

Параметрическая идентификация модели динамики системы удобрение — почва — растение

В. А. ЧЕТЫРБОЦКИЙ¹, А. Н. ЧЕТЫРБОЦКИЙ²

¹АО «Апатит», Центр инноваций, Москва, Россия

²Дальневосточный геологический институт ДВО РАН, Владивосток, Россия

Контактный автор: Четырбоцкий Валентин А., e-mail: ve14232@gmail.com

Поступила 11 июня 2019 г., доработана 9 ноября 2019 г., принята в печать 31 января 2020 г.

Выполнена математическая формализация уравнений модели, для построения которой использовалась концепция системы ресурс — потребитель. В рассматриваемом случае потребителем выступает биомасса растений, а ресурсом — распределенные в узкой прикорневой зоне растений основные элементы его минерального питания (азот, фосфор и калий). Динамические уравнения модели следуют основному положению химической кинетики, согласно которому результат взаимодействия динамических переменных в системах рассматриваемого профиля определяется их произведением. Выполнена оценка параметров и установлена адекватность модели выборочным распределениям. В качестве выборочных распределений используется массив экспериментальных данных роста яровой пшеницы (Красноуфимская-100) на торфяной низинной почве, предварительная почвенная обработка которой проведена с помощью азотных, фосфорных и калийных удобрений.

Ключевые слова: ризосфера, элементы минерального питания растения, логистическое уравнение, поиск экстремума функционала.

Цитирование: Четырбоцкий В.А., Четырбоцкий А.Н. Параметрическая идентификация модели динамики системы удобрение — почва — растение. Вычислительные технологии. 2020; 25(2):92–102.

Введение

Почва является открытой динамической полидисперсной гетерогенной многокомпонентной системой, состав которой характеризуют три абиотические и одна биотическая фазы [1]. К этим фазам относятся: твердая фаза (минеральные, органические и органо-минеральные частицы), жидкая фаза (почвенный раствор), газообразная фаза (почвенный воздух) и находящаяся в непрерывном взаимодействии с окружающей средой биотическая фаза (почвенные организмы). Многокомпонентный структурный состав почвы обуславливает изучение динамики ее отдельных фаз в совокупности с другими. Так, динамика биотической фазы детально рассмотрена в [2], где приводятся выраженные в количественных формах различные аспекты жизненного цикла растений: их рост, дыхание, фотосинтез и распределение его продуктов. В [3] представлены математические модели только биологических продукционных процессов в ассоциациях организмов, исследуется динамика популяций микроорганизмов. В [4] приводится модель динамики пастбищной травы, где не учитывается органическое питание растений

(в том числе и почвенной влаги), а определяющим фактором роста выступает фотосинтез. Модель логистического роста растения с линейной зависимостью ее коэффициентов от температуры приведена в [3, 5–8].

За рамками представлений этих моделей оказываются проблемы согласования совместной динамики биомассы растений и распределенных в ризосфере (прилегающая к корням растений узкая зона почвы) элементов их минерального питания. Открытыми остаются вопросы выбора и проведения процедуры параметрической идентификации моделей, суть которой состоит в оценке параметров моделей и адекватности модельных и репрезентативных выборочных распределений. Значимость решения перечисленных проблем определяет актуальность построения модели системы, компонентами которой выступают растение и элементы его минерального питания. Термин “динамика минерального питания” означает процесс поглощения, перемещения и усвоения растением химических элементов, получаемых им из почвы в форме ионов минеральных солей [9]. К элементам его питания относят минералы ризосферы, удобрения и составляющие ризосферы органического происхождения (навоз, торф, компост, солома и др.).

Целями настоящей работы являются разработка математической модели совместной динамики роста биомассы растения и элементов его минерального питания, оценка параметров модели и оценка соответствия экспериментальных выборочных распределений и распределений динамических переменных модели (модельных распределений).

Выполнено построение математической модели рассматриваемой системы, приведено решение задачи ее параметрической идентификации (она состоит в поиске экстремума меры отклонения выборочных и модельных распределений [10]) и представлен алгоритм ее решения. Для оценки адекватности модели используются экспериментальные распределения, которые характеризуют влияние азотных, фосфорных и калийных удобрений на рост яровой пшеницы сорта Красноуфимская-100 на торфяной низинной почве.

1. Цифровой материал

Цифровым материалом для исследований выступают результаты выполненных М.А. Ефремовой и Н.А. Сладковой экспериментов по оценке влияния азотных, фосфорных и калийных удобрений на рост яровой пшеницы (Красноуфимская-100) на торфяной низинной почве [11, 12]. Схема опытов и условия закладки экспериментов состоят в следующем. Перед посевом специально отобранную торфяную низинную почву обработали азотными (сульфат аммония), фосфорными (простой суперфосфат) и калийными (сульфат калия) удобрениями. Набор (10, 14, 19, 24, 28, 34, 39, 46, 55) определяет в сутках сроки изъятия растительных проб с момента появления первых всходов, которые соответствуют наиболее критическим фазам роста растений. В экспериментах учитывались биомасса надпочвенной части растения и количественное содержание в ней элементов минерального питания.

На рис. 1 представлены экспериментальные распределения динамических переменных модели. На рис. 1, а приведено распределение биомассы растений в момент отбора проб, а в остальных случаях — пересчитанные на окислы (кроме азота) содержания элементов в растениях. Ось абсцисс характеризует содержание K_2O в почве при выполнении экспериментов по влиянию удобрений на рост биомассы. Независимо от внесения калийных удобрений почва также характеризуется наличием азота и фосфора. Всего для выполнения экспериментов было подготовлено 10 вариантов торфяной низинной

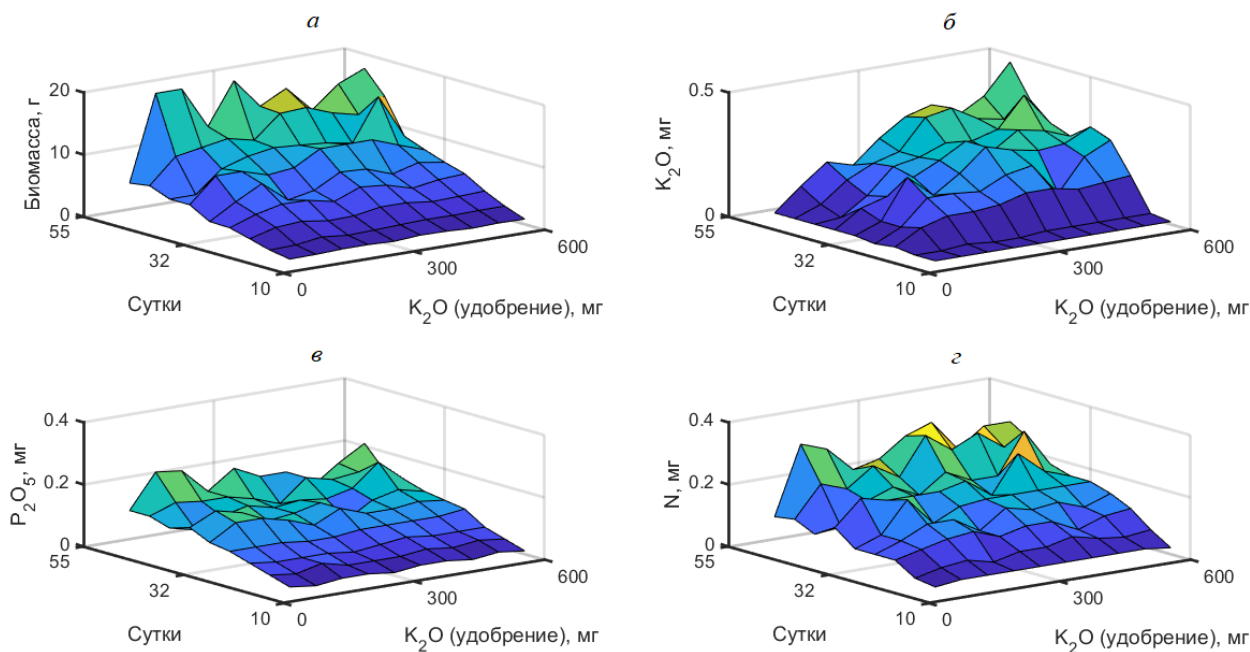


Рис. 1. Экспериментальные распределения динамических переменных модели: *a* — биомасса; *б* — K_2O ; *в* — P_2O_5 ; *г* — N

Fig. 1. Experimental distributions of dynamic variables of the model: *a* — biomass; *б* — K_2O ; *в* — P_2O_5 ; *г* — N

почвы с различным содержанием K_2O . Для придания экспериментам обобщающего характера в дальнейшем полагается, что число временных наблюдений равно T , а число типов почв — K .

Характер распределений экспериментальных поверхностей на рис. 1 указывает на их плавные и согласованные между собой изменения, причем отмеченная тенденция является общей для всех представленных здесь случаев. Достаточно отметить, что если мерой согласованности распределений выступает коэффициент корреляции между ними, то он превышает значение 0.918 (корреляция между наблюдениями на 39-е и 55-е сутки). Для оценки корреляций сформирована матрица, столбцами которой выступают биомассы и концентрации минеральных элементов за определенные сутки отбора проб.

Форма поверхностей существенно отличается от формы поверхностей, которые обычно определяются принятой в физиологии растений моделью Ферхюльста или так называемыми логистическими уравнениями [3, 7]. Можно заметить, что здесь имеет место более длительный индукционный период (от момента начала роста до момента его быстрого роста или точки перегиба) по сравнению с логистической кривой.

2. Математическая модель

Комплексная модель динамики системы удобрение — почва — растение сформулирована в [13], где вместе с ее составляющими учитывались динамика ризосферного (прилегающего к корням растений узкого слоя почвы) сообщества микроорганизмов, а также температура и влажность среды. Сегодня такие измерения, как правило, не производятся, поэтому в настоящей работе использован ее редуцированный вариант, где дина-

мическими переменными выступают биомасса растения и содержание трех основных элементов его минерального питания (азота, фосфора и калия).

При построении модели приняты следующие допущения.

1. Удельная скорость изменения биомассы растения $\dot{B}B^{-1}$ (скорость изменения для единицы биомассы) определяется ее естественной скоростью роста p_0 , взвешенной суммой содержаний в растении элементов минерального питания $p_1C_1 + p_2C_2 + p_3C_3$ и внутривидовой конкуренцией — p_4B растения. Наборы $\{C_i, i = 1, 2, 3\}$ и $\{p_i, i = 0, \dots, 4\}$ определяют содержание элементов минерального питания в растении и коэффициенты пропорциональности.

2. Скорость изменения содержания элементов минерального питания i -го вида, которая приходится на единицу биомассы \dot{C}_iB^{-1} , пропорциональна их текущим содержаниям в ризосфере $q_{i,0}(C_{0,i} - C_i)$, где $C_{0,i}(k)$, и $q_{i,0}$ — соответственно начальное содержание i -го элемента в ризосфере с k -м содержанием удобрения K_2O и коэффициент пропорциональности.

3. Между содержанием элементов минерального питания в растениях имеется определенная взаимосвязь, которая обусловлена их химической природой. Так, недостаток фосфора замедляет синтез белков в тканях, при этом повышается содержание нитратов. Чаще это проявляется при несбалансированном питании растений, т. е. в завышенных дозах азота [6]. Поэтому на содержание в растениях одних элементов существенно влияет содержание других элементов. Здесь полагается, что это влияние определяется взвешенной суммой, т. е. \dot{C}_iB^{-1} пропорциональна $\sum_{j \neq i}^3 q_{i,j}C_j$. Тогда в соответствии с п. 2 можно записать

$$\dot{C}_iB^{-1} = q_{i,0}C_{0,i} + \sum_{j \neq i}^3 q_{i,j}C_j,$$

где $\{q_{i,j}, i, j = 1, 2, 3\}$ и $\{q_{i,j} < 0, i = 1, 2, 3\}$ — коэффициенты пропорциональности.

Следуя этим допущениям, модель динамики системы удобрение — почва — растение принимает вид

$$\begin{cases} \dot{B} = (p_0 + p_1C_1 + p_2C_2 + p_3C_3 - p_4B)B, \\ \dot{C}_i = \left(q_{i,0}C_{0,i} + \sum_{j \neq i}^3 q_{i,j}C_j \right) B, & i = 1, 2, 3, \\ B(0, k) = B_0(k) \text{ и } C_i(0, k) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $B = B(t, k)$ — биомасса растения в момент времени t для почв с k -м содержанием удобрения K_2O .

Первое уравнение системы является модификацией уравнения Ферхюльста [3, 7]: в рамках этого уравнения сумма первых четырех членов характеризует удельный прирост биомассы вследствие естественного прироста и воздействия на динамику растения элементов минерального питания.

Оценка предельного содержания в растении i -го вида элементов минерального питания следует из приравнивания нулю правой части второго уравнения (1). В первом приближении допускается, что предельные содержания определяются системой линейных алгебраических уравнений, описывающей стационарное состояние системы.

3. Оценка параметров модели

Задача параметрической идентификации состоит в нахождении экстремума функционала, вид которого зависит от специфики проведения наблюдений и имеющейся априорной информации о распределениях параметров модели. Постановка задачи состоит в следующем. Вводятся обозначения: $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ — вектор искомых параметров модели и $\Phi(p)$ — мера отклонений наблюдаемых величин от их модельных образов или так называемая невязка. Задача состоит в нахождении такого \mathbf{p} , который минимизирует $\Phi(p)$:

$$\min \Phi(p) \quad \text{для } \mathbf{p} \in P, \quad (2)$$

где P — область допустимых значений параметров. Без ограничения общности полагается, что область P соответствует k -мерному гиперкубу.

Так как уравнения модели линейные по своим параметрам, их начальные приближения можно определить стандартным методом наименьших квадратов (МНК). Ограниченность исходных наблюдений обуславливает переход к данным, которые получаются применением к ним процедуры интерполяции для каждого участвующего в экспериментах типа почвы (тип почвы задается концентрацией K_2O). Поскольку отбор растительных проб начинается с десятых суток с момента появления первых всходов, а заканчивается на 55-е сутки, для каждой динамической переменной имеются 46 временных точек. Кроме того, для каждого момента времени имеется экспериментальный материал по десяти наблюдениям содержания K_2O в почве. Таким образом, для каждой динамической компоненты системы имеется 450 точек. Временной шаг составляет одни сутки.

Нахождение начальных значений параметров следует решению четырех матричных линейных уравнений:

$$Y_j = A_j P_j, \quad j = 1, \dots, 4,$$

где размерность вектор-столбцов в левой части равна 450, матрицы A_j для биомассы — 450×5 , а в остальных случаях — 450×2 (число столбцов определяется количеством параметров модели); P_j — вектор-строка параметров модели. Обстоятельства оценки только двух параметров поясняются ниже.

Для нахождения P_1 элементы вектор-столбца Y_1 и матрицы A_1 определяются выражениями

$$Y_1 = \{B_{i+1}B_i^{-1} - 1 : i = (n-1) \cdot 10 + l, n = 1, \dots, 45, l = 1, \dots, 10\},$$

$$(A_1)_{i,1} = 1, \quad (A_1)_{i,2} = (C_1)_i, \quad (A_1)_{i,3} = (C_2)_i, \quad (A_1)_{i,4} = (C_3)_i,$$

для нахождения P_j элементы вектор-столбца Y_j и матрицы A_j определяются выражениями ($j = 2, 3, 4$)

$$Y_{j-1} = \{W_{j-1,i} : i = (n-1) \cdot 10 + l, n = 1, \dots, 45, l = 1, \dots, 10\},$$

$$W_{j-1,i} = [(C_{j-1})_{i+1} - (C_{j-1})_i] B_i^{-1},$$

$$(A_{j-1})_{i,1} = C_{0,l}, \quad (A_{j-1})_{i,2} = (C_{j-1})_i,$$

$$i = (n-1) \cdot 10 + l, \quad n = 1, \dots, 45, \quad l = 1, \dots, 10.$$

Тот факт, что оценивание параметров моделей для содержания элементов выполняется только для двух параметров вместо трех, обусловлен зависимостью второго и третьего членов правой части уравнения. Такая ситуация приводит к коррелированности столбцов матрицы плана МНК и, как следствие, ее вырожденности [10, 14, 15].

При построении функционала, минимизация которого определяет оценку параметров системы (1), следует учитывать различие масштабов динамических переменных. В рассматриваемом случае его запись принимает вид

$$\Phi(p) = \sum_{t=2}^T \sum_{k=1}^K \left[(1 - B_{t,k}^{(m)} / B_{t,k})^2 + \sum_{j=1}^3 (1 - (C_j)_{t,k}^{(m)} / (C_j)_{t,k})^2 \right], \quad (3)$$

где массивы $B^{(m)}$ и $(C_j)^{(m)}$ следуют решению системы (1). Начальное распределение задается массивами $\{B_{t,k=1,\dots,K}\}$ и $\{(C_j)_{t,k=1,\dots,K}\}$. Тогда общее количество наблюдений (временных и почвенных) будет определяться числом $(T - 1)K$, где номер наблюдения обозначим как μ .

На рис. 2 представлены графики распределения значений составляющих функционала $\Phi(p)$, которые соответствуют отдельным слагаемым в квадратных скобках (3). Форма распределений указывает на сходимость итерационного процесса к точке минимума (3). При этом для всех выделенных составляющих уже на пятидесятой итерации этот минимум практически был достигнут для каждой из них. Всего выполнено 332 итерации. Распределение динамических переменных системы (1) приведено на рис. 3.

При построении ковариационной матрицы оценок параметров полагаем, что наблюдения имеют стандартное отклонение σ^2 . Тогда в соответствии с методикой нелинейного оценивания параметров [10, 16] ковариационная матрица оценок параметров определяется как

$$V_p \approx \sigma^2 (J' J)^{-1},$$

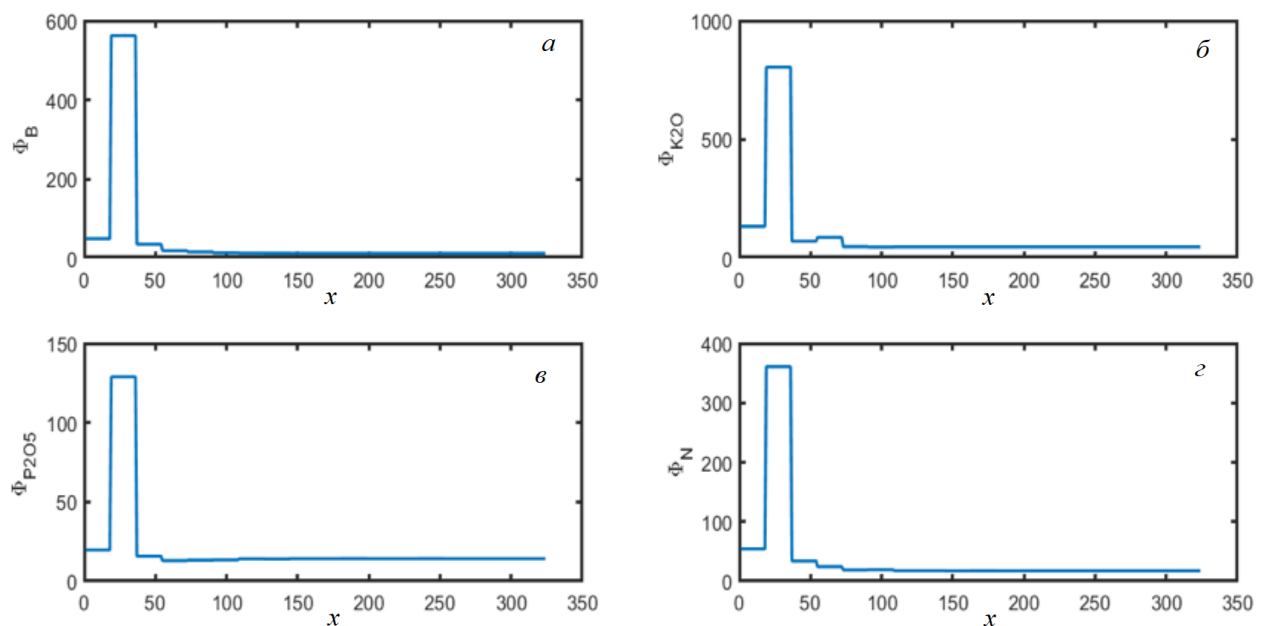


Рис. 2. Распределения невязок для динамических переменных: a — биомасса; $б$ — K_2O ; $в$ — P_2O_5 ; $г$ — N

Fig. 2. Distribution of residuals for dynamic variables: a — biomass; $б$ — K_2O ; $в$ — P_2O_5 ; $г$ — N

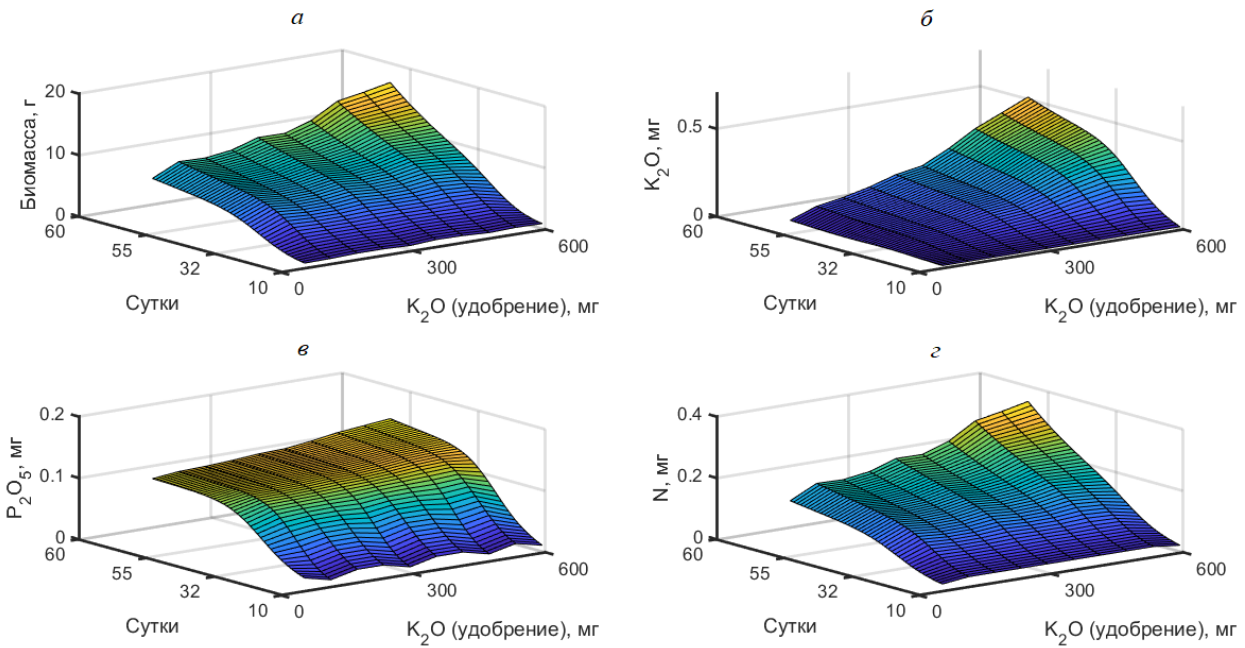


Рис. 3. Распределение динамических переменных системы (1): *a* — биомасса; *б* — K_2O ; *в* — P_2O_5 ; *г* — N

Fig. 3. Distributions of dynamic variables of the system (1): *a* — biomass; *в* — P_2O_5 ; *г* — N

где $J = \{\partial f_\mu / \partial p_l, \mu = 1, \dots, (T - 1)K, l = 1, \dots, 17\}$ — якобиан вектор-функции (здесь вектор-функция описывается выражением в квадратных скобках); μ — номер наблюдений, а l — индекс параметров системы, которые необходимо вычислить. Доверительный интервал оценок определяется выражением $p_l \pm t_{\alpha/2, \nu} \sqrt{(VP)_{l,l}}$, где $t_{\alpha/2, \nu}$ — так называемая t -статистика Стьюдента [16] с уровнем значимости $\alpha = 0.05$ и наблюдениями $\nu = 1800$.

Оценки параметров биомассы растений, а также коэффициент корреляции представления модельных значений натурным приведены в табл. 1, минерального питания — в табл. 2, здесь число после знака \pm указывает диапазон для доверительного интервала. В табл. 1 корреляция между экспериментальными и модельными распределениями биомассы 0.893.

Т а б л и ц а 1. Оценки коэффициентов модели динамики биомассы

Table 1. Estimates of the coefficients of the biomass dynamics model

| p | p_0 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 |
|-----|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| B | 0.077 ± 0.020 | 0.001 ± 0.096 | 0.001 ± 0.613 | 11.244 ± 1.544 | 0.236 ± 0.036 |

Т а б л и ц а 2. Оценки коэффициентов модели содержания элементов в растении

Table 2. Estimates of the coefficients of the model of the content of elements in the plant

| q | $q_{i,0}$ | $q_{i,1}$ | $q_{i,2}$ | $q_{i,3}$ | R |
|-------|-------------------|-------------------|--------------------|-----------------------|-------|
| C_1 | 0.004 ± 0.001 | 0.023 ± 0.001 | -0.027 ± 0.001 | 0.017 ± 0.001 | 0.890 |
| C_2 | 0.004 ± 0.001 | 0.033 ± 0.001 | 0.002 ± 0.001 | 0.010 ± 0.006 | 0.888 |
| C_3 | 0.007 ± 0.001 | 0.003 ± 0.001 | -0.031 ± 0.001 | 0.00004 ± 0.00100 | 0.901 |

Для установления адекватности модели экспериментальным распределениям следует оценить “качество” выполненной подгонки модельных данных к их наблюдаемым прообразам. Здесь она основана на коэффициентах корреляции между ними. Коэффициент корреляции между экспериментальным и модельным распределениями для биомассы равен 0.893 (см. табл. 1). Коэффициенты корреляции для каждого вида минерального питания приведены в графе R табл. 2. Их высокие значения и близость выборочных (см. рис. 1) и модельных (см. рис. 3) распределений указывают на хорошее соответствие модели (1) изучаемому процессу.

Из анализа таблиц следует существенное превышение по отношению к остальным соответствующего азоту C_3 коэффициента p_3 , что указывает на его ведущую роль в процессе обеспечения роста биомассы растения и тем самым согласуется с установившейся закономерностью накопления питательных веществ в процессе роста растения [9]. Поскольку доверительные интервалы для p_1 и p_2 содержат нули, здесь проверялись гипотезы $H_0 : p_1 = 0$, $H_0 : p_2 = 0$. С 95%-ной долей вероятности они оказались достоверными. Поэтому в рамках модели (1) влиянием содержания в растении K_2O и P_2O_5 можно пренебречь. Для $q_{3,3}$ также оказывается достоверной нулевая гипотеза $H_0 : q_{3,3} = 0$. Отрицательность $q_{1,2}$ и $q_{3,2}$ указывает на определенные “конкурентные” отношения между K_2O и P_2O_5 , а также N и P_2O_5 .

Тот факт, что растение выносит из почвы в надземную часть биомассы (в пересчете на сухую массу) от 0.5 до 2.0 % почвенного азота, около 0.2 % фосфора и 0.9 % калия, подтверждается взаимным соотношением коэффициентов друг с другом $p_1/p_2/p_3$ [9]. Повышение содержания K_2O также способствует увеличению содержания рассматриваемых в данной работе остальных элементов минерального питания.

Из анализа рис. 3 следует, что на почвах с повышенным содержанием K_2O имеет место повышенное значение биомассы. Так, самое большое влияние на темп роста биомассы оказывает азот, затем — калий, а фосфор на него практически не влияет. Превалирующая роль азота в росте и урожайности растительных культур объясняется тем, что он является строительным материалом для новых клеток растений [1, 11]. Результаты моделирования отражают этот факт, что подтверждается адекватностью разработанной модели.

Заключение

Выполнено построение модели системы удобрение — почва — растение на основании концепции системы ресурс — потребитель, где ресурсом выступают распределенные в ризосфере основные элементы минерального питания растений, а потребителем — само растение. Согласно этой концепции из постулата химической кинетики о линейной связи скорости протекания реакции и количества взаимодействующего вещества [3, 17] вытекает следующее: взаимодействие динамических переменных систем рассматриваемого профиля определяется их произведением. При построении модели динамики биомассы растения полагается, что удельная скорость изменения его биомассы пропорциональна взвешенной сумме элементов питания в тканях растения и члену, который характеризует внутривидовую ограниченность роста растения (внутривидовую конкуренцию [3]). При построении модели динамики элементов питания в самом растении учитывается их взаимосвязь, которая обусловлена их химической природой. Характер взаимодействия определяется знаками соответствующих коэффициентов.

Поскольку масштабы изменения динамических переменных соотносятся на несколько порядков их численных значений, процедура оценивания коэффициентов модели в данной работе следует решению задачи поиска экстремума нелинейного безразмерного функционала. Начальные значения коэффициентов определяются МНК. Полученные в результате моделирования распределения динамических переменных с достаточно высокой степенью адекватности соответствуют их экспериментальным распределениям и отражают реальную ситуацию, а именно: превышение над остальными численного значения коэффициента для азота определяет его ведущую роль в обеспечении роста растений.

Список литературы

- [1] Кауричев И.С., Панов Н.В., Розов Н.Н. Почвоведение. М.: Агропромиздат; 1989: 719.
 - [2] Thornley J.H.M. Mathematical models in plant physiology: A quantitative approach to problems in plant and crop physiology. N.Y.: Academic Press; 1976: 318.
 - [3] Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов. М.: МГУ; 1983: 302.
 - [4] Thornley J.H.M., France J. Mathematical models in agriculture: Quantitative methods for the plant, animal and ecological sciences. 2nd edition. Wallingford, UK: CABI; 2007: 906.
 - [5] Margalef R. Perspectives in ecological theory. Chicago: Univ. of Chicago Press; 1986: 112.
 - [6] Roose T., Keyes S.D., Daly K.R., Carminati A., Otten W., Vetterlein D., Peth S. Challenges in imaging and predictive modeling of rhizosphere processes. Plant Soil. 2016; 407 (1-2):9–38.
 - [7] Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука; 1978: 352.
 - [8] Darrah P.R., Jones D.L., Kirk G.J.D., Roose T. Modeling the rhizosphere: a review of methods for “upscaling” to the whole plant scale. European Journal of Soil Science. 2006; (57): 13–25.
 - [9] Минеев В.Г. Агрохимия. М.: МГУ; 2006: 714.
 - [10] Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика; 1979: 349.
 - [11] Ефремова М.А., Дричко В.Ф. Влияние калия на физико-химические свойства торфяной низинной почвы. Агрохимия. 2010; (4):3–10.
 - [12] Сладкова Н.А. Распределение цинка и кадмия в системе торфяная почва — растение под влиянием фосфорных и калийных удобрений: Дис. ... канд. биол. наук. СПб.; Пушкин: СПбГАУ; 2016: 187.
 - [13] Четырбоцкий В.А. Математическая модель распределения фосфора в ризосфере. Труды Междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2019”. М.: МГУ; 2019:212–214.
 - [14] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит; 2001: 320.
 - [15] Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука; 1981: 110.
 - [16] Болч Б., Хуань К.Дж. Многомерные статистические методы для экономики. М.: Статистика; 1979: 317.
 - [17] Дьяченко А.Н., Шагалов В.В. Химическая кинетика гетерогенных процессов: учеб. пособие. Томск: Изд-во ТПУ; 2014: 102.
-

**Parametric identification of the dynamics model in the system
fertilizer — soil — plant**CHETYRBOTSKY VALENTIN A.¹, CHETYRBOTSKY ALEXANDER N.²¹Joint Stock Company “Apatit”, Innovation Center, 119333, Moscow, Russia²Far East Geological Institute FEB RAS, 690022, Vladivostok, RussiaCorresponding author: Chetyrbotsky Valentin A., e-mail: ve14232@gmail.com*Received June 11, 2019, revised November 9, 2019, accepted January 31, 2020***Abstract**

Modern mathematical models for the simulation of dynamics in the “fertilizer — soil — plant” system, the components of which are agricultural plants, soil microorganisms and elements of their mineral nutrition, are considered. Based on the analysis of the adopted provisions, a model that takes into account the relationships and the specific nature of the joint changes in its components has been developed. The mathematical formalization of the model equations is carried out, for the construction of which the concept of the “resource-consumer” system was used. In this case, the consumer is the biomass of plants, and the content of the main elements of its mineral nutrition distributed in the narrow basal zone of plants is a resource. The dynamic equations of the model follow the basic principle of chemical kinetics, according to which the result of the interaction between dynamic variables in the systems of the profile in question is determined by their product. The equations also contain the self-limitation factor, which sets the growth rate of the curve for the logistic equation and the specific rate of the model variables saturation effect. Thus, the specific rate of change in biomass is determined by its natural growth rate, the weighted sum of the nutrient contents in plants, and intraspecific competition. The rate of change in the content of these elements per unit of biomass is proportional to their current content in the rhizosphere and to the factor of the mutual influence of the elements on each other. The parameters are estimated and the adequacy of the model to sample distributions is established. An array of experimental data on the growth of spring wheat (Krasnoufimskaya-100) on peat lowland soil, the preliminary soil treatment of which was carried out using nitrogen, phosphorus, and potassium fertilizers, is used as sample distributions. The coefficients obtained as a result of parameter estimation and the calculated distributions of model dynamic variables with a sufficiently high degree of adequacy correspond to their experimental distributions and reflect the real situation of the system evolution.

Keywords: rhizosphere, elements of plant mineral nutrition, logistic equation, search for extremum of a functional.

Citation: Chetyrbotsky V.A., Chetyrbotsky A.N. Parametric identification of the dynamics model in the system fertilizer — soil — plant Computational Technologies. 2020; 25(2):92–102. (In Russ.)

References

1. Kaurichev I.S., Panov N.V., Rozov N.N. Pochvovedenie [Soil Science]. Moscow: Agropromizdat; 1989: 719. (In Russ.)
2. Thornley J.H.M. Mathematical models in plant physiology: A quantitative approach to problems in plant and crop physiology. N.Y.: Academic Press; 1976: 318.
3. Ryzhichenko G.Yu., Rubin A.B. Mathematical models of biological production processes. Moscow: MGU; 1983: 302. (In Russ.)

4. Thornley J.H.M., France J. *Mathematical models in agriculture: Quantitative methods for the plant, animal and ecological sciences*. 2nd edition. Wallingford, UK: CABI; 2007: 906.
5. Margalef R. *Perspectives in ecological theory*. Chicago: University of Chicago Press; 1986: 112.
6. Roose T., Keyes S.D., Daly K.R., Carminati A., Otten W., Vetterlein D., Peth S. Challenges in imaging and predictive modeling of rhizosphere processes. *Plant Soil*. 2016; 407(1-2):9–38.
7. Svirezhev Yu.M., Logofet D.O. *Sustainability of biological communities*. Moscow: Nauka; 1978: 352. (In Russ.)
8. Darrah P.R., Jones D.L., Kirk G.J.D., Roose T. Modeling the rhizosphere: a review of methods for “upscaling” to the whole plant scale. *European Journal of Soil Science*. 2006; (57): 13–25.
9. Mineev V.G. *Agrochemistry*. Moscow: MGU; 2006: 714. (In Russ.)
10. Bard Y. *Nonlinear parameter estimation*. New York; London: Academic Press; 1974: 341.
11. Efremova M.A., Drichko V.F. Effect of potassium on the physicochemical properties of lowland peat soil. *Agrokimiya*. 2010; (4):3–10. (In Russ.)
12. Sladkova N.A. *Raspredelenie tsinka i kadmiya v sisteme torfyanaya pochva — rastenie pod vliyaniem fosfornykh i kaliynykh udobreniy* [Distribution of zinc and cadmium in peat soil-plant system under the influence of phosphorus and potassium fertilizers]; Dis. ... kand. biol. nauk. SPb.; Pushkin: SPbGAU; 2016: 187. (In Russ.)
13. Chetyrbotsky V.A. A mathematical model of the phosphorus distribution in the rhizosphere. *Proc. of the Intern. Scienc. Conf. Students, Graduate and Young Scientists. “Lomonosov-2019”*. Moscow: MGU; 2019:212–214. (In Russ.)
14. Samarsky A.A., Mikhailov A.P. *Mathematical modelling: Ideas. Methods. Examples*. Moscow: Fizmatlit; 2001: 320. (In Russ.)
15. Sobol I.M., Statnikov R.B. *The choice of optimal parameters in problems with multiple criteria*. Moscow: Nauka; 1981: 110. (In Russ.)
16. Bolch B.W., Huang C.J. *Multivariate statistical methods for business and economics*. 1 Edition. N.Y.: Prentice-Hall; 1974: 329.
17. Dyachenko A.N., Shagalov V.V. *Khimicheskaya kinetika geterogennykh protsessov. Uchebnoe posobie* [Chemical kinetics of heterogeneous processes: study guide]. Tomsk: Izd-vo TPU; 2014: 102. (In Russ.)