

## О моделировании обтекания пологих песчаных дюн турбулентным потоком\*

И. И. ПОТАПОВ, К. С. СНИГУР\*, Г. И. ЦОЙ  
Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия

\*Контактный e-mail: snigur.ks@ccfebras.ru

Предложена математическая модель задачи о движении двумерного турбулентного потока жидкости в напорном канале с волнистым дном. Математическая модель включает уравнения Рейнольдса, уравнения переноса кинетической энергии и диссипации турбулентности, приведенные к квазигидродинамическому виду. Предложен алгоритм решения задачи с помощью метода контрольных объемов и метода конечных элементов. Численно решена задача о движении турбулентного потока над неподвижными пологими песчаными дюнами. Выполнено сравнение полученных расчетов с экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* гидродинамика, турбулентный поток, пологие дюны, квазигидродинамические уравнения, пристеночные функции, математическое моделирование.

*Библиографическая ссылка:* Потапов И.И., Снигур К.С., Цой Г.И. О моделировании обтекания пологих песчаных дюн турбулентным потоком // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, № 6. С. 99–107. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.6.012.

### Введение

Речные дюны оказывают значительное влияние на характер речного потока и, соответственно, на транспорт донных наносов и формирование дна [1]. Дюны условно делятся на крутые, у которых угол подветренного склона близок к углу внутреннего трения ( $\sim 30$  град.), и пологие, у которых угол подветренного склона меньше угла внутреннего трения ( $< 30$  град.) [2].

Пологие дюны с углом подветренного склона, не превышающим  $10$  град., являются самой распространенной донной формой в больших реках с песчаным дном [3]. Исследователи расходятся в вопросе о структуре потока за такими пологими дюнами. Натурные исследования [4] показывают, что за пологими дюнами отсутствует постоянная зона отрыва потока, вместо нее присутствует зона замедления потока с непостоянным образованием отрыва потока. В то же время исследованиями [2, 5] не обнаружено никакого (даже непостоянного) отрыва потока за пологими дюнами. Следовательно, нет однозначного ответа на вопрос о вкладе пологих дюн в сопротивление потока. Ряд исследователей [6, 7] полагают, что дюны с пологим подветренным склоном и длиной,

---

\*Title translation and abstract in English can be found on page 107.

© ИВТ СО РАН, 2019.

превышающей глубину потока, не вносят вклад в сопротивление потока. Однако в экспериментальном исследовании [8] показано, что вклад пологих дюн в общее сопротивление невелик, но он является существенным и пренебрежение им приведет к занижению расчетного сопротивления потока по сравнению с реальным.

Настоящая работа нацелена на развитие математической модели, описывающей движение турбулентного гидродинамического потока при его прохождении над пологими песчаными дюнами.

## 1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим движение турбулентного гидродинамического потока в напорном канале длиной  $L$  и максимальной глубиной  $H$ , поток движется слева направо вдоль оси  $x$ . Дно канала  $\Gamma_{bed}$  имеет геометрически сложную форму. На рис. 1 показана расчетная область  $\Omega$ , где  $\Gamma_{in}$ ,  $\Gamma_{out}$ ,  $\Gamma_{top}$  и  $\Gamma_{bed}$  — входная, выходная, верхняя и нижняя границы расчетной области соответственно.

Для описания движения осредненного гидродинамического потока воспользуемся уравнениями Рейнольдса, приведенными к квазигидродинамическому виду [9]

$$\frac{\partial p}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\sigma} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{2}{3} \rho k \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \eta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left( 2uw_x + \frac{2}{3} w_k \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial y} [vw_x + uw_y], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( p + \frac{2}{3} \rho k \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \eta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \sigma \frac{\partial}{\partial x} [vw_x + uw_y] + \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left( 2vw_y + \frac{2}{3} w_k \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $x$  и  $y$  — пространственная горизонтальная и вертикальная координаты соответственно;  $u$  и  $v$  — горизонтальная и вертикальная скорости потока соответственно,  $\rho$  — плотность воды;  $p$  — давление воды;  $\eta$  — приведенная кинетическая вязкость, состоящая из суммы турбулентной вязкости  $\eta_t$  и молекулярной вязкости  $\eta_m = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $k$  — кинетическая энергия турбулентности;  $\sigma$  — параметр регуляризации.

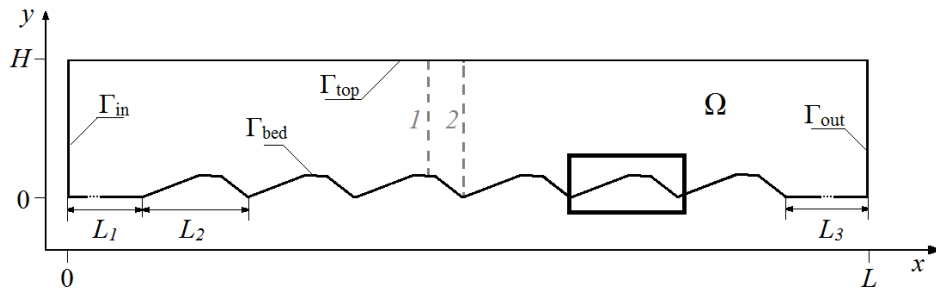


Рис. 1. Расчетная область

Для замыкания уравнений (1)–(3) и определения турбулентной вязкости воспользуемся стандартной моделью турбулентности  $k - \varepsilon$  [10], уравнения которой приведем к квазигидродинамическому виду с помощью метода [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial ku}{\partial x} + \frac{\partial kv}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\eta_t}{\sigma_k} + \eta_m \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\eta_t}{\sigma_k} + \eta_m \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k - \varepsilon + \\ + \sigma \frac{\partial}{\partial x} [kw_x + uw_k] + \sigma \frac{\partial}{\partial y} [kw_y + vw_k], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon u}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\eta_t}{\sigma_\varepsilon} + \eta_m \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\eta_t}{\sigma_\varepsilon} + \eta_m \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) + \\ + \sigma \frac{\partial}{\partial x} [\varepsilon w_x + uw_\varepsilon] + \sigma \frac{\partial}{\partial y} [\varepsilon w_y + vw_\varepsilon], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\eta_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad P_k = \sqrt{2} \eta_t \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (6)$$

$$w_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x}, \quad w_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial y}, \quad (7)$$

$$w_k = u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} - (P_k - \varepsilon), \quad w_\varepsilon = u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon), \quad (8)$$

где  $\varepsilon$  — диссипация турбулентности;  $\sigma_k = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ ,  $C_\mu = 0.09$ ;  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$  — константы [11].

Математическая постановка замыкается начальными условиями

$$u = u_0, \quad v = 0, \quad k = k_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad (x, y) \in \Omega$$

и граничными условиями

$$u = u_{in}, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = q_p, \quad k = k_{in}(u), \quad \varepsilon = \varepsilon_{in}(k), \quad (x, y) \in \Gamma_{in},$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad k = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{bed},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{top},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad p = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{out},$$

где  $u_0, v_0, k_0, \varepsilon_0$  — поля начальных значений для искомым функций в расчетной области;

$u_{in} = \frac{N+2}{N+1} u_{cp} \left[ 1 - \left( \frac{y-0.5H}{0.5H} \right)^{N+1} \right]$  — профиль горизонтальной скорости на входе в

область [12]; коэффициент  $N = \frac{H^2 q_p}{\rho \eta u_{cp}} - 2 \geq 1$  определяет вид профиля  $u_{in}$ ;  $u_{cp}$  — средняя

горизонтальная скорость потока;  $q_p = -\frac{2+N}{H^2} \rho \eta u_{cp}$  — значение градиента давления на входе в область;  $k_{in} = 0.005 u_{in}^2$  и  $\varepsilon_{in} = 0.1 k_{in}^2$  — профили кинетической энергии и диссипации турбулентности на входе в область [13].

## 2. Алгоритм решения задачи

Для численного решения уравнений (1)–(8) расчетная область дискретизируется с помощью регулярной сетки треугольных элементов. На основе сетки треугольных элементов формируется сетка контрольных объемов. Каждый контрольный объем построен вокруг одного узла сетки путем соединения центров масс смежных треугольных элементов.

Для получения дискретных аналогов уравнений (2)–(5) воспользуемся методом контрольных объемов, тогда дискретные аналоги примут следующий вид:

$$u_K^{n+1} = u_K^n + \frac{\Delta t}{S_K} \sum_{i=1/2}^{m-1/2} \left[ -u^2 n_x - uv n_y - \frac{1}{\rho} p n_x - \frac{2}{3} k n_x + \eta \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) n_x + \right. \\ \left. + \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y + \sigma \left( 2uw_x + \frac{2}{3} w_k \right) n_x + \sigma (vw_x + uw_y) n_y \right]_i^n L_{Ki+1/2},$$

$$v_K^{n+1} = v_K^n + \frac{\Delta t}{S_K} \sum_{i=1/2}^{m-1/2} \left[ -uv n_x - v^2 n_y - \frac{1}{\rho} p n_y - \frac{2}{3} k n_y + \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \right. \\ \left. + \eta \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) n_y + \sigma (vw_x + uw_y) n_x + \sigma \left( 2uw_y + \frac{2}{3} w_k \right) n_y \right]_i^n L_{Ki+1/2},$$

$$k_K^{n+1} = k_K^n + \Delta t (P_{kK}^n - \varepsilon_K^n) + \frac{\Delta t}{S_K} \sum_{i=1/2}^{m-1/2} \left[ -kun_x - kvn_y + \right. \\ \left. + \left( \frac{\eta_t}{\sigma_k} + \eta_m \right) \left( \frac{\partial k}{\partial x} n_x + \frac{\partial k}{\partial y} n_y \right) + \sigma (kw_x + uw_k) n_x + \sigma (kw_y + vw_k) n_y \right]_i^n L_{Ki+1/2},$$

$$\varepsilon_K^{n+1} = \varepsilon_K^n + \Delta t \frac{\varepsilon_K^n}{k_K^n} (C_{\varepsilon 1} P_{kK}^n - C_{\varepsilon 2} \varepsilon_K^n) + \frac{\Delta t}{S_K} \sum_{i=1/2}^{m-1/2} \left[ -\varepsilon u n_x - \varepsilon v n_y + \right. \\ \left. + \left( \frac{\eta_t}{\sigma_k} + \eta_m \right) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} n_y \right) + \sigma (\varepsilon w_x + uw_\varepsilon) n_x + \sigma (\varepsilon w_y + vw_\varepsilon) n_y \right]_i^n L_{Ki+1/2}.$$

Здесь  $n$  — временной слой разностной схемы;  $K$  — центральный узел контрольного объема;  $S_K$  — суммарная площадь контрольного объема;  $m$  — количество граней контрольного объема;  $n_x, n_y$  — компоненты вектора нормали к соответствующей грани контрольного объема;  $L_{Ki+1/2}$  — длина соответствующей грани контрольного объема.

Для получения дискретного аналога уравнения (1) воспользуемся методом конечных элементов в слабой формулировке Галёркина [14], тогда дискретный аналог примет вид

$$\bigcup_B (K_{\alpha\beta} p_\beta = F_{v\alpha} + F_{r\alpha} + F_{p\alpha}).$$

Здесь

$$K_{\alpha\beta} = \int_{V_j} \left( \frac{\partial L_\alpha}{\partial x} \frac{\partial L_\beta}{\partial x} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \frac{\partial L_\beta}{\partial y} \right) dV_j, \quad F_{v\alpha} = \int_{V_j} L_\alpha \left[ -\frac{\rho}{\sigma} \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} + \frac{\partial v^h}{\partial y} \right) \right] dV_j,$$

$$F_{r\alpha} = \int_{V_j} \rho L_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u^h \frac{\partial u^h}{\partial x} + v^h \frac{\partial u^h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u^h \frac{\partial v^h}{\partial x} + v^h \frac{\partial v^h}{\partial y} \right) \right] dV_j +$$

$$+ \int_{\Gamma_{top}} L_\alpha \left[ \rho n_y \left( u^h \frac{\partial v^h}{\partial x} \right) \right] d\Gamma_{top},$$

$$F_{p\alpha} = \int_{\Gamma_{in}} L_\alpha n_x q_p d\Gamma_{in},$$

где  $L_\alpha \in H_h$  — весовая функция;  $V_j$  — объем  $j$ -го конечного элемента;  $B$  — суммарное количество конечных элементов в расчетной области;  $n_x, n_y$  — координаты вектора нормали к соответствующей границе расчетной области;  $u^h = u_\alpha L_\alpha$ ;  $v^h = v_\alpha L_\alpha$ ;  $p^h = p_\alpha L_\alpha$ .

Вследствие ограничений стандартной модели  $k - \varepsilon$  [10, 11] в настоящей работе для описания течения в вязком и логарифмическом подслоях вблизи нижней стенки используется метод пристеночных функций [11, 15, 16].

### 3. Численное моделирование

С помощью предложенной математической постановки выполнено численное решение задачи о течении жидкости над шестью неподвижными пологими песчаными дюнами. Форма дюн, характеристики канала и потока взяты из экспериментальной работы [8], расчетная область задачи схематично показана на рис. 1, поток воды движется слева направо. Геометрические характеристики пологой дюны показаны на рис. 2, буквой “ $c$ ” обозначен гребень (crest) дюны, буквой “ $b$ ” — край гребня дюны (brink). Решение выполнено при следующих параметрах:  $Re = 124\,000$ ,  $Fr = 0.443$ ,  $U_{max} = 0.62$  м/с,  $H = 0.2$  м,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $d = 0.00016$  м,  $L = 58.9$  м,  $L_1 = 40$  м,  $L_2 = 0.9$  м,  $L_3 = 13.5$  м,  $\sigma = 0.0001$  с,  $\alpha_r = \alpha_v = 1$ , шаг по времени  $dt = 0.0001$  с, шаг сетки  $dx = dy = 0.01$  м, время расчета 360 с.

На рис. 3 представлены графики горизонтальной и вертикальной скоростей потока в вертикальных сечениях, показанных на рис. 1 серыми штриховыми линиями (1 —  $x = 42.47$  м, 2 —  $x = 42.7$  м).

В ходе моделирования получены численные решения с применением пристеночных функций следующих авторов: Волкова [11], Снегирева [15], Луцкого [16] — и пристеночная функция, комбинирующая алгоритм Луцкого [16] и описание логарифмического профиля скорости над шероховатой стенкой Гришанина [17]. В настоящей работе

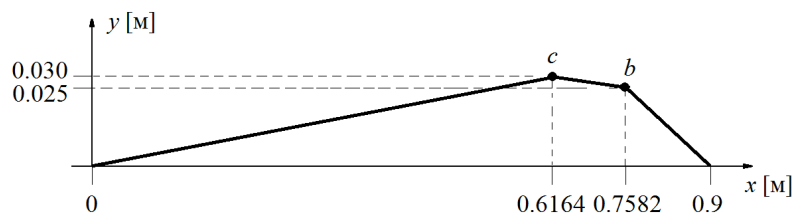


Рис. 2. Схема пологой дюны (фрагмент, выделенный прямоугольником на рис. 1)

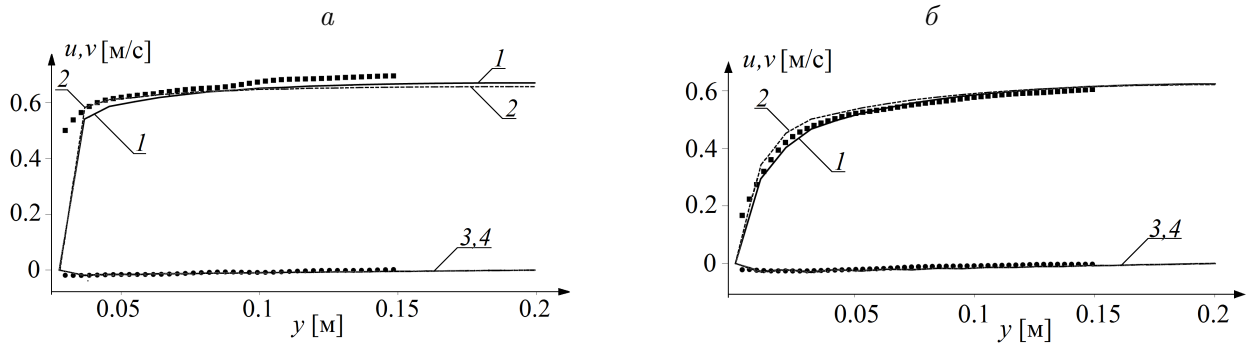


Рис. 3. Графики горизонтальной и вертикальной скоростей в сечениях 1 (а) и 2 (б)

рассмотрены только расчеты с использованием пристеночной функции Волкова и комбинированной пристеночной функции Луцкого и Гришанина, так как они показали наилучшее соответствие с экспериментом [8].

На рис. 3 показаны расчетные данные, полученные с применением пристеночной функции по Волкову (линии 1 и 3), расчетные данные по Гришанину и Луцкому (линии 2 и 4), данные из эксперимента (точечные множества). Из графиков видно, что расчетные поля скоростей хорошо согласуются с экспериментом, наибольшая погрешность расчетных данных наблюдается в пристеночной области в сечении 1, что связано с недостаточно мелким размером сетки у дна. Отметим, что расчетные профили горизонтальной скорости, полученные по разным пристеночным функциям, незначительно различаются, профили по Гришанину имеют более выраженный изгиб в пристеночной области по сравнению с профилями по Волкову. Средняя относительная погрешность расчетной горизонтальной и вертикальной скоростей, полученных с применением пристеночной функции по Волкову в срезе 1, составляет 5.55 и 17.61% соответственно, в срезе 2 — 2.05 и 21.27%.

На рис. 4 показаны графики придонного касательного напряжения  $\tau$  над донной донной поверхностью  $\Gamma_{bed}$ . Кривой 1 обозначено напряжение, полученное в придонной расчетной ячейке, кривой 2 — напряжение, полученное в 2 см от дна (вторая расчетная ячейка от дна), кривой 3 — форма нижней границы области, точечным множеством обозначены экспериментальные значения в области придонной расчетной ячейки. На рис. 4, а показаны расчетные профили, полученные с применением пристеночной функции по Волкову, на рис. 4, б — по Гришанину и Луцкому. Из сравнения графиков видно, что значения напряжения, полученные в придонной расчетной ячейке, качественно

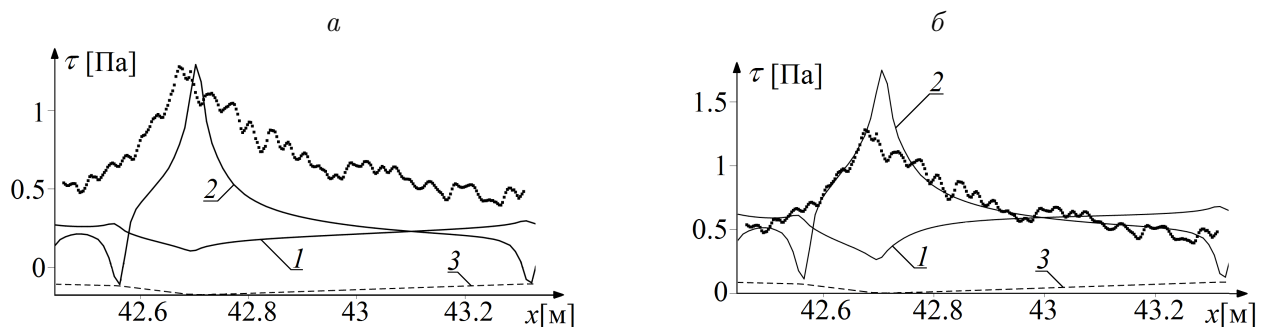


Рис. 4. Графики касательного напряжения  $\tau$  над донной донной поверхностью  $\Gamma_{bed}$

не согласуются с экспериментальными значениями для обеих моделей. Максимум напряжений в эксперименте наблюдается в области минимального уровня дна (между дюнами), в расчетах авторов максимум напряжений по кривой 1 находится в области максимума донной поверхности (первый и второй пики дюны). При этом расчетные напряжения, полученные в следующей расчетной ячейке (кривая 2), качественно и количественно согласуются с экспериментальными значениями. Профиль напряжений, полученный в 2 см от дна с использованием пристеночной функции Волкова, согласуется с экспериментальными данными со средней относительной погрешностью 6.84%. Следует отметить, что напряжение по Гришанину по абсолютным значениям меньше, чем по Волкову, несмотря на то что пристеночная функция по Гришанину описывает течение по шероховатой песчаной поверхности, а по Волкову — по гладкой.

## Заключение

Предложена математическая модель задачи о движении двумерного турбулентного потока над неподвижными пологими песчаными дюнами. Математическая модель включает уравнения Рейнольдса и уравнения стандартной модели турбулентности  $k - \varepsilon$ , приведенные к квазигидродинамическому виду.

Разработан алгоритм решения задачи, включающий метод контрольных объемов для определения поля скоростей, кинетической энергии и диссипации турбулентности и метод конечных элементов для определения поля давления.

Выполнен анализ применимости различных пристеночных функций для моделирования движения турбулентного потока над неподвижными пологими песчаными дюнами. Показано, что пристеночная функция Волкова позволяет получить наилучшее согласование численного решения с экспериментальными данными.

В разработанном программном комплексе операции по расчету  $u$ ,  $v$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\eta$  выполнены в параллельном режиме с использованием оборудования ЦКП “Центр данных ДВО РАН” [18].

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 18-35-00139, 18-05-00530).

## Список литературы / References

- [1] Coleman, S.E., Nikora, V.I. Fluvial dunes: Initiation, characterization, flow structure // Earth Surf. Processes and Landforms. 2011. Vol. 36, No. 1. P. 39–57.
- [2] Bradley, R.W., Venditti, J.G., Kostaschuk, R.A. et al. Flow and sediment suspension events over low-angle dunes: Fraser Estuary, Canada // J. Geophys. Res. Earth Surf. 2013. Vol. 108. P. 1693–1709. DOI: 10.1002/jgrf.20118.
- [3] Cisneros, J., Best, J. Low angle dunes in big rivers morphology occurrence and speculations on their origin // Marine and River Dune Dynamics Conf. Papers (MARIDV), 2016. North Wales, UK. P. 37–40.
- [4] Best, J.L., Kostaschuk, R.A. An experimental study of turbulent flow over a low-angle dune // J. Geophys. Res. 2002. Vol. 107(C9). 3135. DOI: 10.1029/2000JC000294.

- [5] **Shugar, D.H., Kostaschuk, R.A., Best, J.L. et al.** On the relationship between flow and suspended sediment transport over the crest of a sand dune, Río Paraná, Argentina // *Sedimentology*. 2010. Vol. 57, No. 1. P. 252–272. DOI: 10.1111/j.1365-3091.2009.01110.x.
- [6] **Paarlberg, A.J., Dohmen-Janssen, C.M., Hulscher, S.J.M.H. et al.** Modelling the effect of time-dependent river dune evolution on bed roughness and stage // *Earth Surf. Processes and Landforms*. 2010. Vol. 35, No. 15. P. 1854–1866. DOI: 10.1002/esp.2074.
- [7] **Huthoff, F.** Theory for flow resistance caused by submerged roughness elements // *J. Hydraul. Res.* 2012. Vol. 50, No. 1. P. 10–17. DOI: 0.1080/00221686.2011.636635.
- [8] **Kwoll, E., Venditti, J.G., Bradley, R.W., Winter, C.** Flow structure and resistance over subaqueous high- and low-angle dunes // *J. of Geophys. Res. Earth Surface*. 2016. Vol. 121. P. 545–564.
- [9] **Елизарова Т.Г., Никольский П.Н.** Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в течении за обратным уступом // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3.* 2007. № 4. С. 14–17.  
**Elizarova, T.G., Nikol'skii, P.N.** Numerical simulation of the laminar-turbulent transition in the flow over a backward-facing step // *Moscow State Univ. Bulletin. Ser. 3: Physics, Astronomy*. 2007. Vol. 62, No. 4. P. 216–220.
- [10] **Wilcox, D.C.** *Turbulence modeling for CFD*. Second edition. Anaheim: DCW Industries, 1998. 174 p.
- [11] **Волков К.Н.** Пристеночное моделирование в расчетах турбулентных течений на неструктурированных сетках // *Теплофизика и аэромеханика*. 2007. Т. 14, № 1. С. 113–129.  
**Volkov, K.N.** Near-wall modeling in computations of turbulent flows on unstructured grids // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2007. Vol. 14, No. 1. P. 107–123.
- [12] **Stigler, J.** Introduction of the analytical turbulent velocity profile between two parallel plates // 18th Intern. Conf. Engineering Mechanics, 2012. Czech Republic. Paper No. 148. P. 1343–1352.
- [13] **Jamil, M.M., Adamu, M.I., Ibrahim, T.R., Hashim, G.A.** Numerical study of separation length of flow through rectangular channel with baffle plates // *J. of Advanced Res. Design*. 2015. Vol. 7, No. 1. P. 19–33.
- [14] **Конор Дж., Бреббия К.** *Метод конечных элементов в механике жидкости*. Л.: Судостроение, 1979. 264 с.  
**Connor, J.J., Brebbia, C.A.** *Finite element techniques for fluid flow*. London: NewnesButterworth, 1976. 317 p.
- [15] **Снегирев А.Ю.** *Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: Учеб. пособие*. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 143 с.  
**Snegirev, A.Yu.** *High performance computing in technical physics. Numerical simulation of turbulent flows: Ucheb. posobie*. SPb.: Izd-vo Politekhn. Un-ta, 2009. 143 p. (In Russ.)
- [16] **Луцкий А.Е., Северин А.В.** *Простейшая реализация метода пристеночных функций*. М., 2013. 22 с. (Препр. / ИПМ им. М.В. Келдыша. № 38.)  
**Lutsky, A.E., Severin, A.V.** *The minimal realization of the wall functions method*. Moscow, 2013. 22 p. (Preprint / Keldysh Institute of Appl. Math. No. 38.) (In Russ.)
- [17] **Гришанин К.В.** *Динамика русловых потоков*. Л.: Гидрометеиздат, 1979. 311 с.  
**Grishanin, K.V.** *Dynamics of channel flows*. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1979. 311 p. (In Russ.)



- [18] Сорокин А.А., Макогонов С.В., Королев С.П. Информационная инфраструктура для коллективной работы ученых Дальнего Востока России // Науч-техн. информация. Сер. 1: Организация и методика информационной работы. 2017. № 12. С. 14–16.  
Sorokin, A.A., Makogonov, S.V., Korolev, S.P. The information infrastructure for collective scientific work in the Far East of Russia // Sci. and Technical Inform. Proc. 2017. Vol. 44, No. 4. P. 302–304.

Поступила в редакцию 30 сентября 2019 г.

### On the modelling of turbulent flow over low-angle sand dunes

POTAPOV, IGOR I., SNIGUR, KSENIYA S., TSOY, GEORGIY I.

Computer Center of FEB RAS, Khabarovsk, 680000, Russia

\*Corresponding author: Snigur, Kseniya S., e-mail: [snigur.ks@ccfebras.ru](mailto:snigur.ks@ccfebras.ru)

**Purpose.** The aim of the paper is the development of mathematical models describing a turbulent river flow along gently sloping dunes and allowing estimation of the contribution of gently sloping dunes on the flow hydraulic resistance.

**Methodology.** A quasi-hydrodynamic form of the classical RANS equations are used for describing the hydrodynamic flow. The standard  $k-\varepsilon$  model is used for the turbulence viscosity while the equations have been transformed to the quasi-hydrodynamic form. A wall functions method is used for describing the flow near solid channel wall.

**Results.** A new mathematical model for the problem of turbulent flow in a pressure channel with low-angle dunes is proposed. An algorithm for solving the problem is proposed. It is based on the control volume method and the finite element method. The problem of the turbulent flow over 6 fixed low-angle sand dunes is solved numerically. Numerical solutions are obtained with four different wall functions. A comparative analysis of the obtained solutions with the experimental data is carried out.

**Findings.** It is shown that the proposed mathematical model describes the turbulent flow over low-angle dunes qualitatively and quantitatively. The solution obtained with the Volkov wall function provides the best agreement with the experiment. It is found out that the bed shear stress obtained in the near-wall computational cell by the wall functions method does not qualitatively agree with the experimental data for all considered wall functions. At the same time, the shear stress obtained in the next calculation cell agrees with the experimental data qualitatively and quantitatively. The average relative error of the shear stress obtained with the Volkov wall function is 6.84 %.

**Keywords:** hydrodynamics, turbulent flow, low-angle dunes, quasi-hydrodynamic equations, wall functions, mathematical modeling.

**Cite:** Potapov, I.I., Snigur, K.S., Tsoy, G.I. On the modelling of turbulent flow over low-angle sand dunes // Computational Technologies. 2019. Vol. 24, No. 6. P. 99–107. (In Russ.) DOI: 10.25743/ICT.2019.24.6.012.

**Acknowledgements.** The research was funded by RFBR projects No. 18-35-00139 and No. 18-05-00530.

Received September 30, 2019