, а в окрестности берега использовалось точное решение одномерной задачи. Отметим также, что это точное решение есть не что иное, как решение (16) в виде функции от z при фиксированном s и $m = 1$. Качественно такая же картина останется, если взять источник в виде гауссовой экспоненты. Если же источник не обладает симметриями, то такое свойство набегающей и отраженной волн, вообще говоря, нарушается.

4. Волны от распределенного по времени источника

Интересна с практической точки зрения (когда функция \tilde{V} является комплексной) задача о распространении волн от источника распределенного во времени. Это задача Коши для уравнения с правой частью:

$$\eta_{tt} - \langle \nabla_x, c^2(x) \nabla_x \rangle \eta = f(x, t), \quad \eta|_{t=0} = 0, \quad \eta_t|_{t=0} = 0, \quad (17)$$

$$f(x, t) = \lambda^2 g'(\lambda t) (\chi V) \left(\frac{x - x^0}{\mu} \right), \quad t \in [0, T]. \quad (18)$$

Здесь $V(y)$ — функция начального возмущения, удовлетворяющая тем же условиям, что и в случае приведенной выше задачи для поршневой модели (5). В частности, можно рассматривать простой источник (6). Функция $g(\tau)$ предполагается гладкой на $[0, \infty)$, убывающей на бесконечности и такой, что $g(0) = 0$, и $\int_0^\infty g(\tau) d\tau = 1$. Функция $\chi(z)$ — гладкая и финитная, равная тождественной единице в окрестности нуля. Параметр $\mu > 0$ малый и играет ту же роль, что и в задаче (5), а параметр $\lambda > 0$ большой, причем предполагается выполненным соотношение $\lambda\mu > \text{const} > 0$. Легко видеть, что $\lambda^2 g'(\lambda t)$ стремится к δ -функции Дирака при $\lambda \rightarrow \infty$ и задача (17), (18) переходит в задачу (5). Таким образом, (17), (18) можно трактовать как задачу о распространении возмущений не от мгновенного источника, а от действующего некоторое время. Время действия источника λ^{-1} .

Такая задача изучалась в работе [21], где показано, что асимптотика решения вдали от точки x^0 совпадает с асимптотикой решения однородной задачи (5) с некоторым источником, называемым эквивалентным.

Теорема 3. При $z = O(\mu)$ формула для решения задачи Коши (17), (18) принимает вид

$$\begin{aligned} \eta(s, z, t) = & \sqrt{2\pi} F_0(s) \text{Re} \left[e^{-\frac{i\pi m}{2}} \times \right. \\ & \left. \times \int_0^\infty e^{\frac{i\rho c_0}{\mu}(T_0-t)} \mathbf{J}_0 \left(\frac{2\rho\sqrt{z}c_0}{\mu\sqrt{\mathbf{g} \operatorname{tg} \Gamma(s)}} \right) \overline{\tilde{g}\left(\frac{\rho}{\Lambda}\right)} \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\Psi_0(s))) \rho d\rho \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $\Lambda = \lambda\mu/c_0$. В случае простого источника в формулу (19) надо подставить $\tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\Psi_0(y))) = e^{-\rho\beta(\Psi_0(y))}$.

Доказательство. Непосредственное использование явного вида эквивалентного источника (15) из [21] позволяет записать решение задачи (17), (18) в виде (12), (13), где в подынтегральное выражение добавлен множитель $\sqrt{2\pi} \tilde{g}\left(\frac{\rho}{\Lambda}\right)$. Дальнейшее повторяет доказательство теоремы 1. \square

В качестве примера рассмотрим функцию

$$g(\tau) = e^{-\tau} P_n(\tau), \quad P_n = \sum_{j=1}^n \frac{a_j \tau^j}{j!}, \quad \sum_{j=1}^n a_j = 1, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

В простейших случаях $g(\tau) = \tau e^{-\tau}$, $g(\tau) = \left((1-a)\tau + \frac{a}{2}\tau^2 \right) e^{-\tau}$. Тогда преобразование

$$\text{Фурье имеет вид } \tilde{g}(\xi) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{(1+i\xi)^{j+1}}.$$

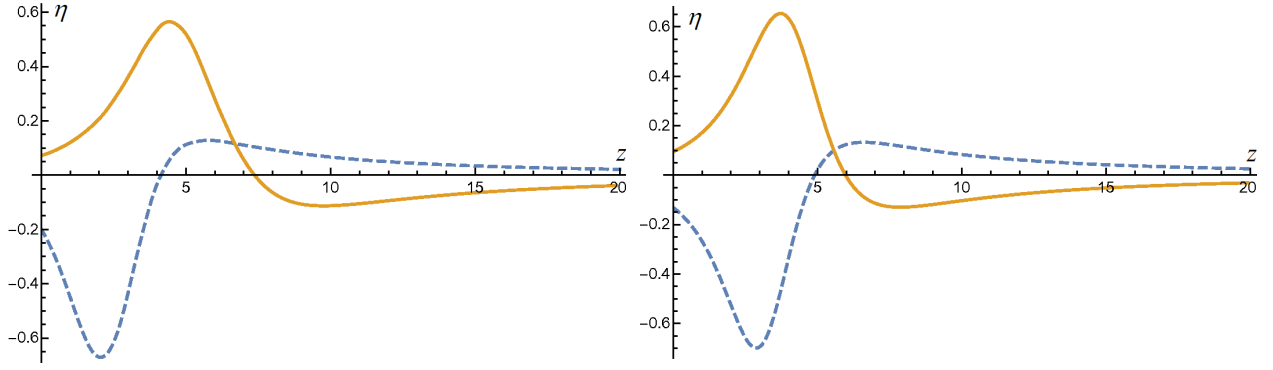


Рис. 2. Набегающая $\eta(s, z, T - t)$ (сплошная кривая) и отраженная $\eta(s, z, T + t)$ (штриховая) волны как функции от z . Источник, распределенный во времени. Слева $\Lambda = 10$, справа $\Lambda = 30$

Чтобы исследовать $\eta(s, z, t)$ (как функцию от z при фиксированных s, t), можно использовать непосредственное интегрирование по формуле (19). Более простой способ, предложенный в работе [22], состоит в приближении функции $\tilde{g}\left(\frac{\rho}{\Lambda}\right)\tilde{V}(\rho\mathbf{n}(\Psi_0(y)))$ функцией $\tilde{g}_N\left(\frac{\rho}{\Lambda}\right)\tilde{V}(\rho\mathbf{n}(\Psi_0(y)))$, где g_N — полином.

Поскольку для простого источника $\tilde{V} = e^{-\beta\rho}$, в качестве таких аппроксимирующих полиномов естественно брать полиномы Лагерра. Обозначим через η_N функцию, задаваемую формулой (19), где g заменено на g_N . Тогда, как несложно понять, η_N представима в виде дифференциального оператора по переменной t от функции η , задаваемой той же формулой при $\tilde{g} = 1$

$$\tilde{\eta}_N(\sigma, z, t) = \sum_{m=0}^N s_m \left(\frac{i\Lambda}{\lambda}\right)^m \frac{\partial^m \tilde{\eta}_{\text{hom}}}{\partial t^m} = \sum_{m=0}^N s_m \left(\frac{i\mu}{c_0}\right)^m \frac{\partial^m \tilde{\eta}_{\text{hom}}}{\partial t^m},$$

где $\tilde{G}_N(\rho) = \sum_{m=0}^N s_m \rho^m$. Вид набегающей и отраженных волн при разных Λ показан на рис. 2. Источник V здесь брался простой. Отметим, что при росте Λ , отвечающем почти мгновенному источнику, профили набегающей и отраженной волн почти совпадают (с точностью до знака). Это свойство постепенно разрушается по мере уменьшения Λ .

Заключение

Исследовались асимптотические решения двумерного волнового уравнения с переменной скоростью и вырождением на границе области (берега). Рассматривалась задача Коши с локализованными начальными данными, отвечающая поршневой модели цунами. Предложены формулы для решения в $O(\mu)$ -окрестности берега. Хотя они являются следствием более общих формул, полученных ранее в [16], они более эффективны, поскольку в них содержится значительно меньше объектов, связанных с гамильтоновой системой характеристик.

Анализ полученной формулы показывает, что если преобразование Фурье функции источника вещественно, то профили набегающей и отраженной волн либо отличаются знаком, либо совпадают в зависимости от количества фокальных точек на характеристике. Полученная формула была применена также к модели цунами с распределенным

по времени источником. Такая задача сводится к поршневой модели для некоторого эквивалентного источника. Преобразование Фурье этого источника не является вещественным, и в этом случае уже не будет симметрии профилей набегающей и отраженной волн.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 16-11-10282). Авторы благодарны В.Е. Назайкинскому и Д.С. Миненкову за полезные обсуждения.

Список литературы / References

- [1] **Пелиновский Е.Н.** Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: Ин-т прикл. физики, 1996. 276 с.
Pelinovsky, E.N. Hydrodynamics of tsunami waves. Nizhniy Novgorod: In-t Prikl. Fiziki, 1996. 276 p. (In Russ.)
- [2] Вычислительный эксперимент в проблеме цунами / Ю.И. Шокин, Л.Б. Чубаров, Ан.Г. Марчук, К.В. Симонов. Новосибирск: Наука, 1989. 168 с.
Computational experiment in tsunami problem / Yu.I. Shokin, L.B. Chubarov, An.G. Marchuk, K.V. Smirnov. Novosibirsk: Nauka, 1989. 168 p. (In Russ.)
- [3] **Kozelkov, A., Efremov, V., Kurkin, A. et al.** Three-dimensional numerical simulation of tsunami waves based on Navier – Stokes equation // Sci. of Tsunami Hazards. 2017. Vol. 36, No. 4. P. 45–58.
- [4] **Pelinovsky, E.N., Mazova, R.Kh.** Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles // Natural Hazards. 1992. Vol. 6, No. 3. P. 227–249.
- [5] **Carrier, G.F., Greenspan, H.P.** Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. of Fluid Mechanics. 1958. Vol. 4, No. 1. P. 97–109.
- [6] **Доброхотов С.Ю., Тироцци Б.** Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$ // Успехи матем. наук. 2010. Т. 65, № 1(311). С. 185–186.
Dobrokhотов, S.Yu., Tirozzi, B. Localized solutions of one-dimensional non-linear shallow-water equations with velocity $c = \sqrt{x}$ // Russ. Math. Surveys. 2010. No. 65:1. P. 177–179.
- [7] **Dobrokhотов, S.Yu., Minenkov, D.S., Nazaikinskii, V.E., Tirozzi, B.** Simple exact and asymptotic solutions of the 1D run-up problem over a slowly varying (quasi-planar) bottom / Edited by E. Agliari, A. Barra, N. Carlevaro, G. Montani // Theory and Appl. in Math. Physics. Ch. 3. Singapore: WORLD SCI., 2015. P. 29–47.
- [8] **Доценко С.Ф., Сергиевский Б.Ю., Черкасов Л.В.** Пространственные волны цунами, вызванные знакопеременным смещением поверхности океана // Исследования цунами. 1986. № 1. С. 7–14.
Dozenko, S.F., Sergievskiy, B.Yu., Cherkasov, L.V. Space tsunami waves generated by alternating displacement of the ocean surface // Issledovaniya Tsunami. 1986. No. 1. P. 7–14. (In Russ.)
- [9] **Wang, S., Le Mehaute, B., Chia-Chi Lu.** Effect of dispersion on impulsive waves // Marine Geophys. Res. 1987. No. 9. P. 95–111.
- [10] **Олейник О.А., Радкевич Е.В.** Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки. Сер. Математика. Матем. анализ. 1969. М.: ВИНТИ, 1971. С. 7–252.
Oleinik, O.A., Radkevich, E.V. Second order equations with nonnegative characteristic form // Itogi Nauki. Ser. Matematika. Matem. Analiz. 1969. Moscow: VINITI, 1971. P. 7–252. (In Russ.)

- [11] **Назайкинский В.Е.** Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающемуся на границе волновому уравнению // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 261–276.
Nazaikinskii, V.E. The Maslov canonical operator on Lagrangian manifolds in the phase space corresponding to a wave equation degenerating on the boundary // Math. Notes. 2014. Vol. 96, No. 2. P. 248–260.
- [12] **Vukasinac, T., Zhevandrov, P.** Geometric asymptotics for a degenerate hyperbolic equation // Russ. J. of Math. Physics. 2002. Vol. 9, No. 3. P. 371–381.
- [13] **Dobrokhotov, S., Shafarevich, A., Tirozzi, B.** Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations // Russ. J. of Math. Physics. 2008. Vol. 15, No. 2. P. 192–221.
- [14] **Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Тироцци В.** Асимптотические решения двумерного модельного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и локализованными начальными данными // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 6. С. 67–90.
Dobrokhotov, S.Yu., Nazaikinskii, V.E., Tirozzi, B. Asymptotic solutions of the two-dimensional model wave equation with degenerating velocity and localized initial data // St. Petersburg Math. J. 2011. Vol. 22, No. 6. P. 895–911.
- [15] **Dobrokhotov, S.Yu., Nazaikinskii, V.E., Tirozzi, B.** Two-dimensional wave equation with degeneration on the curvilinear boundary of the domain and asymptotic solutions with localized initial data // Russ. J. of Math. Physics. 2013. Vol. 20, No. 4. P. 389–401.
- [16] **Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.** Простые асимптотики обобщенного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и их приложения в линейной задаче о набеге длинных волн на берег // Матем. заметки. 2018. Т. 104, № 4. С. 483–504.
Anikin, A.Yu., Dobrokhotov, S.Yu., Nazaikinskii, V.E. Simple asymptotics of generalized wave equation with degenerating velocity and their application in linear long wave run-up problem // Math. Notes. 2018. Vol. 104, No. 3-4. P. 471–488.
- [17] **Маслов В.П., Федорюк М.В.** Квазиклассическое приближение квантовой механики. М.: Наука, 1976. 296 с.
Maslov, V.P., Fedoriuk, M.V. Semiclassical approximation in quantum mechanics. Dordrecht: Reidel, 1981. 302 p.
- [18] **Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.** Асимптотики локализованных волновых и вихревых решений линеаризованной системы уравнений мелкой воды // Актуальные пробл. механики: сб. статей, посвященных 50-летию ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского. М.: Наука, 2015. С. 98–139.
Dobrokhotov, D.S., Nazaikinskii, V.E. Asymptotics of localized wave and vortex solutions of linearized shallow water equations // Aktual'nye Probl. Mekhaniki: Sb. St., Posvyashchennykh 50-letiyu IPMekh RAN im. A.Yu. Ishlinskogo: Moscow: Nauka, 2015. P. 98–139. (In Russ.)
- [19] **Фок В.А.** О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике // Вестн. Ленингр. ун-та. 1959. № 16. С. 67–70.
Fock, V.A. On the canonical transformation in classical and quantum mechanics // Acta Phys. Acad. Sci. Hungaricae. 1969. Vol. 27, No. 1-4. P. 219–224.
- [20] **Аксенов А.В., Доброхотов С.Ю., Дружков К.П.** Точные решения типа “ступеньки” одномерных уравнений мелкой воды над наклонным дном // Матем. заметки. 2018. Т. 104, № 6. С. 930–936.
Aksenov, A.V., Dobrokhotov, S.Yu., Druzhkov, K.P. Exact solutions of “step-function” type for one-dimensional shallow water equation over the inclined bottom // Matem. Zametki. 2018. Vol. 104, No. 6. P. 930–936. (In Russ.)

- [21] Dobrokhotov, S.Yu., Minenkov, D.S., Nazaikinskii, V.E., Tirozzi, B. Functions of noncommuting operators in an asymptotic problem for a 2D wave equation with variable velocity and localized right-hand side // Operator Theory: Advances and Appl. 2013. Vol. 228. P. 95–126.
- [22] Доброхотов С.Ю., Аникин А.Ю. О приближении решений двумерного волнового уравнения с переменной скоростью и локализованной правой частью с помощью некоторых “простых” решений // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 6. С. 825–837.
Dobrokhotov, S.Yu., Anikin, A.Yu. Approximation of solutions of the two-dimensional wave equation with variable velocity and localized right-hand side using some “simple” solutions // Matem. Zametki. 2016. Vol. 100, No. 6. P. 796–806.

Поступила в редакцию 5 декабря 2018 г.

Effect of the shape of initial perturbation on a reflected long wave from a beach

ANIKIN, ANATOLY YU.^{1,2}, DOBROKHOTOV, SERGEY YU.^{1,2,*}

¹Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, 119526, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia

*Corresponding author: Dobrokhotov, Sergey Yu., e-mail: dobr@ipmnet.ru

The paper addresses the two-dimensional wave equation with variable velocity in a bounded domain. The velocity is assumed to degenerate on the boundary of the domain (the shore) as a square root of the distance to the boundary. We consider the Cauchy problem with localized initial data corresponding to the piston tsunami waves model. This problem is studied from the viewpoint of the asymptotic theory, where the small parameter μ is set by the ratio of the characteristic wave length to the characteristic size of the domain (the ocean). We propose an asymptotic formula for the solution working in a neighborhood of the shore of order μ . We study the symmetry between an incoming and reflected wave profiles. It turns out that profile shape does not change if the Fourier transform of the initial source function is real. This happens because the wave profile is close to an eigenfunction of the Hilbert transform. We also study the symmetry of profiles for the inhomogeneous wave equation. The right-hand side of this equation corresponds to a time spread source as opposed to instantaneous one in the piston model. This linear problem is a first step in studying more complicated system of the shallow water equations. The latter system is nonlinear, however in view of the results due to Carrier and Greenspan, its solution can be found if the solution of the linearized problem is known.

Keywords: wave equation, Run-up of waves on a beach, asymptotic solution, Maslov’s canonical operator.

Cite: Anikin, A.Yu., Dobrokhotov, S.Yu. Initial perturbation shape effect on a reflected long wave from a beach // Computational Technologies. 2019. Vol. 24, No. 1. P. 42–54. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.1.004. (In Russ.)

Acknowledgements. The work was supported by the RSF (Project No. 16-11-10282).

Received 5 December 2018