

Пакеты нелинейных внутренних волн в шельфовой зоне*

Н. И. МАКАРЕНКО^{1,2,†}, В. Ю. ЛЯПИДЕВСКИЙ^{1,2}, Д. С. ДЕНИСЕНКО^{1,2},
Д. Е. КУКУШКИН²

¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Россия

[†]Контактный e-mail: makarenko@hydro.nsc.ru

В рамках модели невязкой слабостратифицированной жидкости рассматривается длинноволновое приближение, описывающее нелинейные волновые пакеты типа кноидальных волн. Построены семейства асимптотических решений, одновременно описывающие периодические последовательности приповерхностных волн в форме впадин и придонных волн типа возвышений. Показано, что картины расчетных профилей качественно согласуются со структурами внутренних волн, наблюдавшихся авторами в натуральных экспериментах в шельфовой зоне моря.

Ключевые слова: слабая стратификация, периодические и уединенные волны, асимптотическое моделирование, натурный эксперимент.

Библиографическая ссылка: Макаренко Н.И., Ляпидевский В.Ю., Денисенко Д.С., Кукушкин Д.Е. Пакеты нелинейных внутренних волн в шельфовой зоне // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, № 2. С. 90–98. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.2.008.

Введение

Внутренние волны в океане — это возмущения изопикн, распространяющиеся на большие горизонтальные расстояния в вертикально неоднородной жидкости с термохалинной стратификацией. Они часто имеют вид приповерхностных волн понижения и придонных волн повышения изотерм, а также волн деформации высокоградиентных прослоек. Основным источником внутренних волн, регулярно выходящих на шельф, является взаимодействие приливов с топографией дна. Эти волны с амплитудами, достигающими десятков (иногда — и сотен) метров, представляют большой интерес с точки зрения гидродинамических нагрузок на плавающие тела и оффшорные сооружения, а их обрушение играет важную роль в интенсификации тепломассобмена. Наиболее изучены внутренние волны солитонного типа на шельфе [1–3], моделирование которых возможно на основе нелинейных эволюционных уравнений с дисперсией типа Кортевега — де Фриза (КдФ) и Гарднера [4–6] и систем уравнений типа Грина — Нагди [7–9].

В настоящей работе исследуются стационарные периодические структуры сильнонелинейных внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости. Вывод приближенной математической модели использует асимптотическую процедуру [10], изна-

*Title translation and abstract in English can be found on page 98.

© ИВТ СО РАН, 2019.

чально предложенную для описания уединенных волн большой амплитуды при линейной стратификации. В этом случае модельное уравнение имеет точно такую же полиномиальную нелинейность, как и для слабонелинейных волн КдФ. В работах [11, 12] обращено внимание на то, что малые возмущения вертикального профиля плотности жидкости могут существенно поменять структуру модельного уравнения и свойства его решений. На этом пути в [13] предложена приближенная модель уединенной волны с присоединенной вихревой зоной, а предельные режимы волн конечной амплитуды типа плавного бора и многоступенчатого плато изучались в работах [14–16].

1. Исходная математическая модель

Рассматриваются двумерные течения идеальной несжимаемой неоднородной жидкости в горизонтальном слое, ограниченном ровным дном $y = 0$ и жесткой крышкой $y = h$. Поскольку в системе отсчета, связанной с бегущей волной, течение является установившимся, в качестве исходной математической модели используются стационарные уравнения Эйлера для поля скоростей (u, v) , плотности ρ и давления p :

$$u_x + v_y = 0, \quad u\rho_x + v\rho_y = 0, \quad uu_x + vv_y + \rho^{-1}p_x = 0, \quad uv_x + vu_y + \rho^{-1}p_y = -g, \quad (1)$$

где g — ускорение силы тяжести. Условие непротекания на дне и крышке требует выполнения равенства $v = 0$ при $y = 0$ и $y = h$. Хорошо известно [17], что с введением функций тока ψ для поля скоростей $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$ система (1) после исключения давления p сводится к квазилинейному эллиптическому уравнению в частных производных второго порядка — уравнению Дюбрей-Жакотэн — Лонга

$$\rho(\psi)(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + \rho'(\psi) \left(gy - \frac{g\psi}{u_0} + \frac{1}{2} (\psi_x^2 + \psi_y^2 - u_0^2) \right) = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями на твердых стенках

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \psi(x, h) = hu_0. \quad (3)$$

Здесь $hu_0 = \text{const}$ — суммарный расход жидкости через вертикальное сечение слоя, так что постоянная величина u_0 является средней по глубине скоростью потока.

Зависимость коэффициента ρ от функции тока ψ в уравнении (2) считается известной, она задается формулой $\rho = \rho_0(\psi/u_0)$, где $\rho_0(y)$ — распределение плотности по линиям тока в невозмущенном равномерном течении $\psi = u_0y$. В такой формулировке задача отыскания периодических по x решений уравнений (2), (3), отличных от равномерного потока, — это нелинейная задача на собственные значения, в которой спектральным параметром служит фазовая скорость волны u_0 .

Невозмущенное стратифицированное течение характеризуется двумя безразмерными константами — параметром Буссинеска σ и параметром λ , представляющим собой квадрат обратного денсиметрического (плотностного) числа Фруда:

$$\sigma = \frac{N_0^2 h}{g}, \quad \lambda = \frac{\sigma g h}{u_0^2}.$$

Здесь N_0 — характерный масштаб для частоты плавучести $N(y)$ в основном течении, $N^2(y) = -g\rho'_0(y)/\rho_0(y)$. Параметр λ , записанный по-другому в виде отношения

$\lambda = N_0^2 h^2 / u_0^2$, часто называют глобальным числом Ричардсона (иногда — числом Лонга). Отметим, что параметр Буссинеска σ является естественным малым параметром в случае слабой стратификации. Учитывая это, будем рассматривать семейство гладких профилей плотности

$$\rho_0(y) = \rho_0(0) \left(1 - \sigma y/h - \sigma^2 \rho_*(y/h) - \sigma^3 \rho_1(y/h, \sigma) \right), \quad (4)$$

где коэффициент ρ_* при степени σ^2 характеризует тонкую структуру непрерывной стратификации, реализующуюся на фоне линейного профиля плотности. Указанная декомпозиция поля плотности мотивирована имеющимися данными о свойствах термохалинной стратификации морской воды [18], согласно которым в качестве среднего профиля плотности наблюдается сравнительно небольшое количество типов функциональных зависимостей. К ним относятся, в частности, линейная и экспоненциальная зависимости плотности от глубины, которые принадлежат классу профилей (4). В отличие от фонового профиля, часто имеющего стабильный сезонный характер, тонкая структура стратификации существенно более изменчива. Однако характерное время ее эволюции обычно заметно превосходит временные периоды внутренних волн, поэтому использование зависимости вида (4) приемлемо при изучении кинематических характеристик квазистационарного процесса.

2. Длинноволновое приближение

Следуя работе [10], будем рассматривать приближение, в котором отношение вертикального и горизонтального масштабов движения имеет порядок малости $\sqrt{\sigma}$. Переходя в уравнениях (2), (3) к безразмерным переменным $x = \sigma^{-1/2} h \bar{x}$, $y = h \bar{y}$, $\psi = h u_0 \bar{\psi}$, выделим явно только слагаемые до порядка σ включительно (знак черты опущен в обозначениях):

$$\sigma \psi_{xx} + \psi_{yy} + \lambda(\psi - y) = \sigma \left(\psi \psi_{yy} + \lambda(y - \psi) \rho'_*(\psi) + \frac{1}{2}(\psi_y^2 - 1) \right) + O(\sigma^2), \quad (5)$$

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \psi(x, 1) = 1.$$

Решение уравнения (5) ищется в следующем виде:

$$\psi(x, y) = y + \Psi_0(x, y) + \sigma \Psi_1(x, y) + O(\sigma^2), \quad \lambda = \lambda_0 + \sigma \lambda_1 + O(\sigma^2).$$

Сравнение слагаемых с одинаковыми степенями дает рекуррентную серию уравнений для искомым функций Ψ_n и коэффициентов λ_n ($n = 0, 1, \dots$) вида

$$\Psi_{nyy} + \lambda_0 \Psi_n = f_n \quad (0 < y < 1), \quad \Psi_n(x, 0) = \Psi_n(x, 1) = 0,$$

где правые части f_n при $n = 0$ и $n = 1$ имеют вид $f_0 = 0$, $f_1 = -\Psi_{0xx} + F_1(\Psi_0)$ с нелинейным дифференциальным оператором F_1 , действующим только по вертикальной переменной y :

$$F_1(\Psi_0) = (y + \Psi_0) \Psi_{0yy} - \lambda_0 \rho'_*(y + \Psi_0) \Psi_0 + \Psi_{0y} + \frac{1}{2} \Psi_{0y}^2 - \lambda_1 \Psi_0.$$

Из однородных уравнений с номером $n = 0$ следует, что нетривиальные решения возможны только при $\lambda_0 = \pi^2 m^2$ (m — натуральное число), так что для главной моды $m = 1$ решение в приближении наименьшего порядка должно иметь вид $\Psi_0(x, y) = a(x) \sin \pi y$.

Функция $a(x)$, пока не определенная, находится из условия совместности для неоднородной системы уравнений последующего приближения. Таким условием совместности является условие ортогональности правой части $f_1(x, y)$ и собственной функции первой моды $\sin \pi y$ в скалярном произведении $L_2[0, 1]$. Это дает нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение теории длинных волн

$$a'' = p(a), \quad p(a) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \pi y F_1(\Psi_0) \Big|_{\Psi_0 = a \sin \pi y} dy, \quad (6)$$

где конкретный вид нелинейности $p(a)$ определяется функцией ρ_* , задающей в профиле плотности (4) тонкую структуру стратификации. Периодические решения получаются в ситуации, когда первообразная $P(a)$ функции $p(a)$ имеет простые вещественные корни a_1, a_2 такие, что на интервале $a \in (a_1, a_2)$ выполнено строгое неравенство $P(a) > 0$. Тогда решение $a(x)$ уравнения (6), принимающее значения в промежутке $a_1 \leq a(x) \leq a_2$ и имеющее период L по переменной x , дается квадратурами

$$x = \pm \int_{a_1}^a \frac{ds}{\sqrt{2P(s)}} \quad (-L/2 \leq x \leq L/2), \quad L = \sqrt{2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{ds}{\sqrt{P(s)}}.$$

В этом семействе асимптотических решений коэффициент λ_1 остается свободным параметром, отвечающим за амплитудную дисперсию рассматриваемых нелинейных волн. В случае волн главной моды нелинейная дисперсия характеризуется согласно исходному определению величины λ следующей приближенной зависимостью фазовой скорости u_0 от параметров течения:

$$u_0^2 = \frac{\sigma g h}{\pi^2 + \sigma \lambda_1}. \quad (7)$$

Для чисто линейного профиля в (4) имеем коэффициент $\rho_*(y) = 0$, а для экспоненциальной стратификации $\rho_*(y) = -y^2/2$, так что в обоих случаях функция $p(a)$ квадратична, а $P(a)$ — кубический полином. В такой ситуации в качестве решений уравнения (6) получаются кноидальные волны, описываемые эллиптическими функциями Якоби, как это имеет место для уравнения Кортевега—де Фриза. Нелинейности более высокой степени дают периодические волновые структуры, которые могут сильно отличаться по своим геометрическим характеристикам от стандартных кноидальных волн.

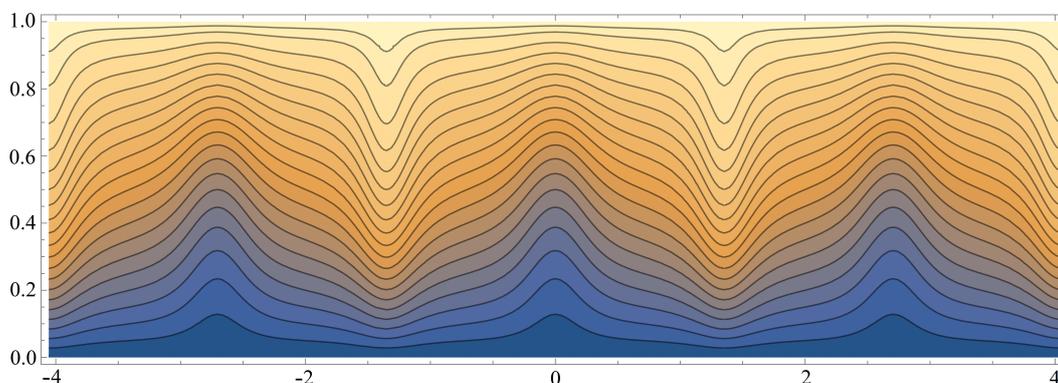


Рис. 1. Линии тока в периодической внутренней волне (асимптотическое решение)

На рис. 1 показана картина периодического течения, получающегося в случае полинома P шестой степени, имеющего четыре простых вещественных корня $a_0 = -0.5$, $a_1 = -0.2$, $a_2 = 0.25$, $a_3 = 1$ и два комплексно-сопряженных корня $a_{4,5}^2 = -0.001$. В придонных слоях жидкости такое решение описывает цуг волн возвышения, в то время как в верхних слоях наблюдается периодическая последовательность волн типа впадины со сдвигом всей приповерхностной серии понижений на полпериода по отношению к придонному цугу гребней. Эти отдельные изолированные гребни по своей форме похожи на ступенчатые уединенные волны, которые ранее моделировались аналитически в [16] в рамках изложенной выше асимптотической схемы и получались в [19] путем численного решения уравнения Дюбрей-Жакоутэн — Лонга. Близость периодических решений к последовательности уединенных волн обеспечивается наличием малых по модулю комплексных корней функции $P(a)$, а ступенчатая форма волновых профилей связана с немонотонным поведением кривых амплитудной дисперсии, задаваемых соотношением (7).

3. Натурный эксперимент

Исследование механизмов эволюции внутренних волн проводилось в ходе ежегодных экспедиций 2011–2018 гг. в шельфовой зоне Японского моря. Измерения выполнялись в летне-осенний период (август — октябрь) на Морской экспериментальной станции ТОИ ДВО РАН “Мыс Шульца” в нескольких точках залива Посъет и в бухте Витязь. Указанный выбор места и времени связан с тем, что процесс генерации волновых пакетов наблюдается здесь в течение нескольких месяцев существования развитого сезонного термоклина. Изучение динамики короткопериодных внутренних волн большой амплитуды осуществлялось в зоне “заплеска”, т. е. выше области контакта основного термоклина с дном. Методика измерений и экспериментальное оборудование подробно описаны в работах [20–22].

Для непрерывной регистрации параметров внутренних волн использовался комплекс аппаратуры, включающий датчики температуры и давления, телеметрическую систему сбора и обработки данных и соответствующее математическое обеспечение для получения оценок трансформации внутренних гравитационных волн в прибрежной зоне моря на глубинах до 40 м при удалении от берега до 500 м. Работы проводились с помощью донных станций, состоявших из одной — трех термогирлянд, содержащих по 20–30 датчиков и удаленных друг от друга на расстояние до 50 м. В качестве сенсора температуры использовался микрочип Dallas Semiconductor, обеспечивающий точность измерения 0.1°C в диапазоне от -5 до $+40^\circ\text{C}$. Для непрерывной работы донных станций были разработаны компьютерные программы для каждого модуля и программная оболочка управления модулями, программа сбора и предварительной обработки данных и их передачи через Интернет удаленному пользователю в графическом виде.

На рис. 2 и 3 представлены характерные фрагменты наблюдавшихся пакетов внутренних волн, близких к периодическим. На рис. 2 показан цуг долгопериодных внутренних волн, в котором хорошо различаются полусуточные и суточные приливные возмущения. Все изотермы здесь выглядят шероховатыми из-за имеющихся малых коротковолновых возмущений с вертикальной амплитудой порядка 1–2 м. Амплитуда несущих волн при этом достигает 20 м на полной шельфовой глубине 35 м в данной точке измерений. На рис. 3 приведен фрагмент цуга короткопериодных (с периодом ~ 6 мин) внутренних волн конечной амплитуды порядка 8–10 м с общей картиной изотерм, су-

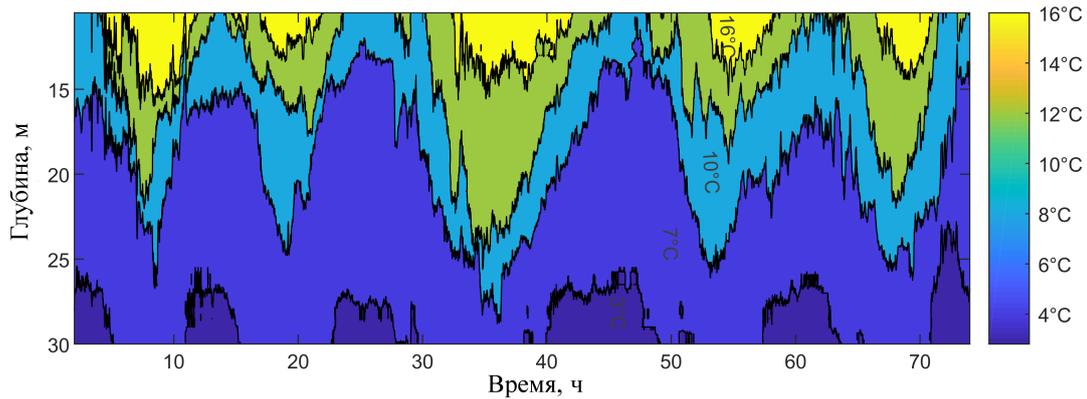


Рис. 2. Изотермы внутренней волны на шельфе с полусуточными и суточными возмущениями

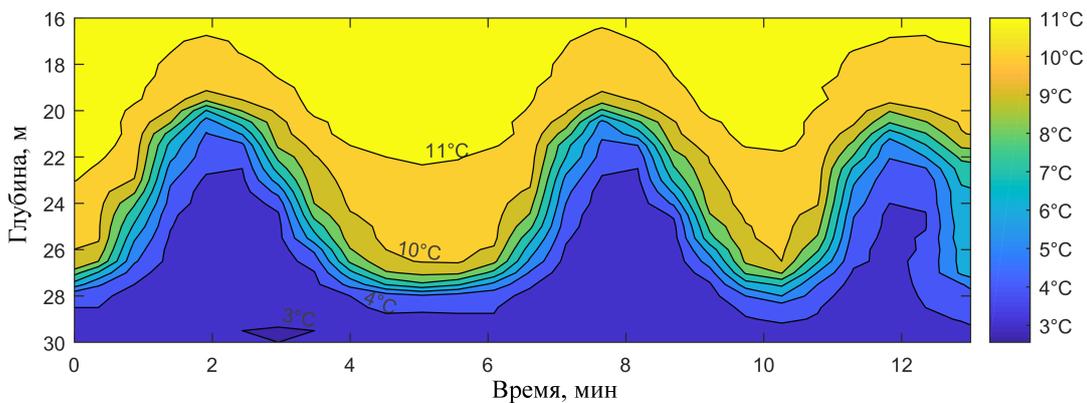


Рис. 3. Изотермы в короткопериодной внутренней волне на шельфе

щественно более гладких по сравнению с предыдущим рисунком. Придонные волны, соответствующие изотерме 4°C , здесь имеют вид последовательности почти изолированных друг от друга интрузий холодной воды с амплитудой возвышений ~ 5 м, которые распространяются по тонкому слою глубины 1 м.

В натуральных условиях стратифицированные течения подвержены диссипативным процессам, в которых существенную роль играют трение о дно и локальные сдвиговые неустойчивости потока с последующим опрокидыванием и перемешиванием. Кроме того, даже при слабой диссипации возможна модуляция волновых пакетов из-за линейной и нелинейной дисперсии волн. Все это в конечном итоге приводит к искажению периодических цугов волновых профилей с потерей их симметрии, что заметно на рис. 2 и 3. Тем не менее здесь видны общие закономерности квазистационарного процесса, которые сохраняются в широком диапазоне пространственных длин и временных периодов наблюдавшихся волн. В частности, прослеживается согласованность цугов придонных гребней и приповерхностных впадин, которые сдвинуты на половину длины волны, как это имеет место в картине линий тока для стационарного асимптотического решения на рис. 1. Кроме того, на всех рис. 1–3 заметна характерная треугольная форма волновых профилей, что косвенно свидетельствует о сильной нелинейности процесса и имеющемся отличии реальной стратификации от линейного или экспоненциального распределения плотности по глубине.

Таким образом, проведено качественное сравнение периодических структур внутренних волн, получаемых на основе асимптотических решений уравнений движения невязкой неоднородной жидкости, с фрагментами цугов внутренних волн, экспериментально наблюдаемых в шельфовой зоне. Результаты этого сравнения указывают на принципиальную возможность идентификации структурных элементов сильнонелинейных волновых цугов в рамках стационарной модели непрерывно стратифицированной жидкости.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00648) и Междисциплинарной программы СО РАН II.1 (проект № 2).

Список литературы / References

- [1] **Серебряный А.Н.** Проявление свойств солитонов во внутренних волнах на шельфе // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29, № 2. С. 244–252.
Serebryany, A.N. Manifestation of solitons features in internal waves on shelf // *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*. 1993. Vol. 29, No. 2. P. 229–238.
- [2] **Duda, T.F., Lynch, J.F., Irish, J.D. et al.** Internal tide and nonlinear wave behavior in the continental slope in the northern South China Sea // *IEEE J. of Oceanic Eng.* 2004. Vol. 29. P. 1105–1131.
- [3] **Сабинин К.Д., Серебряный А.Н.** Горячие точки в поле внутренних волн в океане // Акуст. журн. 2007. Т. 53, № 3. С. 410–436.
Sabinin, K.D., Serebryany, A.N. “Hot spots” in the field of internal waves in the ocean // *Acoust. Phys.* 2007. Vol. 53, No. 3. P. 357–380.
- [4] **Grimshaw, R., Pelinovsky, E., Polukhina, O.** Higher-order Korteweg—de Vries models for internal solitary waves in a stratified shear flow with a free surface // *Nonlin. Processes Geophys.* 2002. Vol. 9. P. 221–235.
- [5] **Helfrich, K.R., Melville, W.K.** Long nonlinear internal waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2006. Vol. 38. P. 395–425.
- [6] **Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Куркин А.А., Куркина О.Е.** Моделирование динамики интенсивных внутренних волн на шельфе // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50, № 6. С. 714–722.
Talipova, T.G., Pelinovsky, E.N., Kurkin, A.A., Kurkina, O.E. Modeling the dynamics of intense internal waves on the shelf // *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*. 2014. Vol. 50, No. 6. P. 630–637.
- [7] **Gavrilov, N.V., Liapidevskii, V.Yu., Gavrilova, K.N.** Large amplitude internal solitary waves over a shelf // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 2011. Vol. 11. P. 17–25.
- [8] **Гаврилов Н.В., Ляпидевский В.Ю., Ляпидевская З.А.** Влияние дисперсии на распространение внутренних волн в шельфовой зоне // *Фундамент. и прикл. гидрофизика*. 2013. Т. 6, № 2. С. 25–34.
Gavrilov, N.V., Liapidevskii, V.Yu., Liapidevskaya, Z.A. Influence of dispersion on the propagation of internal waves in a shelf zone // *Fundament. i Prikl. Gidrofizika*. 2013. Vol. 6, No. 2. P. 25–34. (In Russ.)
- [9] **Гаврилов Н.В., Ляпидевский В.Ю., Ляпидевская З.А.** Трансформация внутренних волн большой амплитуды над шельфом // *Фундамент. и прикл. гидрофизика*. 2015. Т. 8, № 3. С. 32–43.
Gavrilov, N.V., Liapidevskii, V.Yu., Liapidevskaya, Z.A. Transformation of large amplitude internal waves over a shelf // *Fundament. i Prikl. Gidrofizika*. 2015. Vol. 8, No. 3. P. 32–43. (In Russ.)

- [10] **Benney, D.J., Ko, D.R.S.** The propagation of long large amplitude internal waves // *Studies in Appl. Math.* 1978. Vol. 59. P. 187–199.
- [11] **Борисов А.А., Держо О.Г.** Структура стационарных уединенных волн конечной амплитуды // *Изв. СО АН СССР. Техн. науки.* 1990. № 2. С. 60–70.
Borisov, A.A., Derzho, O.G. The structure of steady state solitary waves of finite amplitude // *Izv. SO AN SSSR. Tekhn. Nauki.* 1990. No. 2. P. 60–70. (In Russ.)
- [12] **Держо О.Г.** Акустические и гравитационные волны большой амплитуды в неоднородных средах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: ИТФ СО РАН, 1993.
Derzho, O.G. Acoustic and gravitational waves of large amplitude in nonhomogeneous media: PhD thesis. Novosibirsk: ITF SO RAN, 1993. (In Russ.)
- [13] **Derzho, O.G., Grimshaw, R.** Solitary waves with a vortex core in a shallow layer of stratified fluid // *Phys. Fluids.* 1997. Vol. 9. P. 3378–3385.
- [14] **Макаренко Н.И.** Сопряженные течения и плавные боры в слабостратифицированной жидкости // *ПМТФ.* 1999. № 2. С. 69–78.
Makarenko, N.I. Conjugate flows and smooth bores in a weakly stratified fluid // *J. of Appl. Mech. and Tech. Phys.* 1999. Vol. 40, No. 2. P. 249–257.
- [15] **Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л.** Влияние тонкой структуры стратификации на параметры нелинейных внутренних волн // *Вычисл. технологии.* 2001. Т. 6. Спецвыпуск: Тр. Междунар конф. RDAMM-2001. Ч. 2. С. 421–427.
Makarenko, N.I., Maltseva, J.L. Influence of stratification weak structure on the parameters of nonlinear internal waves // *Comput. Technologies.* 2001. Vol. 6. Special issue: Proc. of the Intern. Conf. RDAMM-2001. Pt 2. P. 421–427. (In Russ.)
- [16] **Makarenko, N.I., Maltseva, J.L., Kazakov, A.Yu.** Conjugate flows and amplitude bounds for internal solitary waves // *Nonlin. Processes Geophys.* 2009. Vol. 16. P. 169–175.
- [17] **Yih, C.S.** *Stratified flows.* N. Y.: Acad. Press, 1980. 436 p.
- [18] **Федоров К.Н.** Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 184 с.
Fedorov, K.N. *The thermohaline finestructure of the ocean.* Oxford: Pergamon Press, 1978. 170 p.
- [19] **Dunphy, M., Subich, C., Stastna, M.** Spectral methods for internal waves: indistinguishable density profiles and double-humped solitary waves // *Nonlin. Processes Geophys.* 2011. Vol. 18. P. 351–358.
- [20] **Кукарин В.Ф., Ляпидевский В.Ю., Навроцкий В.В., Храпченков Ф.Ф.** Эволюция внутренних волн большой амплитуды в шельфовой зоне моря // *Фундамент. и прикл. гидрофизика.* 2013. Т. 6, № 2. С. 35–45.
Kukarin, V.F., Liapidevskii, V.Yu., Navrotsky, V.V., Khrapchenkov, F.F. Evolution of large amplitude internal waves of in a swash zone // *Fundament. i Prikl. Gidrofizika.* 2013. Vol. 6, No. 2. P. 35–45. (In Russ.)
- [21] **Khe, A.K., Chebotnikov, A.V., Liapidevskii, V.Yu., Kukarin V.F.** Bottom measurement station based on a single-board computer // *Eastern Europ. Sci. J.* 2014. No. 6. P. 303–308.
- [22] **Ляпидевский В.Ю., Новотрясов В.В., Храпченков Ф.Ф., Ярошук И.О.** Внутренний волновой бор в шельфовой зоне моря // *ПМТФ.* 2017. Т. 58, № 5. С. 1–12.
Liapidevskii, V.Yu., Novotryasov, V.V., Khrapchenkov, F.F., Yaroshchuk, I.O. Internal wave bore in the shelf zone of the sea // *J. of Appl. Mech. and Tech. Phys.* 2017. Vol. 58, No. 5. P. 809–818.

Nonlinear internal wave packets in shelf zone

MAKARENKO, NIKOLAY I.^{1,2,*}, LIAPIDEVSKII, VALERY YU.^{1,2},
DENISENKO, DANILA S.^{1,2}, KUKUSHKIN, DMITRI E.²

¹Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

²Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russia

*Corresponding author: Makarenko, Nikolay I., e-mail: makarenko@hydro.nsc.ru

The problem on nonlinear internal waves propagating permanently in shallow fluid is studied semi-analytically in comparison with the field data measured on the sea shelf. At present, the most studied in this context are nonlinear solitary-type waves generated due to the tidal activity over continental slope. This paper deals with periodic cnoidal-type wave packets considered in the framework of mathematical model of continuously stratified fluid. Basic model involves the Dubreil – Jacotin – Long equation for a stream function that results from stationary fully non-linear 2D Euler equations. The long-wave approximate equation describing periodic non-harmonic waves is derived by means of scaling procedure using small Boussinesq parameter. This parameter characterizes slight stratification of the fluid layer with the density profile being close to the linear stratification. The fine-scale density plays important role here because it determines the non-linearity rate of model equation, so it permits to consider strongly non-linear dispersive waves of large amplitude. As a result, constructed asymptotic solutions can simulate periodic wave-trains of sub-surface depression coupled with near-bottom wave-trains of isopycnal elevation. It is demonstrated that calculated wave profiles are in good qualitative agreement with internal wave structures observed by the authors in the field experiments performed annually during 2011–2018 in expeditions on the shelf of the Japanese sea.

Keywords: weak stratification, periodic and solitary waves, asymptotic modelling, field experiment.

Cite: Makarenko, N.I., Liapidevskii, V.Yu., Denisenko, D.S., Kukushkin, D.E. Nonlinear internal wave packets in shelf zone // Computational Technologies. 2019. Vol. 24, No. 2. P. 90–98. (In Russ.) DOI: 10.25743/ICT.2019.24.2.008.

Acknowledgements. This paper was supported by RFBR (grant No 18-01-00648) and Interdisciplinary program SB RAS II.1 (Project No 2).

Received December 27, 2018